

电能 变换器及其 无源 控制

王久和 著



科学出版社

电能变换器及其无源控制

王久和 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书系统地论述了无源控制理论在电能变换器控制中的应用。

本书分为5章,第1章介绍了本书所需的主要数学预备知识、系统的耗散性和无源性、欧拉-拉格朗日系统及哈密顿系统;第2章论述了两电平电压型PWM整流器的工作原理、数学模型及其无源控制,电网不平衡时整流器无源控制策略,混合无源控制策略;第3章论述了三相三电平NPC电压型PWM整流器、Vienna型整流器的工作原理、数学模型及其无源控制;第4章论述了Buck型、Boost型、Buck-Boost型、Cuk型变换器,三态DC/DC变换器的工作原理、数学模型及其无源控制;第5章论述了两电平和三电平电压型PWM并网逆变器的工作原理、数学模型及其无源控制。

本书可供高等院校电子、自动化及相关专业的研究生、教师参考,亦可供从事电力电子及电力传动、非线性控制理论应用的科研和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

电能变换器及其无源控制/王久和著. —北京:科学出版社,2014.1

ISBN 978-7-03-031711-7

I. 电… II. 王… III. 变换器-自动控制-研究 IV. TN712

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第275746号

责任编辑:孙力维 杨 凯 / 责任制作:魏 谨

责任印制:赵德静 / 封面设计:王仁兰

北京东方科龙图文有限公司 制作

<http://www.okbook.com.cn>

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

骏立印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

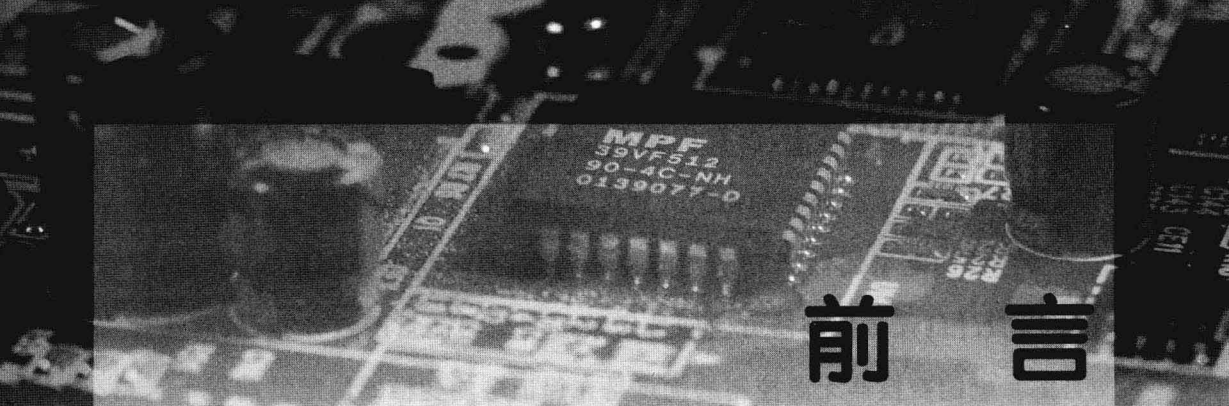
2014年1月第一版 开本:720×1000 1/16

2014年1月第一次印刷 印张:14 1/2

字数:280 000

定 价:38.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)



前言

电能变换器(整流器、DC/DC 变换器及逆变器)在工业中的应用越来越广泛,尤其是在新能源领域中的应用。随着现代工业的进步,对电能变换器的性能提出了更高的要求。决定电能变换器性能的因素包括:开关器件、拓扑结构、PWM 调制及控制策略。开关器件及拓扑结构属于电能变换器硬件范畴,PWM 调制及控制策略属于软件范畴。因此,在开关器件及拓扑结构一定的情况下,PWM 调制策略决定了电能变换器的波形质量及工作效率,控制策略则决定了电能变换器的稳态与动态性能。

从运行角度看,工业上更注意电能变换器的稳态与动态性能指标。因此,研究电能变换器控制策略是提高电能变换器性能指标的重要途径。

电能变换器控制策略传统上采用基于线性模型的 PI 控制器,控制结构为多环级联结构。由于 PI 控制器难于保证电能变换器具有优秀的动态性能以及大范围工作的稳定性,为此,针对电能变换器的非线性特点,国内外学者采用非线性控制理论研究电能变换器的控制问题,期待提高电能变换器的性能,如反馈线性化理论、滑模变结构理论、自抗扰控制技术、无源控制理论等。反馈线性化控制策略需要全状态可测量、精确抵消动态、引入控制器奇异性,对参数的依赖性大、控制律复杂;滑模变结构控制策略存在抖振问题,需解决好到达滑动模态之前的趋近率;自抗扰控制策略需要一组满意的非线性函数及相应的参数,计算量大,导致控制周期变长,实时性差。上述非线性控制策略都是从不同角

度提高电能变换器的性能,没有从根本上解决电能变换器的控制问题。对此,Ortega 等学者将无源控制理论引入到电力电子技术装置控制中。无源控制理论是从系统的能量属性研究系统的控制问题,寻求与被控制量相关的能量函数,据此设计的无源控制器可使能量函数按期望的能量函数分布,从而达到控制目的。电能变换器无源控制的优点是在保证电能变换器稳定的前提下,研究电能变换器的控制性能。利用无源控制理论设计的系统控制器可实现系统的全局稳定性,无奇异点问题,对系统参数变化及外来摄动有较强的鲁棒性,是一种本质上的非线性控制方法。因此,无源控制理论在电能变换器控制中的应用日益得到国内外专家学者的关注。

由于电能变换器数学模型可表示成仿射非线性、欧拉-拉格朗日及哈密顿方程的形式,结合上述方程和电能变换器的无源性进行系统无源控制器设计,已成为提高电能变换器的稳态与动态性能指标的有效途径。为了促进无源控制理论在电能变换器控制的应用,作者根据对无源控制理论的理解,以及对其在电能变换器控制中应用的研究,结合国内外专家学者的研究与应用成果,尝试编写了此书。希望此书能够抛砖引玉,提升国内广大学者对无源控制理论在电能变换器控制中应用的兴趣;同时,对学习无源控制理论应用的初学者也能有所裨益。

本书分为 5 章,第 1 章介绍了本书所需的主要数学预备知识、系统的耗散性和无源性、欧拉-拉格朗日系统及哈密顿系统;第 2 章论述了两电平电压型 PWM 整流器的工作原理、数学模型及其无源控制,电网不平衡时整流器无源控制策略,混合无源控制策略;第 3 章论述了三相三电平 NPC 电压型 PWM 整流器、Vienna 型整流器的工作原理、数学模型及其无源控制;第 4 章论述了 Buck 型、Boost 型、Buck-Boost 型、Cuk 型变换器,三态 DC/DC 变换器的工作原理、数学模型及其无源控制;第 5 章论述了两电平和三电平电压型 PWM 并网逆变器的工作原理、数学模型及其无源控制。

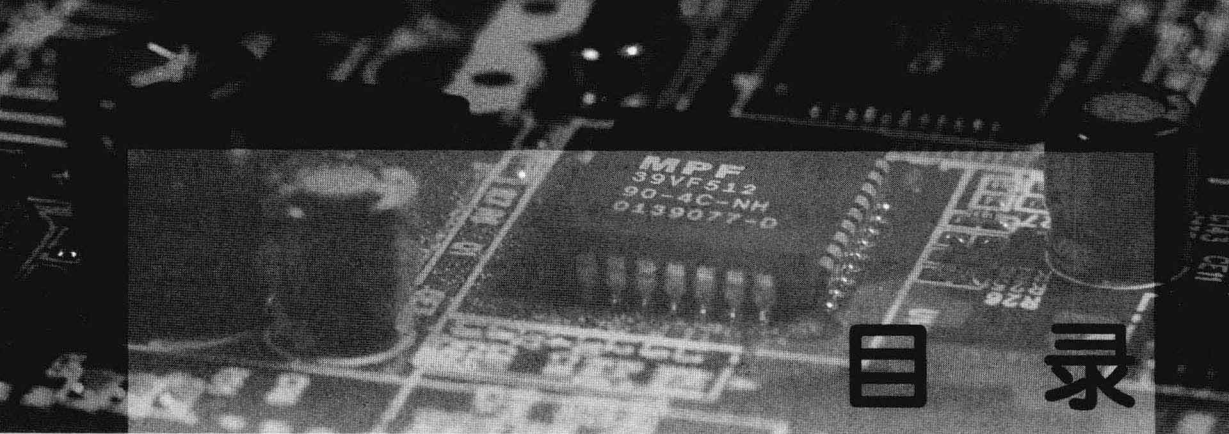
本书在编写过程中,清华大学李永东教授、浙江大学徐德鸿教授提出许多有益的建议,使本书的内容编写和选取更加合理,保证了本书的质量和科学性。本书的出版得到了国家自然科学基金项目(51077005)和北京市高校创新能力提升计划项目(PXM2013-014224-000095)的支持。

本书除选用作者近几年关于无源控制理论在电能变换器控制中应用的研究成果外,还选用了部分国内外学者关于无源控制理论在电能变换器控制中应用的研究成果,在此表示衷心的感谢。

由于本人的写作能力和学术水平有限,书中不妥之处在所难免,敬请读者给予批评指正。

王久和

2013年8月于北京



目录

Chapter 1 无源控制理论简介

1.1 数学预备知识	2
1.1.1 稳定性理论	2
1.1.2 微分几何	5
1.2 无源控制理论	10
1.2.1 系统的耗散性和无源性	10
1.2.2 欧拉-拉格朗日系统	12
1.2.3 哈密顿系统	16

Chapter 2 两电平电压型 PWM 整流器及其无源控制

2.1 三相三线两电平电压型 PWM 整流器工作原理	24
2.1.1 电压型 PWM 整流器主电路及电压电流矢量关系	24
2.1.2 电压型 PWM 整流器开关工作状态	26
2.1.3 整流器的整流与逆变换流过程	27
2.1.4 电压型 PWM 整流器空间矢量算法	32
2.2 三相三线两电平电压型 PWM 整流器基本数学模型	40
2.2.1 三相三线两电平 PWM 整流器在三相静止 abc 坐标系下的 数学模型	40
2.2.2 两电平电压型 PWM 整流器在两相静止 $\alpha\beta$ 坐标系下的	

数学模型	42
2.2.3 两电平电压型 PWM 整流器在两相同步旋转 dq 坐标系下的 数学模型	43
2.3 基于 EL 模型的三相三线两电平电压型 PWM 整流器 无源控制	45
2.3.1 三相三线两电平电压型 PWM 整流器的 EL 模型	45
2.3.2 基于 EL 模型的三相三线电压型 PWM 整流器 无源控制	48
2.3.3 基于 EL 功率模型的三相三线两电平电压型 PWM 整流器 无源控制	54
2.4 基于 PCHD 模型的三相三线两电平电压型 PWM 整流器 无源控制	57
2.4.1 三相三线两电平电压型 PWM 整流器 PCHD 数学模型 ...	57
2.4.2 基于 PCHD 模型的三相三线两电平电压型 PWM 整流器 无源控制	58
2.5 三相四线两电平电压型 PWM 整流器无源控制	63
2.5.1 三相四线两电平电压型 PWM 整流器基本数学模型	63
2.5.2 基于 EL 模型的三相四线两电平电压型 PWM 整流器 无源控制	66
2.5.3 基于 PCHD 模型的三相四线两电平电压型 PWM 整流器 无源控制	72
2.6 电网不平衡时三相三线两电平电压型 PWM 整流器 无源控制	77
2.6.1 电网不平衡时三相三线两电平电压型 PWM 整流器无源 控制思想	77
2.6.2 电网不平衡时三相三线两电平电压型 PWM 整流器无源 控制策略	78
2.7 无源控制为主的三相两电平电压型 PWM 整流器混合控制 ...	84
2.7.1 无源控制为主 PI 控制为辅的混合控制	84
2.7.2 无源控制为主自抗扰控制为辅的混合控制	85
2.7.3 无源控制为主滑模变结构控制为辅的混合控制	88

Chapter 3 三电平电压型 PWM 整流器及其无源控制

3.1 三相三线三电平电压型 PWM 整流器及其无源控制	92
3.1.1 三相三线三电平电压型 PWM 整流器工作原理	92
3.1.2 三相三线三电平电压型 PWM 整流器 SVPWM 算法	93
3.1.3 三相三线三电平电压型 PWM 整流器数学模型	101
3.1.4 三相三线三电平电压型 PWM 整流器无源控制	107
3.2 三相四线三电平电压型 PWM 整流器及其无源控制	117
3.2.1 三相四线三电平电压型 PWM 整流器工作原理	117
3.2.2 三相四线三电平电压型 PWM 整流器数学模型	118
3.3 Vienna 型整流器及其无源控制	124
3.3.1 Vienna 型整流器的拓扑结构及工作原理	124
3.3.2 Vienna 型整流器的 SVPWM 算法	129
3.3.3 Vienna 型整流器的数学模型	141
3.3.4 Vienna 型整流器无源控制	147

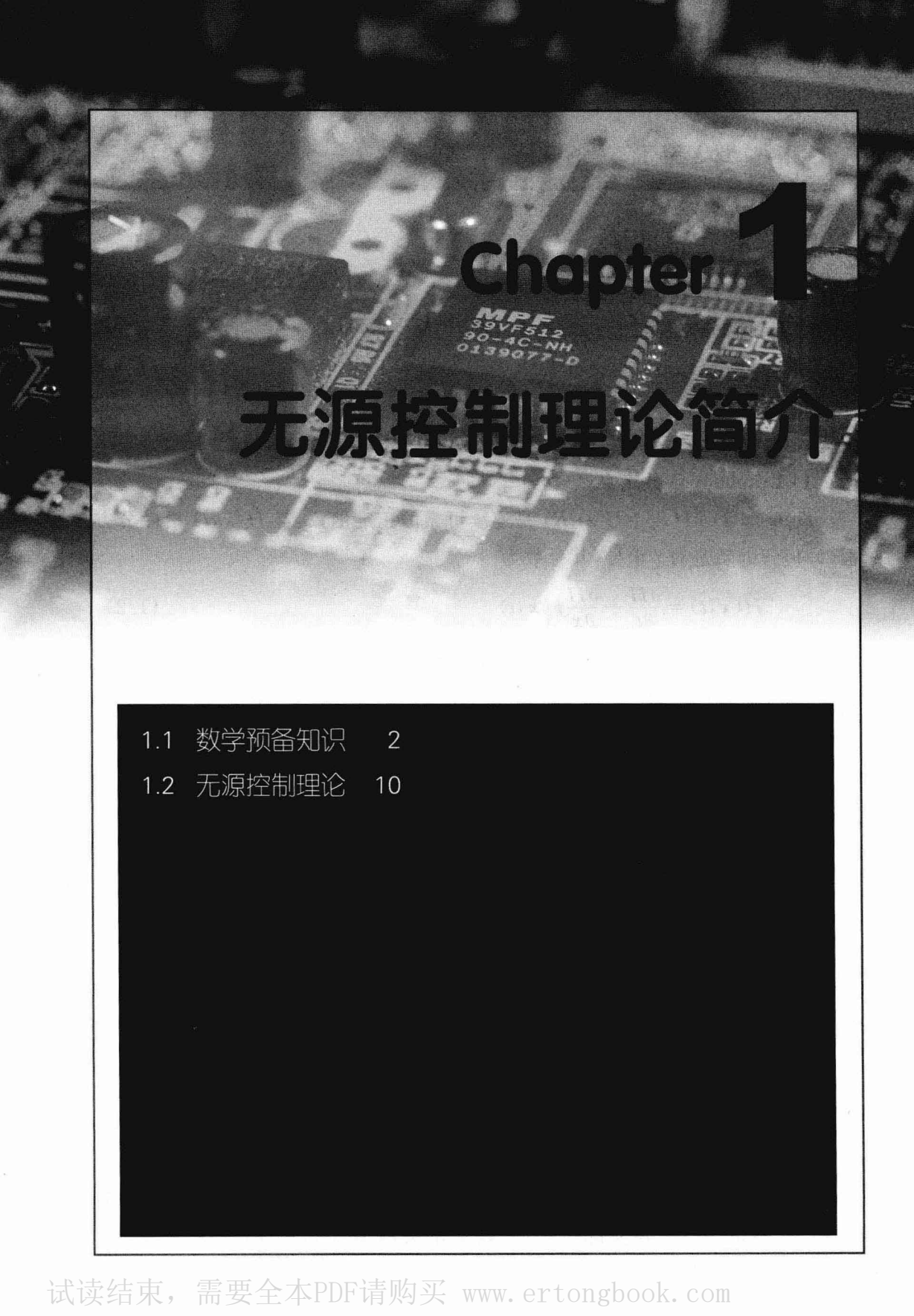
Chapter 4 DC/DC 变换器及其无源控制

4.1 Buck 型 DC/DC 变换器及其无源控制	156
4.1.1 基于反馈无源化的 Buck 型 DC/DC 变换器 无源控制	156
4.1.2 基于 EL 方程的 Buck 型 DC/DC 变换器无源控制	160
4.2 Boost 型 DC/DC 变换器及其无源控制	162
4.2.1 Boost 型 DC/DC 变换器的工作原理	162
4.2.2 基于 PCHD 模型的 Boost 型 DC/DC 变换器 无源控制	163
4.2.3 基于 EL 模型的 Boost 型 DC/DC 变换器 无源控制	166
4.3 Buck-Boost 型 DC/DC 变换器及其无源控制	169
4.3.1 Buck-Boost 型 DC/DC 变换器的工作原理	169
4.3.2 基于 EL 模型的 Buck-Boost 型 DC/DC 变换器	

无源控制	171
4.3.3 基于 PCHD 模型的 Buck-Boost 型 DC/DC 变换器	
无源控制	174
4.4 Cuk 型 DC/DC 变换器及其无源控制	177
4.4.1 Cuk 型 DC/DC 变换器的工作原理	177
4.4.2 基于 EL 模型的 Cuk 型 DC/DC 变换器无源控制	178
4.4.3 基于 PCHD 模型的 Cuk 型 DC/DC 变换器	
无源控制	184
4.5 三态 DC/DC 变换器及其无源控制	186
4.5.1 三态 DC/DC 变换器拓扑结构及工作原理	187
4.5.2 三态 DC/DC 变换器数学模型	189
4.5.3 三态 DC/DC 变换器无源控制	190

Chapter 5 并网逆变器及其无源控制

5.1 三相三线两电平电压型 PWM 并网逆变器及其	
无源控制	194
5.1.1 两电平电压型 PWM 并网逆变器拓扑结构	194
5.1.2 两电平电压型 PWM 并网逆变器数学模型	195
5.1.3 基于 EL 模型的两电平电压型 PWM 并网逆变器	
无源控制	196
5.1.4 基于 PCHD 模型的两电平电压型 PWM 并网逆变器	
无源控制	204
5.2 三相三线三电平电压型 PWM 并网逆变器及其	
无源控制	208
5.2.1 三相三线三电平电压型 PWM 并网逆变器拓扑结构	208
5.2.2 三相三线三电平电压型 PWM 并网逆变器数学模型	209
5.2.3 三相三线三电平电压型 PWM 并网逆变器无源控制	213
参考文献	217



Chapter 1

无源控制理论简介

- 1.1 数学预备知识 2
- 1.2 无源控制理论 10



数学预备知识

1.1.1 稳定性理论

1. 基于 Lyapunov 稳定性的理论

研究由微分方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (1.1)$$

描述的非线性系统。

式(1.1)中, $\mathbf{x} \in R^n$ 为状态变量; $t \in R$ 为表示时间的参量。

1) Lyapunov 函数定义

设 $H(\mathbf{x}, t)$ ($H: U \times J \rightarrow R$) 是连续可微的正定函数, 若 $H(\mathbf{x}, t)$ 沿微分方程(1.1)解的轨迹对 t 求导, 其导数为

$$\dot{H}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (1.2)$$

半负定且连续, 则称 $H(\mathbf{x}, t)$ 是方程(1.1)关于平衡点 $\mathbf{x}_0 = 0$ 的 Lyapunov 函数,

其中 $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1} \quad \frac{\partial H}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial H}{\partial x_n} \right)$ 。

2) Lyapunov 稳定定理

(1) Lyapunov 稳定定理

对于系统(1.1), 若存在 Lyapunov 函数 $H(\mathbf{x}, t): U \times J \rightarrow R$, 则 $\mathbf{x}_0 = 0$ 是该系统稳定的平衡点。

(2) Lyapunov 渐近稳定定理

对于给定的正数 r , 令 $U = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in R^n, \|\mathbf{x}\| \leq r\}$, 并记 $J = [0, \infty)$ 。对于系统(1.1), 若存在 Lyapunov 函数 $H(\mathbf{x}, t): U \times J \rightarrow R$ 和负定函数 $W(\mathbf{x}): U \rightarrow R$, 使得沿系统(1.1)的任意解的轨迹为

$$\dot{H}(\mathbf{x}, t) \leq W(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall t \geq t_0 \quad \mathbf{x} \in U - \{0\} \quad (1.3)$$

且 $H(\mathbf{x}, t)$ 具有定常正定解, 则 $\mathbf{x}_0 = 0$ 是该系统渐近稳定的平衡点。

2. LaSalle 不变集定理

为判断系统的渐近稳定性, 必须验证 Lyapunov 函数 $H(\mathbf{x}, t)$ 沿系统状态轨迹的严格负定性。在实际系统中, 构造出来的 Lyapunov 函数往往只满足

$\dot{H}(x, t) \leq 0$ 。对此, 可用 LaSalle 不变集定理研究系统的渐近稳定性。下面只给出一些结论, 有关证明可以参看文献[1]。

1) 不变集定义

LaSalle 不变集定理主要依据适当的 Lyapunov 函数刻画系统运动的极限集位置, 从而利用极限集的不变性考察系统运动的渐近特性。

考察非线性系统

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.4)$$

式中, $f: U \rightarrow R^n$ 为连续矢量函数且满足局部 Lipschitz 条件(若存在常数 K , 使得对定义域 D 的任意两个不同的实数 x_1, x_2 均有: $\|f(x_1) - f(x_2)\| < K \|x_1 - x_2\|$ 成立, 则称 $f(x)$ 在 D 上满足 Lipschitz 条件), U 为 R^n 中含原点的一个区域, $f(0) = 0$ 。

定义 1.1 设系统(1.4)的解是 $x(t)$, 若存在时间序列 $\{t_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) = p$, 则 p 是 $x(t)$ 的一个正向极限点。

定义 1.2 设 $M \subset R^n$, 若对任意初始条件 $x(0) = x_0 \in M$, 系统(1.4)的解 $x(t) = \varphi(t, x_0)$ 满足

$$x(t) \in M \quad \forall t \geq 0 \quad (1.5)$$

则称 M 是关于系统(1.4)的正向不变集。

显然, 对于系统(1.4), 平衡点 $x = 0$ 是一个不变集。对于一般的系统, 不变集可以包含一个或几个平衡点, 也可以是状态空间的一个子集合。

定义 1.3 若对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $T > 0$ 使得

$$\inf_{p \in M} \|p - x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t > T \quad (1.6)$$

则称 $x(t)$ 随时间 t 趋向于集合 M , 记作: $x(t) \rightarrow M$ 。

设系统(1.4)的解 $x(t)$ 对 $t \geq 0$ 是有界的, 则对任意给定的初始条件 $x_0 = x(0)$, 存在时间序列 $t_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) = x'_0 \quad (1.7)$$

即存在正向极限点 x'_0 与之对应。

令 L^+ 表示系统(1.4)所有正向极限点组成的集合(称为正向极限集), 可以证明 L^+ 是有界闭集。

若系统(1.4)的解 $x(t)$ 对 $t \geq 0$ 是有界的, 那么正向极限集 L^+ 是系统(1.4)的正向不变集^[1], 且

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow L^+ \quad (1.8)$$

2) LaSalle 不变集定理

定理 1.1 设 $\Omega \subset U$ 是系统(1.4)的有界正向不变集。若存在定义在 U 上的连续可微函数 $H(\mathbf{x}): U \rightarrow R$, 满足

$$\dot{H}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.9)$$

那么, 该系统对于任意初始状态 $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ 的解 $\mathbf{x}(t)$ 随时间 t 趋向于 M , 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \mathbf{x}_0) \in M \quad (1.10)$$

式中, M 是集合 $E = \{\mathbf{x} \mid \dot{H}(\mathbf{x}) = 0\}$ 所包含的最大不变集。

LaSalle 不变集定理的几何解释如图 1.1 所示。由 $H(\mathbf{x})$ 的单调性容易理解 $\mathbf{x}(t)$ 将趋近于 $\dot{H}(\mathbf{x}) = 0$ 的集合 E 。该定理的意义就在于能够得出 $\mathbf{x}(t)$ 不仅趋近于 E , 而且最终会进入 E , 并进一步趋近于不变集 M (准确地讲, 趋近于 L^+)。因此, 如果能够判断系统在 E 中的不变集只包含原点, 那么, 即使无法验证 $\dot{H}(\mathbf{x})$ 的严格负定性, 也同样能够得出平衡点 $\mathbf{x} = 0$ 是渐近稳定的结论。

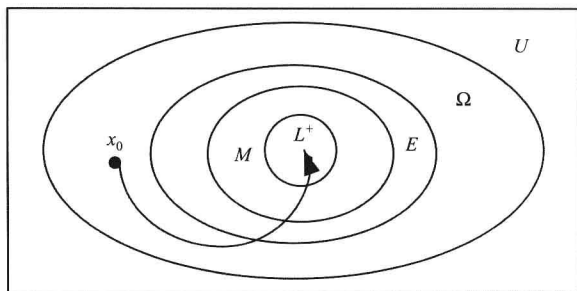


图 1.1 LaSalle 不变集定理

考察时变非线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (1.11)$$

式中, $\mathbf{f}: U \times [0, \infty) \rightarrow R(U \subset R^n)$ 是关于 t 的连续矢量函数, 且对 $\mathbf{x}(t)$ 满足局部 Lipschitz 条件, $\mathbf{f}(0, t) = 0$ 。

定理 1.2 对于时变系统(1.11), 若存在连续可微的函数 $H: U \times R^+ \rightarrow R^+$ 满足

$$\begin{cases} \gamma_1(\|\mathbf{x}\|) \leq H(\mathbf{x}, t) \leq \gamma_2(\|\mathbf{x}\|) \\ \dot{H}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial H(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial H(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \leq -W(\mathbf{x}) \end{cases} \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in U \times R^+ \quad (1.12)$$

式中, $\gamma_1(\|x\|)$ 和 $\gamma_2(\|x\|)$ 是单调增加且 $\gamma(0)=0$ 、 $\lim_{a \rightarrow \infty} \gamma(a) = \infty$ 的函数, $W(x)$ 是半正定连续函数。

则系统(1.11)的解 $x(t)$ 有界且满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(x(t)) = 0 \quad (1.13)$$

若 $W(x)$ 是正定函数, 则系统(1.11)的平衡点 $x_0 = 0$ 是渐近稳定的。

1.1.2 微分几何^[2~4]

1. 非线性坐标变换与微分同胚

非线性坐标变换可表示为

$$z = \Phi(x) \quad (1.14)$$

式中, z 是与 x 同维的矢量, $\Phi(x)$ 为非线性函数矢量。

式(1.14)的逆变换为

$$x = \Phi^{-1}(z) \quad (1.15)$$

存在非线性坐标变换 $\Phi(x)$ 必须满足以下条件:

- ① 单值性, 即 $\Phi(x)$ 与 $\Phi^{-1}(z)$ 是一一对应的, 亦为可逆(invertible)条件;
- ② 可微性, 即 $\Phi(x)$ 与 $\Phi^{-1}(z)$ 皆为光滑函数, 它们的任意阶偏导数都是存在的, 亦为可微条件。

如果上述两个条件都满足, 则 $z = \Phi(x)$ 就是一个合格的坐标变换。同时, 该坐标变换表达式 $\Phi(x)$ 被称为两个坐标空间的一个微分同胚(diffeomorphism)。

判断非线性变换 $z = \Phi(x)$ 在 x_0 的邻域是不是局部微分同胚, 用下列命题进行判断。

设 $z = \Phi(x)$ 是定义在 R^n 空间的某一子集 U 中的光滑函数, 如果在 $x = x_0$ 点处的雅可比矩阵 $\left. \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \right|_{x=x_0}$ 是非奇异的(nonsingular), 则在包括 x_0 点在内的 U 的一个开子集 U^0 中, $\Phi(x)$ 是一个局部微分同胚。

2. 李导数

设开集 $U \subset R^n$, $x \in U$, 在 U 上给出一个光滑的标量函数为 $h(x) = h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和一个矢量场

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

根据 $h(\mathbf{x})$ 和 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 定义一个新的标量函数, 记作 $L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})$:

$$L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) = \left\langle \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right\rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}) \quad (1.16)$$

式中, $\frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right)$ 。

上述定义的标量函数 $L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})$ 表示函数 $h(\mathbf{x})$ 沿矢量场 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 的导数, 称为李导数(Lie derivative)。

由于李导数 $L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})$ 是一个标量函数, 可再次沿矢量场 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 求李导数, 以此类推直至 k 阶李导数, 即

$$\begin{cases} L_{\mathbf{f}}(L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})) = L_{\mathbf{f}}^2 h(\mathbf{x}) = \frac{\partial(L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_{\mathbf{f}}^k h(\mathbf{x}) = \frac{\partial(L_{\mathbf{f}}^{k-1} h(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (1.17)$$

李导数 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 可以沿着另一个矢量场 $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ 求李导数, 即

$$L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) = \frac{\partial(L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (1.18)$$

k 阶李导数 $L_{\mathbf{f}}^k h(\mathbf{x})$ 也可沿着另一个矢量场 $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ 求李导数, 即

$$L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^k h(\mathbf{x}) = \frac{\partial(L_{\mathbf{f}}^k h(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (1.19)$$

3. 李括号

设有两个同维空间的矢量场 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}$ 和 $\mathbf{g}(\mathbf{x}) =$

$$\begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix},$$
 定义一个新的矢量场, 记作 $[f(x), g(x)]$ (简写为 $[f, g]$ 或 $ad_f g$)。

$$[f, g] = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

将上式简写成下列形式

$$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g \quad (1.21)$$

式中, $\frac{\partial g(x)}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ 是对应矢量场的雅可比矩阵。

上述新定义的矢量场 $[f, g]$, 表示矢量场 $g(x)$ 沿着矢量场 $f(x)$ 方向的导数(变化率), 称此导数为李括号(Lie brackets)。

由于 $[f, g]$ 是一个新的矢量场, 可再次沿着矢量场 $f(x)$ 方向求李括号运算, 以此类推, 直至 k 阶李括号, 即

$$\begin{cases} ad_1^2 g = [f, [f, g]] \\ \vdots \\ ad_1^k g = [f, ad_1^{k-1} g] \end{cases} \quad (1.22)$$

4. 矢量场集合的对合性

如果有 k 个 n 维矢量场

$$g_1(x) = \begin{pmatrix} g_{11}(x) \\ g_{12}(x) \\ \vdots \\ g_{1n}(x) \end{pmatrix}, g_2(x) = \begin{pmatrix} g_{21}(x) \\ g_{22}(x) \\ \vdots \\ g_{2n}(x) \end{pmatrix}, \dots, g_k(x) = \begin{pmatrix} g_{k1}(x) \\ g_{k2}(x) \\ \vdots \\ g_{kn}(x) \end{pmatrix},$$

若由它们组成的矩阵