

URANVILLE
SMITH
MIKESH

最新葛氏平面三角

王允中譯

上海書店印行

葛斯密三氏

最新平面三角學

(附四位數值表)

Plane Trigonometry and Tables

(revised edition)

By

Granville-Smith-Mikesh

王允中 譯

上海書店發行

1 9 4 7

中華民國三十六年一月四版

最新葛氏平面三角學

實價國幣

(外埠酌加寄費)

譯者 王允中

出版者 上海書局

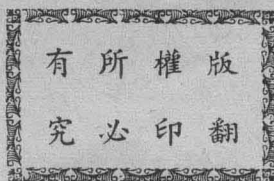
發行人 徐堯正

印刷兼發行者 上海書局

總發行所 上海華龍路三十四號
上海四馬路三〇〇號

上海及各埠

代售處 各大書局



原 序

— 增訂版 —

增訂葛氏平面三角學時，著者深信葛氏教科書之所以爲教師學生等樂意採用者，必有其優點在焉。其優點爲何？卽簡明之解釋，豐富之例題，以及廣徧之應用問題是也。凡諸增改，全因其着意點之增改而然。增訂本中，於三角函數更爲着意，故與直角三角形分別述之。而於此函數形式，更再三努力，使其成爲簡易明曉之方式。其後爲第四章及第五章之應用，而於第五章中，則應用對數爲之。又後爲三角學分析之一章，此章有數處增改，讀者切宜注意之。其特殊者，莫若三角恆等式及方程式均係增訂而成。如是排列，則應用可於三角分析之前完畢之。

本書中之參考，一如原版，係用四位數值表。其所增改者，祇爲正弦及餘弦，正切及餘切之自然值第四表及第五表之加入耳。此外又加入各表之用法說明。凡此諸表，與原版者無異，在計算上均可至四位準確度。其所加入之二表，若不給四位有效數值，定必說明其如何求得之方法。

問題中之角度，一如原版，可用度與分及度與度之小數表出之。至於量角方法之選擇，全由教師自行決定。而諸表則可供任何組問題之用。

一九三七年 斯密斯 密克許 序於耶魯大學

原 序

— 原 版 —

以最新最善之方法詳論三角學，實爲著者之目的。本書之作，乃供專門學校、高等學校、師範學校、中等學校以及自修此課者之用，而對於大學入學試驗所規定之標準，尤爲注意。本書材料，對於初學者似屬過多，然其編制已妥爲排定，務使教者可按其需要而酌減。

三角函數之定義爲比，始用於直角三角形內之銳角，而後用坐標法漸推至一切之角。先使學者習用銳角之自然函數，以解含直角三角形之問題。學者又應注意第二十三節至二十九節之函數簡化方法，可將第一象限以外之諸角函數化出。其每節之第一習題，通以自然函數將其解出。書中習題甚多，其程度之深淺皆慎重審擇，而其中所含方法，常綜合爲若干切于實用之法則。每節下各例題之演算，莫不詳爲解出。

本書將對數另闢爲一章，並注意其計算時減少繁苦之效能。書中所採用者，爲葛氏四位數值表。其於數值表之普通排列法，並無特異變動，僅改良數處以增進對數計算之效率而已。尤爲重要者，乃用此種計算而得之結果，其所希望之準確度極爲顯明。在每一三角形解法中，每類均有二組例題，——其一，以度及分表各角者，其二則以度之小數表出者。本書之有此特點，對於中學之準備投攷大學者，實裨益良多也。

葛蘭維爾序於本雪凡尼亞大學

譯者例言

1. 本書係美國著名數學家 *W. A. Granville* 博士原著，出版以來，非但風行全美，即在我國各中學中，無不踴躍採用。至一九三七年，更由美國耶魯大學數學教授 *P. F. Smith* 博士及 *J. S. Mikesch* 教授重行增訂。於是內容益形充實，而其編制與敘述，更臻完備而新穎，實為近代中學不可多得之三角學教本，本書即依其增訂本逐譯而成。

2. 本書與教育部所頒布之高中普通科課程標準，以及最近江蘇教育廳所頒布之修訂高中算學科進度表，無不適合。

3. 原書優點甚多，茲略舉如下：

- a. 選材取捨，斟酌至當，對理論實用均所顧及。
- b. 教材排列，能適合學習心理；深淺得宜，使學者易於領會而純熟。
- c. 定義正確，說理詳明，系統嚴正，解釋簡賅，易教易學。
- d. 所採用之習題，均極豐富無比；而應用問題，尤能概括近代最新實用問題之要，於學者實最能引起研究三角學之興味。

4. 本書重要文句，概用黑體字或波紋線，以示着重而醒眉目。卷末又附中西文之索引，以便教者讀者查考之用。

5. 本書譯自二十六年九月,迄今夏五月方成,蓋自二十六年八一三滬戰爆發,學校適處閘北戰區,無法開課,不得已乃遄返故鄉,暫以讀書譯述爲自遣,以待時清.不料十一月間,國軍西退,遂被迫流亡於他鄉!今春返滬,得悉五年來服務之明晏二校,全燬於炮火之中,今拙譯雖粗告完成,而大好河山,已非昔觀,爰述數語,用誌不忘!

6. 譯者才疏學淺,文辭拙陋,又屬稿於流亡紛擾之中,其疵謬之處,更所難免;深冀海內高明,多加指正,俾得隨時修改,不勝感幸!

王允中謹識 民國二十七年八月於上海

目 錄

第一章 三角函數

節數	頁數
1. 三角學	1
2. 變數;常數	1
3. 函數	1
4. 銳角之三角函數	2
5. $45^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ 之函數	6
6. 作圖,量角器	11
7. 三角函數之數值表	11
8. 角之推廣	14
9. 正角及負角	14
10. 任何量之角	15
11. 四象限	15
12. 平面上一點之直坐標	17
13. 任意角三角函數之定義	19
14. 三角函數之代數符號	21
15. 應用	21
16. 以一三角函數表其餘諸函數法	30

第二章 基本關係;簡化公式

17. 基本關係	33
----------------	----

18.	任一函數以其他五函數之一表之	35
19.	一數被零所除;無窮數	40
20.	$0, 90, 180^\circ, 270^\circ$ 之函數	41
21.	量角法	43
22.	弧度制	44
23.	化三角函數爲銳角函數法	49
24.	餘角之函數	49
25.	第二象限內諸角之簡化公式	50
26.	第三象限內諸角之簡化公式	55
27.	第四象限內諸角之簡化公式	58
28.	化負角之函數法	62
29.	化任意角之函數爲銳角之函數之普遍則	63

第三章 線值定義及圖象

30.	三角函數之線值定義	70
31.	變角之函數變值	72
32.	函數之圖象	75
33.	三角函數之圖象	77
34.	三角函數之週期性	79
35.	用單位圓作三角函數之圖象	81

第四章 應用

36.	本章之目的:近似值計算	86
37.	以直角三角形爲憑藉之問題	89
38.	正弦及餘弦之數值表;內推法	96

39. 正切及餘切之數值表	9
40. 三角問題中常用之術語	100
41. 斜三角形之解法	107
42. 正弦定律	108
43. 已知二邊及一對角時之疑款	111
44. 正切定律	117
45. 餘弦定律	120
46. 以三角形之邊表三角形之半角函數	124
47. 求斜三角形面積之公式	131
48. 結論	134

第五章 對數之理論及應用

49. 對數對於三角學之需要	135
50. 對數之性質定理	138
51. 常用對數系	141
52. 定常用對數定位部之法則	143
53. 對數表	146
54. 求一已知數之對數法	147
55. 求與一已知對數相當之數	151
56. 計算上對數之應用	153
57. 餘對數	156
58. 對數底之變換	159
59. 指數方程式	161
60. 三角函數對數表之用法	163
61. 第二表之用法,其已知角或所求角皆以度及分 表出者	164

62.	求一角之任一函數的對數而該角以度及分表 出者	165
63.	已知一角函數之對數而求該對應角之度及分 數	167
64.	第三表之用法 其已知或所求角以度數及度之 小數表出者	172
65.	直角三角形解法中對數之應用	178
66.	斜三角形解法中對數之應用	186
67.	求斜三角形面積時對數之用法	206
68.	大地面積之測量法	210
69.	平行航行	211
70.	平面航行	213
71.	中緯度航行	214

第六章 三角學之分析

72.	兩角和之及差之函數	217
73.	兩角和之正弦及餘弦	217
74.	兩角差之正弦及餘弦	222
75.	兩角和及差之正切及餘切	224
76.	以一角之函數表出其二倍角之函數	228
77.	倍角之函數	229
78.	以半角之函數表出一角之函數	231
79.	以一角之餘弦表出其半角之函數	232
80.	函數之和及差	233
81.	三角恆等式	237
82.	三角方程式	244

83. 解三角方程式時之數個建議	244
84. 一個已知函數之一角之普偏公式	250
85. 反三角函數	254

第七章 近於 0° 或 90° 之銳角

86. <u>定理</u>	260
87. 近於 0° 及 90° 諸正銳角之函數	261
88. 求近於 0° 諸銳角函數之法則	262
89. 求近於 90° 諸銳角函數之法則	263
90. 求近於 0° 及 90° 諸角函數之對數之法則	264

第八章 公式摘要

直角三角形	274
函數間之基本關係	274
正弦定律	275
正切定律	275
餘弦定律	275
用三角形諸邊表出該三角形半角之諸函數	275
三角形之面積	275
二角之和及差之諸函數	276
倍角之諸函數	276
以一角之函數表出該半角之諸函數	276
半角之諸函數	276
函數之和及差	277

四位數值表

目錄

第一表

	頁數
自然數之對數.....	1—5
求近於 0 及 90° 諸角三角函數之對數之法則.....	6

第二表

三角函數之對數表,其角度以度及分表出者.....	7—16
角度之反檢表.....	17

第三表

三角函數之對數表,其角度以度及度之小數表出者.....	19—37
-----------------------------	-------

第四表

正弦及餘弦之自然值.....	40—41
----------------	-------

第五表

正切及餘切之自然值.....	42—43
----------------	-------

最新平面三角學

第一章

三角函數

1. 三角學. 在三角學中,吾人所研究之種種數量,即係三角函數 (*Trigonometric function*) 本章之目的,在闡明此等函數,並作其初步之應用.

2. 變數;常數. 舉凡問題中之一切數量非爲變數,即爲常數.故變數與常數間之區別極須明晰確切.一變數 (*Viarable*) 者,可視爲有無窮個數值之一量,常以英文字母之末後數字如 x, y, z 等表之.

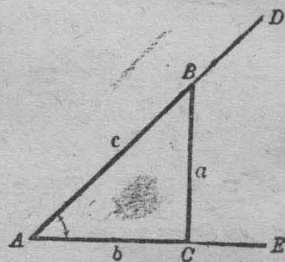
一常數 (*Constant*) 者,其值固定不變之一量也.在一切問題中,數值常數 (*Numerical*) 或絕對常數 (*Absolute constant*) 如 $2, 5, \sqrt{7}, \pi$, 等者,常固定不變.隨意常數 (*Arbitrary constant*) 乃一種常數,但在特殊問題中,其值恆爲固定.凡諸此等常數,恆取在首之英文字母,如 a, b, c , 等表之.

3. 函數. 一變數之函數 (*function*) 者,乃係一數量其值依變數之值而改變.一正方形之面積,實爲其一邊之長的函數,又球形之體積,乃係其直徑之函數.同理,三項式 $x^2 - 7x - 6$ 乃爲 x 之函數,因其值全依吾人所給與 x 之值而決定.在三角函數中,其變數乃係一角之量度,而此等函數值恆依已知角的量度而定,就目前而論,角之量法,吾人

僅以度數 (*Degrees*) 表之已覺滿意。日後吾人定須討論量角之第二種方法。

4. 銳角之三角函數。兩線交角之意義於初等平面幾何學中早已詳述，諒讀者多熟嫻之矣。在本節內先就銳角討論之。令 EAD 為小於 90° 之角，

此即為一銳角。自其一邊上之任意一點 B ，作一線垂直於他邊，如是則構成一直角三角形 ABC 。令英文大寫字母 A, B, C ，表其各角，而令小寫字母 a, b, c ，表其相當角對邊之



長。*由幾何學原理得知此三角形之邊與角有相互之關係，三角學即以表明此等相互關係為始，因此茲特究其諸邊之比。凡此諸邊之比，名曰三角函數 (*Trigonometric functions*)。任一銳角之三角函數有六，今述銳角 A 之諸函數如下：

$\sin A$ 讀作 “ A 之正弦”

$\cos A$ 讀作 “ A 之餘弦”

$\tan A$ 讀作 “ A 之正切”

$\csc A$ 讀作 “ A 之餘割”

$\sec A$ 讀作 “ A 之正割”

$\cot A$ 讀作 “ A 之餘切”

此諸三角函數(比)之定義如下(可參閱圖)：

*除特別申明者外，直角三角形之斜邊，恒以 c 表之，而直角則恒表之以 C 。

$$(1) \sin A = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}} \left(= \frac{a}{c} \right);$$

$$4) \csc A = \frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}} \left(= \frac{c}{a} \right);$$

$$(2) \cos A = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}} \left(= \frac{b}{c} \right);$$

$$(5) \sec A = \frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}} \left(= \frac{c}{b} \right);$$

$$(3) \tan A = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}} \left(= \frac{a}{b} \right);$$

$$(6) \cot A = \frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}} \left(= \frac{b}{a} \right).$$

一重要事項須申述者，即此等任一函數值，祇視角 A 之大小而定，而與垂直線端之 B 點位置無關。令 B' 為 AD 上之任一點， B'' 為 AE 上之任一點。作 $B'C'$ 及 $B''C''$ 各垂直於 AE 及 AD 。如是則三個三角形 ABC ， $AB'C'$ ， $AB''C''$ 為互等角，因其俱為直角三角形，而有一公共角 A 故也。故彼等均為相似形，由是得

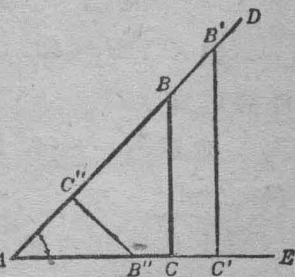
$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} = \frac{B''C''}{AB''}.$$

惟凡此諸比式，均為 A 之正弦，同理亦可證明其他諸函數有相同之性質，并知所擇之三角形可任意其大小，其重要之點，厥唯在三角形邊之相互關係而非各邊之實值。

讀者更宜注意者，凡 A 角之大小改變時，凡此六比，亦變其值。

此諸函數（比），在三角學中，實極重要。上述定義，若不能有恰當之了解，則進修三角學，困難殊多，而欲求滿意之成功，斷非致力於此。不可讀者苟能注意第一行之三函數各為第二行三函數之倒數，則更能便於記憶。

因，



$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{1}{\csc A};$$

$$\csc A = \frac{c}{a} = \frac{1}{\frac{a}{c}} = \frac{1}{\sin A};$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{1}{\frac{c}{b}} = \frac{1}{\sec A};$$

$$\sec A = \frac{c}{b} = \frac{1}{\frac{b}{c}} = \frac{1}{\cos A};$$

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{\cot A};$$

$$\cot A = \frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{\tan A}.$$

若將定義(1)至(6)應用在銳角 B 上,則得

$$\sin B = \frac{b}{c};$$

$$\csc B = \frac{c}{b};$$

$$\cos B = \frac{a}{c};$$

$$\sec B = \frac{c}{a};$$

$$\tan B = \frac{b}{a};$$

$$\cot B = \frac{a}{b}.$$

與 A 角諸函數比較之,即見

$$\sin A = \cos B;$$

$$\csc A = \sec B;$$

$$\cos A = \sin B;$$

$$\sec A = \csc B;$$

$$\tan A = \cot B;$$

$$\cot A = \tan B.$$

因 $A + B = 90^\circ$ (即 A 與 B 互為餘角), 故上述之結果, 可簡述之如下:

定理. 一銳角之函數等於其餘角之餘函數 (Co-function)*

上述定理可書如下:

$$\sin A = \cos (90^\circ - A);$$

$$\csc A = \sec (90^\circ - A);$$

$$\cos A = \sin (90^\circ - A);$$

$$\sec A = \csc (90^\circ - A);$$

*正弦與餘弦, 互謂餘函數. 同理, 正切與餘切, 正割與餘割, 均可互謂餘函數.