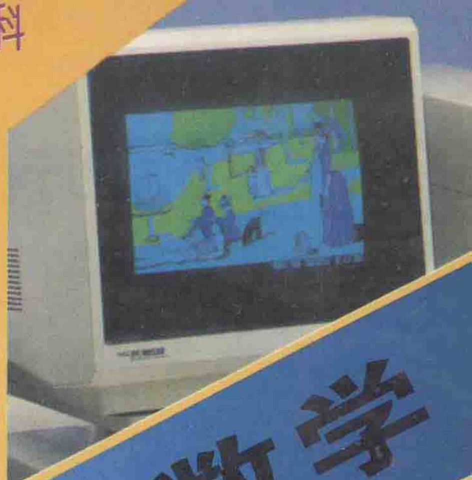
经济管理·计算机·工科

JINGJIGUANLI · JISUANJI · GONGKE

YINGYONG MOHU SHUXUE



应用模糊数学

邹增家　编著

东北师范大学出版社

经济管理·计算机·工科

应用模糊数学

邹增家 编著

东北师范大学出版社

1996·长春

（吉）新登字12号

经济管理·计算机·工科

应用模糊数学

YINGYONG MOHU SHUXUE

邹增家　编著

责任编辑：杨述春　　封面设计：李冰彬　　责任校对：左　群

东北师范大学出版社出版　　吉林省新华书店发行
（长春市斯大林大街110号）　东北师范大学出版社激光照排中心制版
（邮政编码：130024）　　吉林工学院印刷厂印刷

开本：850×1168毫米 1/32　　1996年4月第1版
印张：6　　1996年4月第1次印刷
字数：135千　　印数：001—500册

ISBN 7-5602-1783-4/O·90　　定价：6.00元

前 言

模糊数学是以1965年美国控制专家扎德教授发表的《模糊集合论》文章为标志而诞生的一门新的数学学科。它的出现不仅扩充了经典数学的内容,而且由于客观世界中模糊性的普遍存在,使它在自然科学、工程技术、经济管理、社会科学的诸多领域中都得到了广泛的应用。

为了拓宽数学基础理论和观念,适应现代科学技术发展的需要,许多高等院校都增设了这门课程。我院访问学者朴忠浩教授在80年代初从日本研修回来后及早地在我院开设了模糊数学课,编者也相继为我院硕士研究生开设了这门选修课。在总结开设这门课程的教学实践及所积累的教学经验的基础上,为了更好地适应理工科院校各专业开设这门课程的教学需要,经过对讲稿的多次补充及反复修改,重新编写了这本教材。

在教材编写中,力图对基本概念、基础理论的阐述深入浅出,简易明了,侧重于实际应用方法的介绍,在介绍中力求直观清晰,自始至终贯穿着应用实例,便于学生理解掌握。为适应经济管理专业教学需要,书中较多地引用了经济管理方面的实例,整个内容适于40学时的教学需要。

完成这本教材的编写,应该感谢下列诸位同志的关心和帮助:

学院的专家评议组及教务处的领导对教材进行了认真的评审，对出版该教材给予了必要的扶持；朴忠浩教授在百忙中挤时间审阅了全部书稿，并提出了宝贵的意见。我的学生陈华忠、刘福荣为本书的出版给予了有力的支持。我的母校——东北师范大学出版社的领导及编辑为本书的早日出版付出了辛勤的劳动。书中实际应用的例子引用了许多同志的研究成果，再次向他们表示感谢。

由于编者学识水平所限，书中疏漏和错误之处在所难免，恳请读者批评指正。

邹增家

1995 年 10 月

于东北电力学院

目　　录

第一章　模糊集合与模糊关系

本章介绍的是模糊数学的基础知识．先引入两个基本概念——模糊集合与模糊关系，再介绍它们的运算．在引入这两个概念的时候，我们先分别叙述普通集合和普通关系，然后把模糊集合和模糊关系作为它们的自然推广．

§1-1　普通集合及其运算

一、集合与元素

人们在研究具体问题时，总是对局限于一定范围的对象（或事物、个体等）进行讨论，所讨论对象的全体称为论域，常用U（或X）来表示．论域U中的每个对象u称为U的元素，具有共同特性的元素构成一个集合（简称集），显然论域U是一个集合．例如设论域为人类，则银行的全体信贷员、企事业单位的全体会计、电力战线的全体工人……均各构成一个集合．论域中的每一个人就是该论域中的一个元素，每位会计即是全体会计是这一集合的元素；又如某发电厂的所有汽轮机，每台汽轮机的所有零部件都可以看作是一集合，而每台汽轮机上的零部件，则又分别是这两个集合的元素．

在论域U中任意给定一个元素u，且任意给定一个集合A，如果u有集合A的特性，也就是说它是集合A的元素时，我们就用

记号 $u \in A$ 来表示，读作 u 属于 A；如果 u 没有 A 集合的特性，即它不是 A 的元素时，我们用记号 $u \notin A$ 来表示，读作 u 不属于 A.

二、集合的表示法

习惯上，常用大写字母 A、B、X、Y、U、V……表示集合，而用小写字母 a、b、x、y、u、v……表示元素. 若一个集合由有限个元素构成，则该集合称为有限集合，否则称为无限集合. 常用的集合表示法有三种.

1. 列举法

对一个有限集合，把集合的所有元素一一列举出来表示集合的方法，称为列举法，如：

$$A = \{1,2,3,4,5\}$$

在这种表示法中，只要两个集合含有的元素它全相同，则不论元素排列的顺序如何，其表示的都是同一集合.

2. 定义法

通过给出集合元素的共同特性来表示集合的方法称为定义法. 如果给定一个性质 P，若存在一个集合 A，当 A 的元素 x 恰具有性质 P，则用

$$A = \{x | P(x)\}$$

表示这个集合，其中 $p(x)$ 是“元素 x 具有性质 P”的一个缩写. 如若 $P(x)$ 表示“数 x 的平方等于 4”这一性质，则满足这一条件的 x 所构成的集合 A 可表示为

$$A = \{x | x^2 = 4\}$$

3. 叙述法

在不引起混淆的情况下，为了简便，可用文字来描述集合元

素的特征. 用这种方法表示集合叫作叙述法，如 N、Z、Q 分别表示自然数、所有整数和一切有理数组成的集合，它们可分别表示为：

$$N = \{自然数\} \qquad Z = \{整数\}$$
$$Q = \{有理数\}$$

显然，$-2 \in Z$ 而 $-2 \notin N$；$\frac{1}{2} \in Q$ 而 $\frac{1}{2} \notin Z$.

下面给出关于集合的几个经常用到的概念.

（1）空集

定义 1·1·1 不含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$.

例如，$A= \{x|x$ 是实数且 $x^2+1=0\}$，则集合 A 为空集.

（2）子集

定义 1·1·2 设 A,B 是两个集合，如果属于 A 的元素都属于 B，则称集合 A 为集合 B 的一个子集，或者说集合 B 包含集合 A，记作：$A \subseteq B$.

例如：$A=$ {火电总公司}，$B=$ {电力集团}，则 $A \subseteq B$.

若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$.

我们规定"空集"是任何集合的子集，因此任何一个集合 A 都介于空集与论域 U 之间，即有

$$\varphi \subseteq A \subseteq U$$

（3）幂集

把论域 U 的每一个子集看作一个元素，由 U 的一些子集又可以组成一个新的集合.

定义 1·1·3 论域 U 的一切子集构成的集合称为 U 的幂集，记为：$P\ (U)$ 即

$$P(U) = \{A|A \subseteq U\}$$

这样 U 的子集 A 既可作记 $A \subseteq U$，也可记作 $A \in P(U)$.

例 1 设 $U= \{1,\ 2,\ 3\}$，则有

$P\ (U)\ = \{\varnothing\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,\ 2\}$，$\{2,\ 3\}$，$\{1,\ 3\}$，

$\{U\}$.

可以证明出当 U 中有 n 个元素时，则 $P(U)$ 有 2^n 个元素.

三、集合的基本运算

集合的基本运算是并、交、余运算，下面给出它们的定义.

定义 1·1·4 设 A，B 为论域中的两个子集.

(1) 由属于 A 或属于 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的并集（简称并），记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x|x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

(2) 由 A 和 B 所有相同元素构成的集合称为 A 和 B 的交集，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

(3) 由属于 A 但不属于 B 的元素构成的集合称为 A 对 B 的差集，记作 $A—B$，即

$$A—B=\{x|x\in A \text{ 但 } x\notin B\}$$

集合的并，交可推广到 n 个集合

$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\{x|x \text{ 至少属于 } A_i \text{ 之一}, i=1, 2, \cdots n\}$

$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\{x \text{ 属于所有 } A_i, i=1, 2, \cdots n\}$

定义 1·1·5 设 A 是论域 U 的一个子集，由 U 中不属于 A 的所有元素构成的集合，称为集合 A 的余集，或称补集（简称余或补），记作 A^C 即

$$A^C=U-A=\{x|x\in U \text{ 但 } x\notin A\}$$

上面定义的几种运算，可以用直观的文氏图表示出来.

例 2 设 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $A=\{2, 4, 5, 6\}$ $B=\{1, 2, 5, 7\}$ 则

$A\cup B=\{2, 4, 5, 6\}\cup\{1, 2, 5, 7\}=\{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$

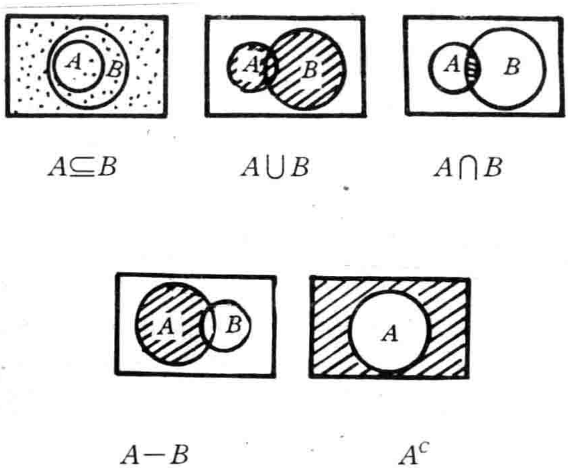


图1·1

$A\cap B=\{2, 4, 5, 6\}\cap\{1, 2, 5, 7\}=\{2, 5\}$

$A-B=\{2, 4, 5, 6\}-\{1, 2, 5, 7\}=\{4, 6\}$

$A^C=U-A=\{1, 3, 7, 8\}$

四、集合运算的性质

集合的并、交、余运算具有下列运算性质：

(1) 幂等律：$A\cup=A$；　$A\cap A=A$

(2) 交换律：$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$

(3) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(4) 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(5) 互补律：$A\cup A^C=U$，$A\cap A^C=\varnothing$

(6) 同一律：$A\cup\varnothing=A$，$A\cap U=A$

(7) 零一律：$A\cup U=U$，$A\cap\varnothing=\varnothing$

(8) 吸收律：$A\cup(A\cap B)=A$；

$A\cap(A\cup B)=A$

(9) 对偶律：(德·摩根律)

$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$，$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$

(10) 复原律：$(A^C)^C=A$

五、映射及特征函数

为了便于用函数描述集合，我们先给出映射的概念.

定义 1·1·6 设 X，Y 是两个集合，若存在一个法则 f，对于每一个 $x\in X$，通过法则 f 唯一确定一个 $y\in Y$ 与之对应，则称 f 是从 X 到 Y 的一个映射，记作 f：$X\to Y$.

如果 $x\in X$ 有 $y\in Y$ 和 x 对应，则称 y 是 x 的像（值）记为 $y=f(x)$，而 x 为 y 的原像，并把 y 的原像全体记为 $f^{-1}(y)\subseteq X$.

如图 1·2，y_1 是 x_1 的像，y_2 是 x_2，x_3 的像，x_3 是 y_3 的原像，但 x_2，x_3 同时都是 y_2 的原像（原像可以不唯一）. X 为 f 的定义域，$f(X)=\{f(x)|x\in X\}$ 为 f 的值域，显然，

$f(X)\subseteq Y$.

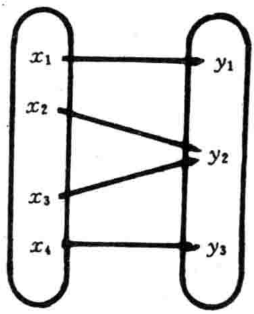


图 1·2

从中看出一个映射必然联系着两个集合和一个对应法则，映射是函数概念的推广.

对于论域 U 中的任意一个元素 u 与一个集合 A 来

说，它们之间的关系只能是要么 $u\in A$，要么 $u\notin A$，二者必居其一且仅居其一，这是普通集合的一个特点. 若将 $u\in A$ 记为 1，而将 $u\notin A$ 记为 0，即 U 的子集 A 对应一个二值函数 χ_A：$X\rightarrow\{0, 1\}$，反之，每个 U 上的二值函数也对应一个集合，则有

定义 1·1·7 设 A 是 U 的子集，映射 χ_A：$\chi\rightarrow\{0, 1\}$ 定义为

$$\chi_A(u)=\begin{cases}1 & \text{当 } u\in A\\ 0 & \text{当 } u\notin A\end{cases}$$

称 χ_A 为 A 的特征函数.

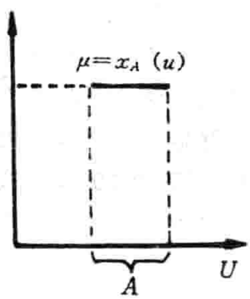


图 1·3

由此集合可以用特征函数来描述，这将对我们下步引入模糊集合带来很大方便，在下一节里我们会看到特征函数是我们将引入的隶属函数的特殊情形. 特征函数的图形如图 1·3 所示.

集合的并、交、余运算用特征函数表示如下：

命题 1·1 设 A、$B\in P\ (U)$，$\forall\ u\in U$

(1) $\chi_{A\cup B}\ (u)\ =\chi_A\ (u)\ \vee\chi_B\ (u)$

(2) $\chi_{A\cap B}\ (u)\ =\chi_A\ (u)\ \wedge\chi_B\ (u)$

(3) $\chi_{A^c}\ (u)\ =1-\chi_A\ (u)$

这里符号“∨”和“∧”取最大和取最小.

§ 1-2　模糊集合及其运算

一、模糊集合的概念

集合是现代数学中最基本的概念之一，集合可以表现概念. 人们在认识客观事物的过程中所产生的每一个概念都有它的内涵和外延. 一个概念所包含的那些区别于其他概念的全体本质属性称为该概念的内涵；而符合某概念的那些对象的全体则称为该概念的外延. 例如，“人”这个概念的内涵就是区别于其他动物的那些本质属性的全体，如能进行思维，会使用工具进行生产等，而世界上所有的人的全体就构成了“人”这个概念的外延. 从集合论的观点来说，一个概念的外延，就是一个集合，因此“人”这个概念的外延也就是世界上所有的人组成的集合. 这种概念的外延是明确的，外延组成的集合是清晰的，如“苹果”、“货币”……都是这类清晰的概念，这类概念可以用普通集合来描述.

但是在我们研究过程中所遇到的概念，并不都是如此清晰的，其中存在着大量不清晰的概念，如“年轻人”、“健康者”、“优质产品”、“市场疲软”、“经济效益好”等，在我们所研究的一些对象中，我们无法说清它绝对符合或绝对不符合某个概念. 就“经济效益好”而言，以某系统的所有企业为论域，某企业生产出名牌产品走俏市场，且产品的成本、企业内耗不断降低，利润大幅度增长，这个企业可以认为是绝对“经济效益好”，而有些企业产品大量积压，连年亏损，负债累累，这样的企业是绝对不属于“经济效益好”. 但有的企业能维持生产，可以给职工开出工资并有微薄奖金，这样的企业很难断定它是否属于“经济效益好”，实际上是处于“好”与“差”两者之间的中介状态，常听到人们说起“经济效益较好”、“经济效益一般”、“经济效益较差”，它们都

属于这类状况．也就是说“经济效益好”这个概念的外延没有明确的界限，是不清晰的，这种概念我们称为模糊概念，这种概念在现实世界中是大 量存在的．

用普通集合 A 来描述一个清晰的概念时，表现为论域 U 中的任一元素 u，要么 $u\in A$，要么 $u\notin A$，二者必居其一且只居其一，这种特征用特征函数 χ_A：$U\rightarrow\{0,1\}$，$u\mapsto\chi_A(u)\in\{0,1\}$ 来表示．论域 U 中的元素 u，只对应 0，1 两个数，它们标志着 u 属于或不属于集合 A，而模糊概念的外延是不清晰的，与之对应的集合（称为模糊集合）很难断定论域中的某些元素是绝对属于还是绝对不属于该集合，而只能说出它们的隶属于该集合的程度，这样对于论域中的每个元素只对应 0、1 两个数就显得不足了．为了定量的描述论域中的每个元素隶属于这种集合的程度，美国自动控制论专家，应用数学家扎德教授在 1965 年首先引入模糊集合（Fuzzy sets）这个概念，扎德引入模糊集合的基本思想是：把普通集合中的绝对隶属关系加以扩充，使元素对集合的隶属程度只能取 0，1 这两个值推广到可以取单位区间〔0，1〕中的任意实数值，元素对应的数值愈靠近 1，表示元素隶属于该集合的程度愈大，反之愈小，从而实现了定量的描述模糊概念．

定义 1·2·1　设论域为 U，映射

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}:\qquad U\longrightarrow[0,1]$$

称作 U 的一个模糊子集$\underset{\sim}{A}$．称 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$为$\underset{\sim}{A}$的隶属函数，而对$\forall\ u\in U$ $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 称为 u 对$\underset{\sim}{A}$的隶属度，表示 u 对$\underset{\sim}{A}$的隶属程度（$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 可简记为$\underset{\sim}{A}(u)$）．

通常将模糊集合$\underset{\sim}{A}$的隶属函数图形画成图 1·4 的曲线形状，与普通集合完全由它的特征函数所确定的一样，模糊集合$\underset{\sim}{A}$完全由隶属函数所确定．特别地当 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 的值域为集合 $\{0,1\}$ 时，模糊集合退化成普通集合，这时隶属函数就变成了普通集合的特征函数，由此可见，普通集合是模糊集合的特殊情形，而模糊集

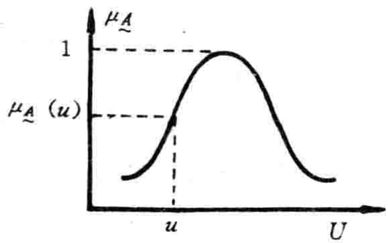


图 1·4

合则是普通集合概念的一般化.

论域 U 上的全体模糊子集所组成的集合，称为模糊幂集，记作：

$$F(U) = \{\underset{\sim}{A} \mid \mu_{\underset{\sim}{A}}: U \to [0,1]\}$$

在普通集合论中属于"∈"概念是重要的基本概念之一. 在模糊集合论中，除隶属度为 1 和 0 外，属于或不属于都是没有明确涵义的，但上述模糊幂集 $F(u)$ 是以 U 上的全体模糊子集为元素，是一个普通集合，因此可有 $\underset{\sim}{A} \in F(U)$ 并且 $P(U) \subseteq F(U)$.

例 1 某商场对 5 名家电维修技师进行"维修技术熟练"考评，按百分制给分，再除以 100. 设 5 名技师为论域 U，

$$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$$

论域 U 上的每个元素 u_i（$i=1, 2, \cdots 5$）都对应于 [0, 1] 之间的一个数值：

$$u_1 \to 0.85, u_2 \to 0.75, u_3 \to 0.9, u_4 \to 0.6, u_5 \to 0$$

这样便确定了 U 上的一个模糊子集 $\underset{\sim}{A}$，它表示维修组的每位技师对"维修技术熟练"这一模糊概念的隶属程度.