新世纪高等学校本科数学规划教材

# 概率论与数理统计

# Probability and Mathematical Statistics

主 编 赵更生 王 庆 于丽妮

东北大学出版社
Northeastern University Press

新世纪高等学校本科数学规划教材

# 概率论与数理统计

## Probability and Mathematical Statistics

主编　赵更生　王　庆　于丽妮



东北大学出版社
·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计／赵更生，王庆，于丽妮主编．—沈阳：东北大学出版社，2013.7
（新世纪高等学校本科数学规划教材）
ISBN　978-7-5517-0335-2

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①赵…　②王…　③于…　Ⅲ.①概率论—高等学校—教材　②数理统计—高等学校—教材　Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 167931 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024-83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024-83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph@ neupress. com
http：//www. neupress. com
印 刷 者：沈阳航空发动机研究所印刷厂
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：185mm × 260mm
印　　张：9. 75
字　　数：256 千字
出版时间：2013 年 7 月第 1 版
印刷时间：2013 年 7 月第 1 次印刷
策划编辑：刘宗玉
责任编辑：郎　坤　　责任校对：刘乃义
封面设计：刘江旸　　责任出版：唐敏智

ISBN　978-7-5517-0335-2　　定　　价：24.00 元

# 《概率论与数理统计》编写人员


主　　　编　赵更生　王　庆　于丽妮

副　主　编　邢　刚　牛玉玲　朱贵凤

其他编写人员　（以姓氏笔画为序）

刘艳波　王学理

# 前　言

数学是本科院校理工、经管等各专业的公共必修课，是一门重要的基础课；既是学习后续课程必须学会的基础知识，也是日后开展工作、解决问题应掌握的基本方法。进入 21 世纪以来，我国的高等教育有了突飞猛进的发展，教材建设也取得了长足的进步. 目前，科学技术日新月异，随着计算机的广泛应用及数学软件的普及，世界已全面进入信息时代，这些无疑对基础课教材，特别是数学课教材提出了更新、更严格的要求. 正是在这样一种形势下，我们在总结多年本科数学教学经验、探索本科数学教学发展动向、分析国内外同类教材发展趋势的基础上，编写出这套适于本科生各专业使用的《新世纪高等学校本科数学规划教材》，本书是其中的《概率论与数理统计》.

本书依据教育部制订的“概率论与数理统计课程教学基本要求”编写而成，遵循重视基本概念、培养基本能力、力求贴近实际应用的原则，并充分考虑了概率论与数理统计课程教学时数减少的趋势. 本书具有以下特色：

1. 突出基本思想和基本方法. 突出概率论与数理统计的基本思想和基本方法的目的在于让学生在学习过程中较好地了解各部分内容的内在联系，在总体上把握概率论与数理统计的思想方法；帮助学生掌握基本概念，理顺概念之间的联系，提高教学效果. 在教学理念上不过分强调严密论证、研究过程，而更多的是让学生体会概率论与数理统计的本质和概率论与数理统计的价值.

2. 加强基本能力培养. 本书的例题、习题较多，在解题方法方面有较深入的论述，其用意就是让学生在掌握基本概念的基础上，熟悉运算过程，精通解题技巧，最后达到加快运算速度、提高解题能力的目的.

3. 贴近实际应用. 本书对基本概念的叙述，力求从身边的实际问题出发，自然地引出. 例题和习题多采用一些在客观世界，即自然科学、工程技术领域、经济管理领域和日常生活中经常面临的现实问题，希望以此来提高学生学习概率论与数理统计的兴趣和利用概率论与数理统计知识解决实际问题的能

力.

4. 考虑到部分学生的“考研”需求和其他需要，书中选用了若干与基础知识紧密联系的各类考研真题作为例题、习题. 这样做，既有利于平时的教学，起到引领、指导的作用，又使教材能贴近教研大纲的要求. 新颖的考研真题，使例题、习题多样化、知识点化，便于学生举一反三、融会贯通，尽快掌握重点、核心知识.

5. 配备了与教材有关的PPT多媒体课件，配合使用，能形成教与学的有机结合，便于实现双向交流. 将现代化多媒体引入了教学，大大提高教学的效果.

全书共分8章，包括随机事件与概率、随机变量及其概率分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、切比雪夫不等式和大数定律、统计的基本概念、参数估计和假设检验等内容. 各章后均配有习题，书后附有习题参考答案.

由于编者水平所限，书中内容、体系、结构等方面的不当甚至是错误之处，敬请广大读者批评指正。

作　者

2013年2月

# 目　录

# 第一章　随机事件与概率

## 第一节　基本概念

### 一、随机现象

在自然界里，人们在生产实践和科学试验中所观察到的现象大体上可分为两类. 一类是确定性现象，它在一定条件下必然发生(或必然不发生)，其结果是确定的；另一类是不确定性现象，它在人们未做观察或试验之前是不能预知其结果的，称为随机现象.

**例 1**　水在 100℃必然沸腾，属于确定现象；在电学中，同性相斥，异性相吸，属于确定现象；在一定高度的物体，经过一段时间后，必然落到地上，属于确定现象.

微积分学、线性代数等就是研究必然现象的数学工具.

**例 2**　抛掷一枚硬币，不能预先知道是出现正面还是出现反面，属于随机现象；抛掷一枚色子，不能预先知道究竟是 6 个点中的哪个点，属于随机现象.

对于不确定性现象，人们发现，虽然每次试验或观察结果具有不确定性，但在大量重复试验或观察下，其结果却呈现出某种规律性.

例如，大量重复抛一枚硬币，得正面朝上的次数与正面朝下的次数大致都是抛掷总数的一半.

概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象的统计规律性的一门数学学科.

### 二、随机试验

要对随机现象的统计规律进行研究，就要对随机现象进行重复观察，把对随机现象的观察叫作试验.

1. 随机试验

具有以下特点的试验称为随机试验：

(1) 可以在相同条件下重复进行；

(2) 试验结果是可观察的，所有可能的结果是明确的；

(3) 每次试验之前不能确定会出现哪种结果.

2. 样本点

随机试验的一个可能的结果称为样本点，记作 $\omega$.

### 三、样本空间

由随机试验所有可能的结果(样本点)组成的集合称为样本空间，记作 $\Omega$.

**例 3**　抛掷一枚色子一次所出现的点数. 可能出现的结果为 1，2，3，4，5，6，$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

**例4**　某人24h内接到的电话的总数．可能出现的结果为0，1，2，…，$\Omega=\{0, 1, 2, \cdots\}$.

**例5**　观察一台电脑的使用寿命．可能出现的结果可以是任一非负实数，$\Omega=[0, +\infty)$.

**四、随机事件**

1. 随机事件

由一个随机试验中满足某种条件的若干个样本点组成的集合，称为随机事件，简称事件. 事件通常用大写的英文字母 $A$，$B$，…表示.

**注：**(1) 随机事件是样本空间的子集；

(2) 某个事件发生，当且仅当该事件所包含的某个样本点出现.

2. 基本事件

由一个样本点组成的事件，称为基本事件. 随机事件是由基本事件组成的集合. 相对于基本事件，由多个样本点组成的事件，称为复合事件，如 $A=\{1, 2\}$，$B=\{4, 5, 6, 7, 8\}$.

3. 必然事件

作为一个事件，样本空间 $\Omega$ 在每次试验中必然发生，因此 $\Omega$ 常称为必然事件.

4. 不可能事件

作为一个事件，空集 $\varnothing$ 在每次试验中都不会发生，因此 $\varnothing$ 称为不可能事件.

5. 事件的集合表示

由上面看到，事件等同于集合的某个子集，即事件$\Leftrightarrow\Omega$的某一子集. 或者说，任一个事件都可以用 $\Omega$ 的某个子集来表示.

**五、事件的运算及运算律**

1. 事件的包含与相等

若事件 $A$ 发生，导致事件 $B$ 发生，即 $A$ 中每一样本点均属于 $B$，则称事件 $B$ 包含 $A$，记作 $A\subset B$.

若 $A\subset B$ 且 $A\supset B$，则称 $A$ 与 $B$ 相等，记作 $A=B$.

2. 事件的和(或并)

若事件 $A$ 与 $B$ 至少有一个发生，则称这个事件 $C$ 为 $A$ 与 $B$ 的和(或并)，记作 $C=A\cup B$. 一般地，$n$ 个事件 $A_1$，$A_2$，…，$A_n$ 的和事件记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. 可列个事件 $A_1$，$A_2$，…的和事件记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$，它们都表示所列诸事件中至少有一个发生.

3. 事件的交(或积)

若事件 $A$ 与 $B$ 同时发生，则称这个事件 $C$ 为 $A$ 与 $B$ 的交(或积)，记作 $C=A\cap B=AB$. 一般地，$n$ 个事件 $A_1$，$A_2$，…，$A_n$ 的交事件记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$，可列个事件 $A_1$，$A_2$，…的交事件记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$，它们都表示所列诸事件全都同时发生.

4. 事件的差

若事件 $A$ 发生而 $B$ 不发生，则称这个事件 $C$ 为事件 $A$ 与 $B$ 的差，记作 $A-B$.

5. 互斥(互不相容)事件

若事件 $A$ 与 $B$ 不可能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 $A$ 与 $B$ 是互不相容事件.

6. 互逆(对立)事件

事件 $A$ 与 $B$，若 $AB=\varnothing$，$A\cup B=\Omega$，则称事件 $A$ 与 $B$ 为互逆事件，此时称 $B$ 为 $A$ 的逆事件，记作 $\bar{A}$(非 $A$ ). $\bar{A}$ 表示 $A$ 不发生；故 $B=\bar{A}$，$A=\bar{B}$，且有

$$A\bar{A}=\varnothing,\ A\cup\bar{A}=\Omega,\ \bar{\bar{A}}=A.$$

7. 事件的运算律

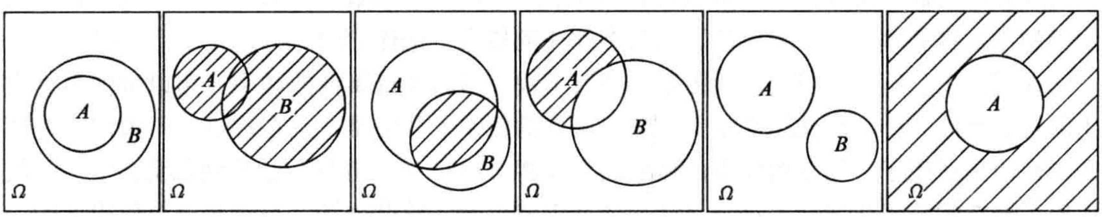
(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$；

(2) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；$A(BC)=(AB)C$；

(3) 分配律：$A\cup(BC)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；$A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$；

(4) 德·摩根定律：$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$；$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

**注：** 事件的运算关系如图 1.1 所示，运算律可以推广到有限个和可列个事件的情况.




$A\subset B$　$A\cup B$　$A\cap B$　$A-B$　$A\cap B=\varnothing$　$\bar{A}$

**图 1.1**

**例 6**　将下列事件用事件 $A$，$B$，$C$ 表示出来：

(1) 3 个事件中至少有 1 个发生：$A\cup B\cup C$；

(2) 3 个事件中只有 $A$ 发生：$A\bar{B}\bar{C}$；

(3) 3 个事件中恰好有 2 个发生：$(AB\bar{C})\cup(A\bar{B}C)\cup(\bar{A}BC)$；

(4) 3 个事件中至少有 2 个发生：$(\bar{A}BC)\cup(A\bar{B}C)\cup(AB\bar{C})\cup(ABC)$；

(5) 3 个事件中不多于 1 个发生：$(\bar{A}\bar{B}\bar{C})\cup(A\bar{B}\bar{C})\cup(\bar{A}B\bar{C})\cup(\bar{A}\bar{B}C)$.

**例 7**　证明：$A\cup B-B=A-AB=A\bar{B}=A-B$.

**证**　由定义 $A-B=A\bar{B}$，可得

$$A\cup B-B=(A\cup B)\bar{B}=A\bar{B}\cup\varnothing=A\bar{B}=A-B,$$

则

$$A-AB=A\Omega-AB=A(\Omega-B)=A\bar{B}.$$

**例 8(2009 年考研题)**　设事件 $A=\{$甲种产品畅销且乙种产品滞销$\}$，则 $A$ 的对立事件为(　　).

A. 甲种产品滞销，乙种产品畅销　　B. 甲种产品滞销

C. 甲乙两种产品均畅销　　D. 甲种产品滞销或者乙种产品畅销

**解**　选 D. 记 $B$ 为甲畅销，记 $C$ 为乙畅销，则 $A=B\bar{C}$，$\bar{A}=\bar{B}\cup C$，即甲产品滞销或者乙产品畅销.

### 六、概率的定义及其性质

1. 概率的定义

对于一个随机事件 $A$，在一次随机试验中，它是否会发生，事先并不能确定. 但希望知道随机事件 $A$ 在一次试验里面发生的可能性有多大. 比如抛掷一枚硬币，不仅希望知道正面发生的可能性有多大，反面发生的可能性有多大；还希望找到一个合适的数来表征随机事件在一次试验中发生的可能性的大小. 随机事件在一次试验中发生的可能性的大小，即所谓的随机事件的概率问题.

通常有下列三种形式的概率的定义：

(1) 直观定义

在一次试验中，随机事件发生的可能性的大小，称为随机事件的概率.

(2) 概率的统计定义

在 $n$ 次重复试验中，事件 $A$ 出现的次数，记作 $n(A)$，则称 $f_n(A)=\dfrac{n(A)}{n}$ 为事件 $A$ 出现的频率. 当试验重复次数 $n$ 增加时，频率 $f_n(A)$ 在某一常数 $p$ 附近摆动，$n$ 越大，振动摆幅越小，将频率的这个稳定值 $p$ 称为事件 $A$ 的概率，记作 $P(A)=p$.

在实际中，不可能将一试验无限地进行下去，然后求得事件的频率，用以表征事件发生的可能性的大小，因此用此定义求某一事件的概率十分困难，且在理论上不够严密. 那么如何给出适用于一切随机现象的概率的定义呢？1933 年，苏联数学家柯尔莫格罗夫首次提出了概率的公理化定义. 这一公理化体系迅速得到了举世公认，是概率论发展史上的一个里程碑.

(3) 概率的公理化定义

**定义 1.1**　若 $\Omega$ 是一个样本空间，$A$ 是其中的一个事件，与 $A$ 对应的一个实数 $P(A)$ 若满足：

① $P(A)\geqslant 0$；

② $P(\Omega)=1$；

③ 若 $A_1$，$A_2$，…互不相容，即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j,\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots)$，就有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$$

成立，

则称 $P(A)$ 为事件 $A$ 的概率.

2. 概率的基本性质

**定理 1.1**　设 $P(A)$ 表示 $A$ 的概率，则

(1) $P(\varnothing)=0$；

(2) 若事件 $A_1$，$A_2$，…，$A_n$ 互不相容，即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j,\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

成立；

(3) 对任意两个事件 $A$ 和 $B$，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB);$$

(4) 对两个事件 $A$ 和 $B$，若 $A\supset B$，则有 $P(A-B)=P(A)-P(B)$，且 $P(A)\geqslant P(B)$；

(5) 对任意的事件 $A$，$P(\bar{A})=1-P(A)$；

(6)（一般加法公式） 对任意 $n$ 个事件 $A_1$，$A_2$，…，$A_n$，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

**证** (1) 因 $\varnothing=\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$，根据概率的公理化定义

$$P(\varnothing)=P(\varnothing)\cup P(\varnothing)\cup\cdots,$$

又 $P(A)\geqslant 0$，即可推出 $P(\varnothing)=0$.

(2) 因 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup\varnothing\cup\cdots$，$P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup\varnothing\cup\cdots)$，由概率的公理化定义和 $P(\varnothing)=0$ 得

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

(3) 因 $A\cup B=A\cup B\bar{A}$，又 $A\cap(B\bar{A})=\varnothing$，可得

$$P(A\cup B)=P(A\cup B\bar{A})=P(A)+P(B\bar{A}).$$

又 $B=BA\cup B\bar{A}$，$BA\cap B\bar{A}=\varnothing$，故

$$P(B)=P(BA\cup B\bar{A})=P(B\bar{A})+P(BA),$$

得
$$P(B\bar{A})=P(B)-P(BA),$$

故
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(BA).$$

(4) 因 $A-B=A\bar{B}$，$AB=B$，$P(A)=P(AB)+P(A\bar{B})=P(B)+P(A\bar{B})$，故

$$P(A-B)=P(A\bar{B})=P(A)-P(B).$$

根据概率的公理化定义，$P(A-B)\geqslant 0$，故 $P(A)\geqslant P(B)$.

(5) 因 $\Omega=A\cup\bar{A}$，$A\bar{A}=\varnothing$，$P(\Omega)=P(A)+P(\bar{A})$，故

$$P(\bar{A})=1-P(A).$$

**例 9** 已知 $P(\bar{A})=0.5$，$P(\bar{A}B)=0.2$，$P(B)=0.4$，求(1) $P(AB)$；(2) $P(A-B)$；(3) $P(A\cup B)$；(4) $P(\bar{A}\bar{B})$.

**解**

$$P(AB)=P(B)-P(\bar{A}B)=0.2,$$
$$P(A-B)=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=0.3,$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.7,$$
$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=0.3.$$

## 第二节　古典概型和几何概型

**引言** 用定义去求随机事件的概率是很困难的，为了方便地求出各类不同事件的概率，需要对随机试验分类，最常见、最简单的随机试验的类型为古典概型，其次为几何概型.

### 一、古典概型

**定义 1.2** 将满足以下两个条件的概率模型称为古典概型：

(1) 随机试验的样本空间只含有有限个样本点;

(2) 每一个样本点发生的可能性相同.

**定理 1.2** 在古典概型中,设样本空间 $\Omega$ 中有 $n$ 个样本点,$A$ 是 $\Omega$ 中的事件,$A$ 中有 $k$ 个样本点,则事件 $A$ 发生的概率为 $P(A)=\frac{k}{n}$.

**证** 因 $\Omega=\omega_1\cup\omega_2\cup\cdots\cup\omega_n$,样本点之间是两两互斥的,又根据古典概型的定义,每个样本点发生是等可能的,故

$$P(\Omega)=P(\omega_1)+P(\omega_2)+\cdots+P(\omega_n),\ 1=nP(\omega_i)\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\ P(\omega_i)=\frac{1}{n}.$$

记 $A=\{\omega_{(1)},\ \omega_{(2)},\ \cdots,\ \omega_{(k)}\}$,则

$$P(A)=P(\omega_{(1)})+P(\omega_{(2)})+\cdots+P(\omega_{(k)})=\frac{k}{n}.$$

## 二、有关计数的问题

1. 基本计数原理

(1) 加法原理

设完成一件事有 $m$ 种方法,其中第 $i$ 种有 $n_i$ 种方法,则完成这件事的方法总数为 $\sum_{i=1}^{m} n_i$.

(2) 乘法原理

设完成一件事有 $m$ 个步骤,其中第 $i$ 步有 $n_i$ 种方法,必须经过 $m$ 个步骤的每一个步骤才能完成这件事,则完成该事件的方法总数为 $\prod_{i=1}^{m} n_i$.

2. 排列组合方法

(1) 排列公式

从 $n$ 个不同元素中任取 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 个元素的排列总数为

$$\mathrm{P}_n^k=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

$k=n$ 时,称为全排列.

(2) 组合公式

从 $n$ 个不同元素中任取 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 个元素的组合总数为

$$\mathrm{C}_n^k=\frac{\mathrm{P}_n^k}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!\ k!}.$$

关系:$\mathrm{P}_n^k=\mathrm{C}_n^k k!$.

常见的古典概率问题有:

① 摸球、抽奖问题;

② 质点入格问题;

③ 数字问题.

**例 1** 设某超市有奖销售,投放 $n$ 张奖券,只有一张有奖,每位顾客只能抽一张奖券,求第 $k$ 位顾客中奖的概率.

**解**　以实际经验，抽奖是不放回地抽取，设 $A$ 事件为第 $k$ 位顾客中奖，则意味着前面的 $k-1$ 位顾客都没有中奖，这种情况有 $(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$ 种，而抽奖所有的情况为 $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$ 种情况，故

$$P(A)=\frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}=\frac{1}{n}.$$

**例 2**　某单位新录用了 15 名工作人员，其中有 3 名女士，将他们随机地平均分到 3 个科室．问：

(1) 每一科室恰好分到一名女士的概率是多少？

(2) 3 名女士分到同一科室的概率是多少？

**解**　样本空间的样本点总数为 $C_{15}^5C_{10}^5C_5^5=\frac{15!}{(5!)^3}$，设 $A$ 表示"每一个科室恰好分到一名女士"，$B$ 表示"3 名女士分到同一科室"，将 3 名女士平均分配的分法为 $P_3^3=3!$，其余 12 名人员的分法为$\frac{12!}{(4!)^3}$，则事件 $A$ 发生的概率为

$$P(A)=\frac{3!\ 12!\ \div(4!)^3}{15!\ \div(5!)^3}=\frac{25}{91}.$$

将 3 名女士分到一个科室的情况共有 $C_3^1=3$ 种，其余 12 名人员的分配方法共有

$$C_{12}^2C_{10}^5C_5^5=\frac{12!}{10!\ 2!}\cdot\frac{10!}{5!\ 5!}\text{种},$$

故事件 $B$ 发生的概率为

$$P(B)=\frac{12!\div(2!\ 5!\ 5!)}{15!\ \div(5!)^3}=\frac{6}{91}.$$

**例 3**　将 3 个球随机地放在 4 个杯子中，求杯中球的最多个数分别为 1，2，3 的概率.

**解**　设 $A$ 表示"杯中球最多个数为 1"，$B$ 表示"杯中球最多个数为 2"，$C$ 表示"杯中球最多个数为 3"，样本空间所含样本点的个数为 $4^3$，事件 $A$ 所含的样本点个数为 $P_4^3$，故事件 $A$ 发生的概率 $P(A)=\frac{P_4^3}{4^3}=\frac{3}{8}$；事件 $B$ 所含样本点的个数为 $C_3^2C_4^1C_3^1=36$ 种，事件 $B$ 发生的概率为 $P(B)=\frac{36}{4^3}=\frac{9}{16}$；事件 $C$ 所含的样本点的个数为 $C_4^1=4$ 种，故事件 $C$ 发生的概率为 $P(C)=\frac{C_4^1}{4^3}=\frac{1}{16}$.

**例 4**　某班有 10 名学生是同一年出生的(这年有 365 天)，试求下列事件的概率：(1) 至少有两人是同一天出的；(2) 至少有一人是 10 月 1 日出生的.

**解**　样本空间的样本点总数为$365^{10}$，没有任何两个人是同一天出生的样本点总数为 $P_{365}^{10}$，设 $A$ 表示"至少有两人是同一天出生的"，则 $P(A)=1-\frac{P_{365}^{10}}{365^{10}}$，没有一个人在 10 月 1 日出生的样本点为$364^{10}$，设 $B$ 表示"至少有一人是 10 月 1 日出生的"，则 $P(B)=1-\frac{364^{10}}{365^{10}}$.

**例 5(1992 年考研题)**　将 C，C，E，E，I，N，S 等 7 个字母排成一行，那么排成单

词 SCIENCE 的概率为________.

**解**　样本空间的样本点总数为 7!，单词 SCIENCE 的排列方法共有 4 种，故排成单词的概率为$\frac{4}{7!}$.

**例 6**　在 0 ~ 9 等 10 个整数中无重复地任意取 4 个数字，试求所取到的 4 个数字组成四位偶数的概率.

**解**　样本空间中的样本点个数为 $P_{10}^4$，所取数字为四位偶数的情况共有 $C_5^1P_9^3-P_1^1P_4^1P_8^2=56\times41$，设 $A=\{$排成的是四位偶数$\}$，则事件 $A$ 发生的概率为

$$P(A)=\frac{41}{90}.$$

### 三、几何概型

古典概型第一条必须满足试验结果是有限的，这限制了它的运用范围，把有限改成无限，保留等可能性，这时的随机试验类型称为几何概型.

**定义 1.3**　将满足如下两个条件的概率模型称为几何概型：

① 随机试验的样本空间有无限个样本点.

② 每一个样本点发生的可能性相同.

**注：**几何概型的样本空间可用直线、平面、空间几何图形表示.

**例 7**　一个人向一固定靶子射击，可能打在靶子的任意位置上(每一个位置是一个样本点)，靶子所在的平面是由无数个点组成的(样本空间)，打在各种位置上是等可能的，因此，打靶问题就是一个几何概型的试验. 问：打入 10 环的概率是多少?

**解**　设 $A$ 为打入 10 环这个事件，则 $A$ 发生的概率为$\frac{S_A}{\Omega}$(其中 $S_A$ 为 10 环的面积，$\Omega$ 为整个靶的面积)，在几何概型问题中，试验的可能结果是某区域 $\Omega$ 中的点，这个区域可以是一维的，也可以是二维的，还可以是三维的，甚至可以是 $n$ 维的，这时的可能结果全体或者是所关心的结果均是无限的.

几何概型的等可能性是通过下列方式给出其确切含义的：点落在某区域 $\Omega$ 中任意区域 $A$ 的可能性大小与区域 $A$ 的度量(长度、面积和体积)成正比，而与点的位置及形状是无关的，即 $P(A)=\frac{A\text{的度量}}{\Omega\text{的度量}}$.

**例 8(会面问题)**　两人相约 7:00—8:00 在某地会面，先到者可等候另一人 20min，过时就可离去，试求这两人能会面的概率.

**解**　记 7:00 为计算时刻的 0 时，以分钟为单位，并设 $x$ 及 $y$ 分别表示甲、乙两人到达会面地点的时刻，则样本空间为 $\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant60,\ 0\leqslant y\leqslant60\}$，以 $A$ 表示“两人会面”，由图 1.2 分析知 $A=\{(x,y)\mid (x,y)\in\Omega,\ |x-y|\leqslant20\}$，故 $A$ 发生的概率为

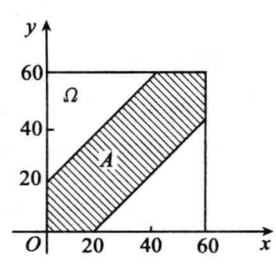



图 1.2