机械专业卓越工程师教育培养精品教材系列

有限元方法及其工程案例

陈雪峰　李　兵　曹宏瑞　编著

科学出版社

机械专业卓越工程师教育培养精品教材系列

有限元方法及其工程案例

陈雪峰　李　兵　曹宏瑞　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书主要内容为有限元方法的基本原理和工程实例，讲述了有限元方法入门基础、杆梁有限元单元、平面与三维实体有限元单元、等参数单元、薄板弯曲有限元、有限元多场分析等经典有限元内容；同时为了拓展思路，介绍了新型小波有限元方法；最后利用有限元软件 ANSYS，结合汽车驱动桥、高速主轴、海流发电装备、铁路转辙机等工程结构，说明了有限元分析流程。

本书可作为工科院校机械类本科生和研究生的教材，也可供相关专业工程设计和研究人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

有限元方法及其工程案例 / 陈雪峰，李兵，曹宏瑞编著. —北京：科学出版社，2014.1

机械专业卓越工程师教育培养精品教材系列

ISBN 978-7-03-039490-3

Ⅰ.①有…　Ⅱ.①陈…　②李…　③曹…　Ⅲ.①有限元法-教材
Ⅳ.①O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 314800 号

责任编辑：毛　莹　张丽花 / 责任校对：钟　洋
责任印制：闫　磊 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

安泰印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2014 年 1 月第　一　版　开本：787×1092 1/16
2014 年 1 月第一次印刷　印张：13 1/2
字数：351 000

定价：32.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

有限元方法这一“博大精深”的方法，能否在机械类本科生中开设一直是个值得讨论的话题。西安交通大学在2004年进行的机械类专业模块选修课讨论中，将有限元列为核心选修课程。经过8年连续开设，特别是随着有限元方法重要性日益凸出，以及商业有限元软件的普及应用，学生选课热情很高，学习兴趣也很浓。有限元方法在2010年西安交通大学培养方案修订中进入了机械类专业模块必修课。

面对尚未先修结构力学、弹性力学、计算方法的本科生，如何讲好这门课程，让学生不要望而却步，作者在教学中尽量从材料力学等基本知识入手，深入浅出，让学生抓住有限元方法的本质。

西安交通大学在2010版培养方案讨论中，遵循华盛顿协议，引入工程教育思想，强调CDIO(Conceive Design Implement Operate)教学。因此，要求进行相应的教材建设，本书经过申报获批西安交通大学教材建设支持。为了不让学生对有限元浅尝辄止，在本书编写中，作者结合多年的有限元教学经验和工程实践，撰写了几个典型工程案例，期望在教学中结合工程案例，让学生身临其境、学用结合；同时，结合作者主持的国家杰出青年科学基金等项目，撰写了一章新型有限元方法，让学生开阔思路、学以创新。

撰写一本适合本科生有限元授课的教材，让作者下了很大决心，尽管作者在教学中不断撰写和修改有限元讲稿，但由于有限元方法博大精深，名家挂一漏万，名著新作层出不穷，稍有不慎便是浪费笔墨、白费时间。本书谨算为小结作者多年教学工作，并响应新版培养方案教材建设，沧海一粟，在教学实践中再不断完善，并期望得到同仁之指教。

本书的具体编写分工如下：第1～5章由陈雪峰撰写，第6章由曹宏瑞撰写，第7～8章由李兵撰写，第9章三人共同撰写。郭艳婕在本书撰写、文字与图表编排过程中付出了大量劳动。研究生杨志勃、薛晓峰、陈强、丁宝庆、张欢男、罗新杰、左思佳、路通等在文字编排过程中完成了很多工作，在此表示感谢！

陈雪峰

2013年于古镇阆中

目　　录

第1章　绪　　论

1.1　有限元方法的提出

1.1.1　有限元概念

有限元的基本思想是将结构离散化，用有限个容易分析的单元来表示复杂的对象，单元之间通过有限个节点相互连接，然后根据变形协调条件综合求解。由于单元的数目是有限的，节点的数目也是有限的，所以称为有限元方法[1]（Finite Element Method，FEM）。

有限元思想最早可以追溯到远古时代，在几个世纪前就得到了应用。如用多边形（有限个直线单元）逼近圆来求圆的周长。17 世纪，牛顿（Newton）和莱布尼茨（Leibniz）发明了积分法。在牛顿之后约一百年，著名数学家高斯（Gauss）提出了加权余值法及线性代数方程组的解法。这两项成果中，前者用来将微分方程改写为积分表达式，后者用来求解有限元方法所得出的代数方程组。18 世纪，另一位数学家拉格朗日（Lagrange）提出泛函分析，泛函分析是将偏微分方程改写为积分表达式的另一途径。19 世纪末 20 世纪初，数学家里兹（Riesz）等首先提出可对全定义域运用展开函数来表达定义域上的未知函数。1915 年，数学家伽辽金（Galerkin）提出了选择展开函数中形函数的伽辽金法，该方法后来广泛用于有限元。1943 年，Courant 在论文中取定义在三角形域上分片连续函数，利用最小势能原理研究 Venant 的扭转问题[2]，这实际上就是有限元的做法。

有限元方法的概念是由 Turner 与 Clough 最早提出的[3]，1952 年美国加利福尼亚大学伯克利分校的学者 Clough 应邀参加了波音航空公司夏季开发小组，在波音公司结构振动分析专家 Turner 的带领下开展了三角形机翼结构分析，在运用传统一维梁分析失败后，1953 年 Clough 在 Turner 的建议下，运用直接刚度位移法，成功地给出了用三角单元求得平面应力问题的正确答案[4,5]，所获得的结果于 1956 年公开发表[3]，这篇文章通常被认为是有限元提出的标志。1960 年，Clough 进一步研究了弹性问题的应力分析，并首次使用“有限元（finite element）”这一术语[1]，他选择这一术语主要是为了与虚功原理等经典分析方法在计算结构位移时考虑外力无限小的贡献相区分。

有限元单元能按不同的联结方式进行组合，且单元本身又可以有不同形状，因此可以模型化几何形状复杂的求解域。有限元方法利用在每一个单元内假设的近似函数来分片地表示全求解域上待求的未知场函数。单元内的近似函数由未知场函数在单元各个节点的数值和其插值函数来表达。因此，一个问题的有限元分析中，未知场函数在各个节点上的数值就成为新的未知量，从而使一个连续的无限自由度问题变成离散的有限自由度问题。一经求解出这些未知量，就可以通过插值函数计算出各个单元内场函数的近似值，从而得到整个求解域上的近似解。显然，随着单元数目的增加，即单元尺寸的缩小，或者随着单元自由度的增加及插值函数精度的提高，解的近似程度将不断改进。如果单元是满足收敛要求的，近似解最后将收敛于精确解。

1.1.2　有限元方法

有限元方法大致经历了以下几个发展阶段：1943 年，Courant 提出定义在三角形域上分片连续函数[2]；1960 年，Clough 首次提到有限元的名称[1]；1970 年以后，随着计算机和软件的发展，有限元逐步发展起来，近年来不断得到蓬勃发展。

1. Zienkiewicz 对有限元的贡献

在有限元的发展过程中，Zienkiewicz 是需要提到的一位学者，他是英国威尔士(Wales)大学土木工程学院教授，担任联合国教科文组织工程数值计算委员会主席，他在等参元、板壳元列式、简缩积分、罚函数格式、误差估计、自适应有限元方面作出了卓越贡献，这些贡献主要体现在他的 500 多篇论文与 13 部专著中。1965 年，Zienkiewicz 和香港大学 Cheung 在文中第一次使用极小位能原理系统地实现了有限元方法对边界场问题的求解[6]。但极小位能原理在处理流体力学中的某些问题时遇到了困难，于是虚功原理被引入了。1964 年，Zienkiewicz 和 Cheung 首次使用虚功原理导出有限元方法[7]。1969 年，Oden 首先论述了利用虚功原理求解流体力学中非自伴问题的可能性[8]。1973 年，Taylor 和 Hood 第一次用虚功原理得到了非自伴问题的实用解[9]。从此，流体力学中的非自伴问题就可以用有限元方法求解了。不久，数学家发现虚功原理只是加权余值法的一种特殊形式，因此到 20 世纪 60 年代末，加权余值法也用来导出有限元方法。Zienkiewicz 的有限元专著从最早(1967 年)与 Cheung 合著的《结构力学中的有限元方法》[10]，到最近(2008 年)与美国加利福尼亚大学伯克利分校 Taylor 合著的《有限元方法基础理论(第 5 版)》[11]，被译为包括中文在内的多种语言，这些专著以及他 1968 年创办的杂志 *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 有力地推动了有限元在工程计算中的应用，为此，Zienkiewicz 获得了包括美国机械工程学会颁发的 Timoshenko 勋章在内的多项荣誉。

20 世纪 60 年代中期，有限元方法有了坚实的数学和工程学基础，它的应用范围也随之扩大。到现在，几乎所有能应用偏微分方程模型的领域都可以使用有限元方法，可能在 20 世纪的所有逼近方法中对数值方法的理论和实践产生的影响最大[12]。极小位能原理和虚功原理的引入使有限元方法在实践中可以解决许多困难的问题，实现了有限元方法应用范围的扩张，再加上 1967 年 Zienkiewicz 出版了第一本推广有限元方法的教程《结构力学中的有限元法》，所以 60 年代晚期 70 年代早期，有限元方法在工程界逐渐流行起来。

2. 曲边单元的提出

随着有限元方法在工程中的推广，在很多情况下要处理边界条件为曲线(或曲面)的区域。这时如果用直边单元去逼近曲线边界，为了达到一定的精度，就需要在边界上充分细分单元。这样就会使单元增多，从而导致有限元方程中变量的数量增加，有时超出了当时计算机的能力。如 1968 年，Zienkiewicz 在英国的斯旺西(Swansea)用线性直边单元分析拱形坝的受力情况时，形成的有限元方程有几千变量。当时英国最好的计算机是阿特拉斯(Atlas)，它处理这么多变量需要几小时，但它每运行约 20min 就会产生一个随机错误，所以如果使用直边单元，在当时的条件下就无法解决这个问题[13]。为了克服这类困难，数学家创造了曲边单元来逼近曲边定义域。

使用曲边单元的基本思想是将曲边单元映射成常用的直边单元,然后使用直边单元的理论,这就要用到等参映射的技术。等参映射可以将规则的形状映射成不规则的形状,也可以将不规则的形状映射成规则的形状。等参映射技术的先驱是 Taig,1961 年在他的报告《通过矩阵位移方法的结构分析》(Structural Analysis by the Matrix Displacement Method)中首次成功地将长方形映射成了一般四边形。后来,Irons 在 Zienkiewicz 的建议下开始研究这个课题,1966 年将 Taig 的方法作了推广,可以将直边单元映射成曲边单元。由此曲边单元引入到了有限元方法中。

20 世纪 60 年代晚期,Zienkiewicz、Iron 和 Scott 等在 1966 年的基础上进一步提升了等参映射技术,并且把它应用到了二维和三维问题中。由于曲边单元在处理边界形状复杂的区域时有很大的优势,而曲边单元是高阶单元,所以 60 年代晚期和整个 70 年代,高阶单元都十分流行。

3. 对有限元收敛性的研究

关于有限元方法收敛性的研究,在 20 世纪 60 年代早期,因为知道了有限元方法可由极小位能原理导出,所以根据极小位能原理,数学家很容易给出了有限元方法收敛的准则,这个准则叫做形状函数的完备性和协调性。它第一次正式出现是 1964 年 1 月在斯旺西举行的一个学术会议上。1965 年,Zienkiewicz 和 Holister 将这次学术会议中的论文集合起来,以《应力分析》(Stress Analysis)为题目正式出版。

在 1965 年戴顿(Dayton)举行的学术会议上, Bazeley 等展示了非协调元[14],这种单元表现要比协调元好,但因为它不符合有限元方法收敛准则中的协调性,所以收敛性得不到保证。针对这种情况,作者提出了保证非协调元收敛的准则-分片试验。虽然分片试验原来是针对非协调元的,但人们很快发现它可以用于所有的单元。经过 Taylor 等对分片试验的提升[15],它现在已经成了所有有限元形式收敛的充分必要条件。

收敛性保证的是极限状况下有限元方法的有效性,但在实践中不可能真正将定义域无限细分,所以通常得到的解是近似解。那么它在多大程度上与精确解相符合,或者说它与精确解的误差有多大,是否达到了要求的精度,这就需要对近似解进行误差估计。在这个问题上重要的一步是由 Babuška 和 Rheinboldt 走出的,他们不仅指出了经济地估计误差的可能性,而且描述了如何通过恰当的网格改进来达到所要求的精度[16,17]。为了得到较好的误差估计,1992 年,Zienkiewicz 和 Zhu 提出了著名的超收敛分片恢复算法(super convergent patch recovery)[18,19]。这个算法指出,有限元解在某些点上的值与精确解的值十分接近,这些点称为超收敛点。超收敛分片恢复算法的核心思想是利用超收敛点上的值来得到比较精确的解。此后,越来越多的力学家、工程师、数学家投入有限元方法的研究与应用中。在近半个世纪里,为有限元这一博大精深理论体系作出过卓越贡献的人挂一漏万、不胜枚举。

1.1.3 有限元在我国的发展

从有限元方法的早期发展可以看出,国外有限元方法的产生在很大程度上是出于工程技术的需要。在我国社会主义建设的过程中,也有大量需要有限元方法解决的实际问题,但我国在 20 世纪 60 年代比较封闭,不了解国外科技的最新进展。在这种情况下,有一位数学家独立于西方创造了有限元方法,他就是冯康。冯康于 1951 年转到刚组建的中国科学院数学研究

所，不久便赴苏联斯捷克洛夫数学研究所工作，1953 年回国，1957 年调入中国科学院计算技术研究所，1978 年任中国科学院计算中心主任，1980 年当选中国科学院学部委员（院士）。曾任全国人大代表，全国计算数学会理事长，《计算数学》、《数值计算与计算机应用》、*J. Comp. Math.*、*Chinese J. Numer. Math. Appl.* 等四刊主编，国家攀登计划项目“大规模科学工程计算的方法与理论”首席科学家等职。

冯康院士于 1964 年独立于西方创立了数值求解偏微分方程的有限元方法，形成了标准的算法形态，编制了通用的计算程序，是数学机械化思想的一种生动体现[20]，部分地做到了一切问题数学化，一切数学问题代数化，一切代数问题化为代数方程求解。并及时地解决了当时我国最大的刘家峡水坝的应力分析问题[21]。1965 年在《应用数学与计算数学》上发表了“基于变分原理的差分格式”一文，在极其广泛的条件下证明了方法的收敛性和稳定性，给出了误差估计；从而建立了有限元方法严格的数学理论基础，为其实际应用提供了可靠的理论保证。这篇论文的发表是我国学者独立于西方创始有限元方法的标志。

冯康把有限元方法要点归纳为“化整为零、截弯取直、以简驭繁、化难于易”。它的基础分两个方面：一是变分原理，二是剖分插值。从第一方面看，它是传统的能量法的一种变形；从第二方面看，则是差分方法的一种变形。这是两类方法相结合取长补短而进一步发展的结果。它具有很广的适应性，特别适合于几何、物理条件比较复杂的问题，而且便于程序的标准化。由于该方法对有限与无限、连续与离散、局部与整体、简单与复杂、理论与实际、人与机器等各种矛盾的处理都比较得当，因此在解题能力、处理效率和理论保证各方面都远远超过传统的方法。在有限元方法创始之初，冯康就认识到它的内在潜力，并估计这一方法将使固体力学和其他一些领域中提出的椭圆型方程计算问题得到实际的解决，这一点现在已被实践所证实。

20 世纪 70 年代中后期，在经典的连续有限元即协调元取得成功的基础上，冯康注意到了间断有限元，包括非协调有限元的理论还处在不太令人满意的状态，及时开展了相关研究。他在 1979 年建立了间断函数类的庞加莱（Poincare）型不等式、间断有限元函数空间的嵌入定理及间断有限元的一般收敛性定理[22]。这些成果正是后来得到系统发展的非协调有限元理论研究的先导。冯康还将椭圆方程的经典理论推广到具有不同维数的组合流形，即由不同维数子流形组成的几何结构，这在国际上为首创。他提供了严密的数学基础，解决了有限元方法对组合结构的收敛性[23]，并将此项成果向工程界讲授，颇受欢迎。国外直到 20 世纪 80 年代中期才有这方面的工作。近年来，由于机器人及空间站等高度复杂的结构的出现，这一方向已显示出极大的发展前景。

有限元方法的创立是计算数学发展的一个重要里程碑。冯康独立于西方创立了有限元方法，并先于西方建立了极其严密的理论基础，对计算数学的发展作出了历史性的贡献。冯康创立有限元方法的学术观点和学术道路与西方迥然不同，这使得他能在比西方远为落后的计算机设备条件下做出领先于西方的工作。有限元方法的创立对数学学科本身也有重要意义，它的出现使得微分方程的数值解法及其理论分析的面貌大为改观。有限元方法对数学、力学、工程科学和计算机科学之间的交流渗透起到了极大的促进作用。冯康对有限元方法的重大贡献已得到国内外公认和重视，冯康的论文被多数国内同行反复引用，是有限元方法的创始工作。外国科学家在了解到冯康的工作后也都一致对这一工作的历史地位和作用予以充分肯定，公正承认冯康院士在创始有限元方法中作出的贡献。法国科学院院士 Lions 教授在 20 世纪 70 年代末就已对此给出了很高的评价，他说：“有限元方法意义重大，中国学者在对外隔绝的环境

下，独立创造了有限元方法，在国际上属最早之列，今天这一贡献已为全人类所共享。"美国著名数学家 Lax 院士曾写道："冯康的声望是国际性的。我们记得他瘦小的身材，散发着活力的智慧的眼睛，以及充满灵感的脸孔。整个数学界及他众多的朋友都将深深怀念他"。冯康院士逝世已经 20 年了，他的业绩已留在中国乃至世界数学发展的历史上。他曾为之奋斗的科学计算事业正在蓬勃发展。他的思想和精神还在指导并将继续影响我国几代科学计算工作者，激励着他们继续完成他开创的事业。

继冯康院士之后，石钟慈院士在有限元研究中也作出了非常杰出的贡献。20 世纪 70 年代末，石钟慈在多年与工程人员合作推广应用有限元方法的基础上，创造性地提出了样条有限元，将样条逼近与有限元巧妙结合，得到了完整的误差分析。此法曾在许多部门应用，解决了众多工程设计的实际问题，从 20 世纪 80 年代开始，他转向非协调有限元研究，取得了一系列系统深入的重大成果，否定了当时国际上流行的判别非协调元收敛性的 Irons 准则，揭示了工程直观和数学严密之间的矛盾；首次证明非协调元的收敛性强烈依赖网格剖分方式，并发现了一系列错向收敛现象；并提出了一种新的判别非协调元收敛性的准则，既可靠又方便，这是非协调元收敛性研究的一项重大进展，为实际应用提供了强有力的工具；同时应西方有限元创始人德国的 Argyris 教授要求，证明了一种非标准元(TRUNC)的收敛性。石钟慈院士又从事非协调有限元多重网格技术研究，特别在瀑布型多重网格研究中取得了重要成果，首次论证了有限元方法的可靠性，给出了有限元近似解收敛性分析与最优误差估计[24]。

此外，林群、陈传淼、朱起定与吕涛等自 20 世纪 70 年代后期在有限元超收敛、后处理与高精度算法研究中做了许多重要工作，他们及随后的一批我国学者的工作引起国际同行长期的关注和重视。

1.2 有限元方法的工程应用

有限元方法在国民经济建设中发挥了重大作用，其应用领域的广度和深度不断发展。目前，有限元法的应用已由弹性力学平面问题扩展到空间问题、板壳问题，由静力平衡问题扩展到稳定问题、动力问题和波动问题。分析的对象从弹性材料扩展到塑性、黏弹性、黏塑性和复合材料等，从固体力学扩展到流体力学、传热学、电磁学、声学等连续介质领域。在工程分析中的作用已从分析和校核扩展到优化设计，并与计算机辅助设计相结合。在短短的几十年里，有限元方法已在航空航天、机械能源、土木建筑和汽车等国民经济支柱领域得到了广泛的应用。

1. 航空航天

航空航天一直都是各种先进技术应用的排头兵，有限元方法的应用也不例外。著名商用有限元软件中很多都有着航空航天的血统，如 NASTRAN 软件最早就源自美国宇航局(NASA)。目前，波音、空客、洛克希德·马丁、达索等美欧各大飞机制造公司，在研发中无不例外都采用有限元方法提高设计效率，降低产品成本[25]。EADS(欧洲宇航防务集团)采用 ABAQUS 软件，利用一系列自由度总数达到将近 450000 的各种 ABAQUS 元素构建飞机襟翼支承结构模型，并运用 ABAQUS 隐式算法和后置处理法对若干种情况下的负荷承受能力进行了计算，简化了新型复合材料成型加工的几何复杂性，从而最大程度地降低了制造成

本[26]。中国航天科技集团公司第一研究院第七〇二研究所，使用 MSC 公司的 PATRAN、NASTRAN 软件进行航天器的虚拟测试来进行航天器设计的验证及试验方案评估，通过虚拟试验和真实试验的互补，在满足数据准确性的同时，大大提高了工程效率，加快了产品上市时间，降低了产品制造成本，促进了我国航天事业飞速发展[27]。

2. 机械能源

机械能源领域是有限元方法应用最为成功的领域之一，目前基于有限元方法开发的通用商业分析软件如 ANSYS、NASTRAN、ADINA、ABAQUS、ALGOR 等，已成功应用到包括产品零件、部件和整机的刚度、强度、散热、振动和疲劳设计的各个环节。世界著名的工程机械设备供应商卡特彼勒(Caterpillar)公司，在新一代 994 系列装载机设计中采用有限元 ANSYS 软件对底盘、臂架等关键零部件进行仿真分析，使这些产品在结构形式的合理性、先进性和安全性等方面都有了很大改进[28]。中国核动力研究设计院以反应堆压力容器、堆内构件、燃料组件、控制棒驱动机构及其支撑结构组成的反应堆系统为分析对象，利用 ANSYS 软件对秦山核电二期工程反应堆系统进行抗震分析[29]，一方面为反应堆结构设计提供地震输入，另一方面又为抗震试验提供地震激励，取得了很好的效果。由中油第一建设公司参加承建的大庆180×104t/a ARGG 装置中使用的自行设计制造的 500t/52m、280t/80m 特大型起重桅杆，采用 ANSYS 软件对其卧态试验的全过程和实际吊装状态进行了多种加载方式的强度和稳定性数值模拟，降低了设备投资，大大缩短了设计制造周期，节省了宝贵的施工时间，同时提高了桅杆设计的整体安全性[30]。

3. 土木建筑

土木建筑领域也是有限元方法应用较为成熟的领域，桥梁、摩天大楼、大型网架、索膜结构、大坝等设计中要综合考虑环境对建筑物的影响，需要利用有限元方法进行抗震、抗风、抗碰撞等数值分析。太原理工大学土木系在李珠教授领导下的课题组采用 ANSYS 软件成功地对我国国家大剧院进行了结构分析[31]，国家大剧院是我国最高级别的艺术中心，建筑面积 14 万平方米，总高度 55.73m，地基埋深 26.10m，采用 ANSYS 软件开展了静力分析、多种载荷组合工况下的变形、结构抗震分析(响应谱分析、时间历程分析)并验证结构设计的合理性与可靠性，计算结果为工程设计及优化提供了可靠的理论依据。清华大学机械工程系曾攀教授在 ANSYS 平台上，进行了各种新型结构的方案设计和修改，创造性地设计了新型的双向拉索结构形式的悬索桥[32]，新型结构系统较传统结构系统在静力和动力特征方面都有很大的改善，新型双向拉索悬索桥主塔内的最大弯矩较传统结构系统有显著的降低，桥面内飘浮固有振型自振频率较传统结构系统有很大的提高。

4. 汽车

汽车领域中有限元应用具有明显的多物理场特点：在结构分析中，有车身、曲轴等关键汽车零部件变形和应力分析；在热计算中，有发动机外壳、涡轮增压器蜗壳温度场求解；在流场计算中，有汽车外流场、排气管流道设计等；在耦合场计算中，有噪声振动总成 NVH、散热片热应力分析等。标致雪铁龙集团使用 NASTRAN 软件对包括异常负荷之类的接触或汽车车身的结构刚度等非线性问题进行模拟，实现车身结构数据交换格式的标准化，减少了设计和制造时间，降低了开发制造成本，提高了企业在同行业中的竞争力[33]。美国福特汽车公司 2000 年

开始全面在车型设计中采用有限元技术，其新车型开发周期从36个月降低到12～18个月，开发后期设计修改率减少50%，原型车制造和试验成本减少50%[34]。

1.3 新型有限元方法概述

正如文献[35]中提到的：传统有限元理论成熟、原理简单，并且有强大的商业软件支持，在工程问题的数值模拟中占据着重要地位。在许多大型工程建设中，有限元数值分析发挥了至关重要的作用，随着各种问题研究的不断深入，传统有限元方法在精度及收敛性上逐渐体现出不足，因此对传统有限元方法的每一点成功改进都将会产生深远的现实意义。近年来提出的新型有限元方法主要有如下几种。

1. 广义协调元

广义协调元是龙驭球院士于1987年首创的新型有限元单元[36]。传统协调元在构造中要求太严，而非协调元又对单元间连接性放得太宽，龙驭球院士以追求平均意义上保证单元间的位移协调为目标，创造性地提出了广义协调元的概念。后经众多学者多年的不懈努力，广义协调元已发展出包括薄板、厚板、薄壳、等参等四大类，数十种新单元[37]。不仅如此，他还构造了克服剪切自锁的新型广义协调四边形厚板元[38]与克服薄膜自锁的广义协调四边形薄膜元[39]，以及厚薄通用的三角形三节点平板壳元[40]，利用解析式函数法构造一个带旋转自由度广义协调超基膜元[41]。数值算例表明，该类单元精度高、对网格畸变不敏感，显示出良好的性能，这一系列广义协调单元因适应性强而得到广泛的使用。对于困扰工程界的裂纹分析问题，龙驭球院士等利用构造的广义协调单元对平面切口问题进行了深入的分析[42]，推导了V形切口尖端的应力场基本解析式，对含切口解析单元的单元尺寸和应力项数等因素对分析结果的影响进行了系统的讨论。此外，他融入面积坐标及谱方法等技术，一些崭新的广义协调元方法也正在研究和讨论之中[43]。

2. 基于理性有限元哲理的复合单元法

有限元是工程与科学计算中的一项伟大创造，它取得了很大的成功同时也遗留下了不少问题。传统有限元技术发源于基本弹性力学问题求解，而在传统的弹性力学问题中，由于偏微分方程组解析解难以得到，研究者通常利用凑配法求解，常用的有限元法也受到凑配法的深刻影响，对求解问题的解析部分特点的忽略，因此经常面对一些矛盾，如不可压缩材料的体积自锁、板壳弯曲单元的剪切自锁、薄膜自锁等问题。相对于有限元，边界元法采用解析解，这些问题就不复存在，但边界元求解软件难以商业化，也给边界元研究带来了瓶颈。受到边界元的启发并考虑到问题的解析性，钟万勰院士于1996年提出了理性有限元概念[44]，认为有限元方法论是只顾数学方便，仿佛只要采用完全低幂次多项式就可以，而对于力学要求则放在从属地位，以等参元为代表的常规有限元列式，强调了数学逼近与坐标变换的方便，缺乏力学概念的理性引导；理性有限元则以弹性力学方程的解为引导，直接在物理面内列式，再以数学方法逼近，可以取得很大的改善。曾攀教授在此基础上，研究了如何在单元内把一个经典解析位移场有效地嵌入常规有限元位移场中，发展了一种新的单元技术——复合单元[45,46]，既具有常规有限元的灵活性又不丢失经典力学的高精度，从而大大提高了数值分析精度，如今理性有限元已渐渐得到了广泛的应用[47-49]。

3. 样条有限元

20 世纪 70 年代初，样条函数理论在国际上迅速发展起来，它在计算物理、最优控制、计算机辅助设计以及计算力学领域中，得到了推广应用。样条有限元法是样条函数与有限元相结合的产物，一般样条有限元法中均采用 B 样条函数，1974 年，Antes 提出了应用截断式三次 B 样条插值函数来构造位移场函数，求解了薄板弯曲问题[50]，但在一段时间内未得到进一步发展。直到 1979 年，石钟慈院士应用截断三次、五次 B 样条插值函数来构造矩形板、斜板、弹性地基板的弯曲位移场函数，应用最小势能原理导出了样条有限元计算模型，并推广至梁板组合结构的计算问题，进而提出了样条有限元法[51]。与其他分段多项式相比，样条函数具有许多优点：待定系数少、连续性强、逼近精度和计算效率高等，因此样条有限元法得到了迅速的发展。张佑启提出了样条有限条法[52]，秦荣提出了样条有限点法和样条子域法[53-55]，并将 B 样条函数推广至结构非线性、耦合体系分析中。沈鹏程在该领域内开展了一系列深入的研究[56-60]，系统地阐述了将 B 样条函数引入力学问题求解中，构建有限元代数方程组，详细讨论了载荷的处理等问题，并将控制理论引入样条有限元方法中。龙驭球院士采用样条函数插值基进行分区插值的基础上，提出了样条单元法[37]，构造了一系列的样条单元，成功求解了工程实践中的很多问题，取得了满意的效果。

4. 数值流形法

20 世纪 90 年代，留美博士石根华[61]等针对传统有限元在计算非线性大位移大变形问题的不足，发展了数值流形法，具有统一处理不连续介质和连续介质问题的能力，它具有物理网格与数学网格两套网格，常选用有限元网格作为数学网格[62]，构造了高精度四节点四边形流形单元[63]，这种方法主要优势在于处理如岩体力学等大位移与大变形问题。针对岩土力学中的倾倒破坏问题要求精确模拟变形和应力、破坏面的发展、块体间接触及块体运动的特点，张国新等[64]提出使用数值流形法模拟岩石边坡的倾倒破坏，结合流形元结构计算的安全系数，得出了结构整体和单个块体的安全系数。苏海东等[65,66]则系统地研究了高阶流形法的应用，开发了高阶流形法的二维和三维静力分析程序，证明了高阶流形法的确能提高位移和应力的计算精度，也具备反映应力集中和应力奇异性的能力，其计算精度受到覆盖函数的阶次和数学网格划分的双重影响。

5. 无网格法

无网格法(Meshless)是采用一系列无网格节点信息及其局部支撑域上的权函数来实现局部化精确逼近，有效地克服了传统有限元网格划分在求解随时间变化的不连续和大变形时遇到的困难。无网格方法一般可分为两大类：一类是以拉格朗日方法为基础的粒子法(Particle method)[67,68]，如光滑粒子流体动力学(Smoothed Particle Hydrodynamics)法[69-71]、在其基础上发展的运动粒子半隐式(Moving Particle Semiimplicit)法等[72,73]；另一类是以欧拉方法为基础的无格子法(Gridless Methods)[74]。美国西北大学工程力学系学者 Belytschko 在这方面开展了大量的研究[75]，Zienkiewicz 等一批有限元学者对无网格法从不同角度开展了研究，已出现十多种形式[76]，如弥散单元法[77]、无单元伽辽金法[78,79]、无网格自由插值法[80]和无网格局部佩特罗夫伽辽金方法等[81]；但无网格方法也有它的不足，如计算量大、难以施加本质边界条件等问题，因此在精度与效率方面还需要开展更多的研究[82]。

6. 云团法

云团法实际上是无网格方法的一类，但是，传统的无网格方法除了以小波核为基础的方法，其余方法均缺少数学背景证明其可靠性，换言之，这些无网格方法缺少理性依据以确保它们的解是收敛于精确解的[83]。因此，在有限元大师 Oden 等的积极推动下，云团法以一种特殊无网格方法的形式出现。与无网格法类似，云团法以一系列散点对任意域进行求解计算，继承了无网格法的优势，但径向基函数则采取一系列变尺寸支撑的任意阶多项式，对结构的物理和数学性质进行充分的考虑，得到了一组较为精确的解答[84]。Mendonça 等开展了云团法 Timoshenko 单元的研究[85]，Garcia 等在 Oden 研究的基础上，提出了 Mindlin 板的云团法模型[86]，Duarte 等则在云团法的基础上开展了自适应云团法的研究，大大提高了高精度计算的效率[87]。目前云团法已成为一种相对成熟的独立的无网格方法，广泛应用于奇异值问题以及其他工程难题中[88,89]。

7. 等几何分析

等几何分析(isogeometric analysis)的概念是由美国有限元大师 Hughes[90] 提出并积极倡导的，该方法是以有限元方法的等参元思想，并将计算机辅助设计中的各种样条(T 样条，B 样条)作为型函数，实现了 CAE 与 CAD 技术的无缝结合。使用 CAD 技术中常用的 NURBS 基函数，可以构造任意高阶连续的近似函数，克服了有限元分析方法通常仅有 C_0 连续性的弊端，使等几何分析方法可以方便地求解薄板壳等高阶问题。值得一提的是，等几何分析在近十年中发展极为迅速，Hughes 等在国际著名期刊上发表的大量研究已证明了该方法对静力[91]、动力[92]及多场耦合问题[93]的可靠性，由于其无需进行几何模型转换，单元细分简便且不损失几何精度，便于求解高阶连续问题。不仅如此，等几何分析方法也自然在结构优化中拥有了独到的优势，它可直接将几何模型的 NURBS 控制点作为优化对象，并根据优化后的控制点坐标和权值简便精确地得到优化后的形状，而且优化后的边界是光滑连续的 NURBS 曲线。

8. 小波有限元

小波有限元主要是针对传统有限元在计算裂纹一类奇异性问题方面存在的不足而提出的。小波分析是近十几年来迅速发展起来的全新的数值分析方法，它最大的长处是具有多尺度(multiscale)、多分辨(multiresolution)的特性，能够提供多种基函数作为有限元插值函数，由此构造的小波基单元可以根据实际需要任意改变分析尺度，使在变化梯度小的求解域用小的分析尺度，而变化梯度大的求解域则采用大的分析尺度。这是一种优于传统单元网格加密和阶次升高的自适应有限元算法，这种变尺度算法数值稳定性好、运算速度快、求解精度高。

国内对小波有限元法的研究始于 1994 年，华中科技大学徐长发等深入研究了半正交 B 样条小波有限元法的数值稳定性，为半正交 B 样条小波有限元法的构造提供了理论依据[94]。西安交通大学何正嘉、陈雪峰综述了近年来小波数值方法的研究进展，及其在大梯度温度场分析、裂纹奇异性问题分析和故障诊断等方面的应用，指出小波有限元是传统理论发展的新生长点，适宜工程奇异性问题分析，可有效提高分析精度[95]。西安建筑科技大学黄义等基于样条小波构造三角形和四边形小波单元，分析了薄板与弹性地基板的静力变形特性，收敛快、精度高[96]，同时与韩建刚等推导了 Daubechies 尺度函数导数及其高阶导数的正确计算结果，给出

了它的连续性的判定方式。在保证导数的连续性和不增加支集长度的前提下，采用 Daubechies 尺度函数与 B 样条尺度函数的卷积对原方法进行了改进，解决了 Daubechies 小波本身导数的连续性随着支集的增加而增大，解高阶微分方程时，就必须增加支集的长度导致的计算复杂化问题。构造出 M 尺度关系，并且证明通常所采用的小波求解微分方程的两尺度关系为其特例，利用三尺度样条小波，提出了采用小波伽辽金方法求解问题的方法。小波有限元经过近几十年的发展，成绩斐然。算法构造方面，Daubechies 小波、样条小波、区间 B 样条小波、Haar 小波、多小波等众多小波基函数的介入，极大地丰富了小波单元库，为工程结构分析与应用提供了更多的选择。基于提升框架的自适应算法极大提高了算法在应用中的灵活性，可针对实际问题构造合适的小波基函数。清华大学 Liu 等对 Daubechies 小波在二维弹性问题及塑性问题等的求解上给出了良好的解答[97,98]，有效地拓展了小波数值方法的使用范围。工程应用方面，结构力学特性分析是最基础的，小波有限元算法在这方面做了很多应用，包括一维、二维、三维结构，复合材料，奇异性结构等，显示了小波有限元高精度、高效率等特性。打印机、复印机温度场分析，裂纹定量诊断研究等实际问题的分析，显示了小波有限元在奇异性问题分析中的优势。因此，小波有限元不论在数值计算方面，还是工程应用方面，都具有很大的研究价值与应用潜力。

习　题

1. 查阅 Zienkiewicz 书籍，理解有限元的重要性及其发展历程。
2. 3～5 人组成一个小组，查阅 1～2 篇新型有限元英文期刊文章，进行简要讨论。
3. 了解吴文俊数学机械化思想。

第 2 章　有限元方法入门基础

2.1　有限元方法的数学基础

有限元方法体现了一切问题数学化、一切数学问题代数化、一切代数问题化为代数方程求解的“数学机械化”思想。无论在有限元理论推导中，还是在商业有限元软件使用中，都会涉及矩阵代数及其求解相关知识，在有限元运算的过程中包含着多种、大量的矩阵操作与性质运用，因此对矩阵的基础知识的阐述显得尤为重要。本节简单介绍矩阵相关知识[99]。

2.1.1　矩阵基础知识

由 $m\times n$ 个数 a_{ij}（$i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n$）排列的 m 行、n 列的矩阵数表：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为一个 $m\times n$ 矩阵。其中 a_{ij} 为该矩阵的第 i 行第 j 列元素。

当 m 与 n 相等时，该矩阵也称为方阵，n 为该方阵的阶数。当矩阵中所有元素均为实数时，则称为实矩阵；若矩阵中出现复数元素，则称为复矩阵。

1. 单元矩阵

主对角线元素都是 1，其他元素全部为 0 的方阵，即单元矩阵，也称为单元方阵，一般记为 $\boldsymbol{I}$，若需要表示出该方阵的阶数 n，记为 $\boldsymbol{I}_n$。

2. 转置矩阵

由 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的行依次换为列（列依次换为行）所得到的 $n\times m$ 矩阵，即 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2-1}$$

例如，$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ 的转置矩阵为 $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$。

3. 逆矩阵

若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，如果存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$，则称方阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，并称