GRANVILLE
SMITH
MIKESH

最新葛氏平面三角

王允中譯

上海書店印行

葛斯密三氏

最新平面三角學

（附四位數值表）

Plane Trigonometry and Tables

(revised edition)

By

Granville–Smith–Mikesh

王允中 譯

上海書店發行

1 9 4 7

中華民國三十六年一月四版

最新葛氏平面三角學

實價國幣
（外埠酌加寄費）

譯者 王允中
出版者 上海書局
發行人 徐堯正
印刷兼發行者 上海書局
總分發行所 上海華龍路三十四號 上海四馬路三〇〇號
上海及各埠
代售處 各大書局

原　　序

——增訂版——

增訂葛氏平面三角學時,著者深信葛氏教科書之所以爲教師學生等樂意採用者,必有其優點在焉.其優點爲何?卽簡明之解釋,豐富之例題,以及廣徧之應用問題是也.凡諸增改,全因其着意點之增改而然.增訂本中,於三角函數更爲着意,故與直角三角形分别述之.而於此函數形式,更再三努力,使其成爲簡易明曉之方式.其後爲第四章及第五章之應用,而於第五章中,則應用對數爲之.又後爲三角學分析之一章,此章有數處增改,讀者切宜注意之.其特殊者,莫若三角恆等式及方程式均係增訂而成.如是排列,則應用可於三角分析之前完畢之.

本書中之參考,一如原版,係用四位數值表.其所增改者,祇爲正弦及餘弦,正切及餘切之自然值第四表及第五表之加入耳.此外又加入各表之用法說明.凡此諸表,與原版者無異,在計算上均可至四位準確度.其所加入之二表,若不給四位有效數值,定必說明其如何求得之方法.

問題中之角度,一如原版,可用度與分及度與度之小數表出之.至於量角方法之選擇,全由教師自行决定.而諸表則可供任何組問題之用.

一九三七年 斯密斯 密克許 序於耶魯大學

原　序

—原　版—

以最新最善之方法詳論三角學,實爲著者之目的.本書之作,乃供專門學校高等學校師範學校中等學校以及自修此課者之用,而對於大學入學試驗所規定之標準,尤爲注意.本書材料,對於初學者似屬過多,然其編制已妥爲排定,務使教者可按其需要而酌減

三角函數之定義爲比,始用於直角三角形內之銳角,而後用坐標法漸推至一切之角.先使學者習用銳角之自然函數,以解含直角三角形之問題.學者又應注意第二十三節至二十九節之函數簡化方法.可將第一象限以外之諸角函數化出.其每節之第一習題,通以自然函數將其解出.書中習題甚多,其程度之深淺皆愼重審擇,而其中所含方法,常綜合爲若干切于實用之法則.每節下各例題之演算,莫不詳爲解出.

本書將對數另闢爲一章,並注意其計算時減少繁苦之效能,書中所採用者,爲葛氏四位數值表,其於數值表之普通排列法,並無特異變動;僅改良數處以增進對數計算之效率而已.尤爲重要者,乃用此種計算而得之結果,其所希望之準確度極爲顯明在每一三角形解法中,每類均有二組例題,— 其一,以度及分表各角者,其二則以度之小數表出者.本書之有此特點,對於中學之準備投攷大學者實俾益良多也.

葛蘭維爾序於本雪凡尼亞大學

譯者例言

1.本書係美國著名數學家 *W. A. Granville* 博士原著,出版以來,非但風行全美,即在我國各中學中,無不踴躍採用.至一九三七年,更由美國耶魯大學數學教授 *P. F. Smith* 博士及 *J. S. Mikesh* 教授重行增訂.於是內容益形充實,而其編制與敍述,更臻完備而新穎,實爲近代中學不可多得之三角學敎本,本書卽依其增訂本迻譯而成.

2.本書與教育部所頒布之高中普通科課程標準,以及最近江蘇教育廳所頒布之修訂高中算學科進度表,無不適合.

3.原書優點甚多,茲略舉如下:

a.選材取捨,斟酌至當,對理論實用均所顧及.

b.教材排列,能適合學習心理;深淺得宜,使學者易於領會而純熟.

c.定義正確,說理詳明,系統嚴正,解釋簡賅,易敎易學.

d.所採用之習題,均極豐富無比;而應用問題,尤能概括近代最新實用問題之要,於學者實最能引起研究三角學之興味.

4.本書重要文句,概用黑體字或波紋線,以示着重而醒眉目.卷末又附中西文之索引以便教者讀者查考之用.

5. 本書譯自二十六年九月,迄今夏五月方成,蓋自二十六年八一三滬戰爆發,學校適處閘北戰區,無法開課,不得已乃遄返故鄉,暫以讀書譯述爲自遣,以待時淸.不料十一月間,國軍西退.遂被迫流亡於他鄉!今春返滬,得悉五年來服務之明晏二校,全燬於炮火之中.今拙譯雖粗告完成,而大好河山,已非昔觀,爰述數語,用誌不忘!

6. 譯者才疏學淺,文辭拙陋.又屬稿於流亡紛擾之中,其疵謬之處,更所難免;深冀海內高明,多加指正,俾得隨時修改,不勝感幸!

王允中謹識　民國二十七年八月於上海.

目　錄

第一章　三角函數

第二章　基本關係;簡化公式

第三章 線值定義及圖象

第四章 應用

第五章　對數之理論及應用

第六章 三角學之分析

第七章　近於0°或90°之銳角

第八章　公式摘要

四位數值表

目錄

第一表

頁數

第二表

第三表

第四表

第五表

最新平面三角學

第一章

三角函數

1. 三角學. 在三角學中,吾人所研究之種種數量,即係三角函數(*Trigonometric function*)本章之目的,在闡明此等函數,並作其初步之應用.

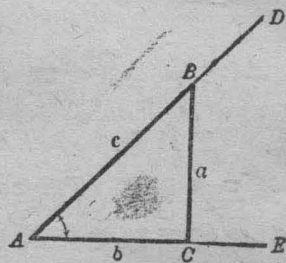
2. 變數;常數. 舉凡問題中之一切數量非為變數,即為常數.故變數與常數間之區別極須明晰確切.一變數(*Viarable*)者,可視為有無窮個數值之一量,常以英文字母之末後數字如x, y, z等表之.

一常數(*Constant*)者,其值固定不變之一量也.在一切問題中,數值常數(*Numerical*)或絕對常數(*Absolute constant*)如$2, 5, \sqrt{7}, \pi$,等者,常固定不變.隨意常數(*Arbitrary constant*)乃一種常數,但在特殊問題中,其值恆為固定.凡諸此等常數,恆取在首之英文字母,如a, b, c,等表之.

3. 函數. 一變數之函數(*function*)者,乃係一數量其值依變數之值而改變.一正方形之面積,實為其一邊之長的函數,又球形之體積,乃係其直徑之函數.同理.三項式x^2-7x-6乃為x之函數,因其值全依吾人所給與x之值而決定,在三角函數中,其變數乃係一角之量度,而此等函數值恆依已知角的量度而定,就目前而論,角之量法,吾人

僅以度數(*Degree*)表之已覺滿意.日後吾人定須討論量角之第二種方法.

4. 銳角之三角函數. 兩線交角之意義,於初等平面幾何學中,早已詳述,諒讀者多熟嫺之矣.在本節內先就銳角討論之.令 EAD 爲小於 90° 之角,此卽爲一銳角.自其一邊上之任意一點 B,作一線垂直於他邊,如是則構成一直角三角形 ABC.令英文大寫字母 A,B,C,表其各角,而令小寫字母 a,b,c,表其相當角對邊之長.



*由幾何學原理,得知此三角形之邊與角有相互之關係,三角學卽以表明此等相互關係爲始,因此茲特究其諸邊之比.凡此諸邊之比,名曰三角函數(*Trigonometric functions*).任一銳角之三角函數有六,今述銳角 A 之諸函數如下:

$\sin A$	讀作	"A之正弦"
$\cos A$	讀作	"A之餘弦"
$\tan A$	讀作	"A之正切"
$\csc A$	讀作	"A之餘割"
$\sec A$	讀作	"A之正割"
$\cot A$	讀作	"A之餘切"

此諸三角函數(比)之定義如下(可參閱圖):

*除特別申明者外,直角三角形之斜邊,恆以 c 表之,而直角則恆表之以 C.

(1) $\sin A=\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}\left(=\frac{a}{c}\right)$, 4) $\csc A=\frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}\left(=\frac{c}{a}\right)$;

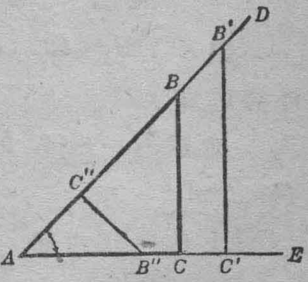
(2) $\cos A=\frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}\left(=\frac{b}{c}\right)$; (5) $\sec A=\frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}\left(=\frac{c}{b}\right)$;

(3) $\tan A=\frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}\left(=\frac{a}{b}\right)$; (6) $\cot A=\frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}\left(=\frac{b}{a}\right)$.

一重要事項須申述者,即此等任一函數值,祇視角A之大小而定.而與垂直線端之B點位置無關.令B'爲AD上之任一點,B''爲AE上之任一點.作$B'C'$及$B''C''$各垂直於AE及AD.如是則三個三角形ABC, $AB'C'$, $AB''C''$爲互等角,因其俱爲直角三角形,而有一公共角A故也.故彼等均爲相似形,由是得

$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}.$$

惟凡此諸比式,均爲A之正弦.同理亦可證明其他諸函數有相同之性質.并知所擇之三角形可任意其大小,其重要之點,厥唯在三角形邊之相互關係而非各邊之實值



讀者更宜注意者,凡A角之大小改變時,凡此六比,亦變其值.

此諸函數(比),在三角學中,實極重要.上述定義,若不能有鞏固之了解,則進修三角學,困難殊多而欲求滿意之成功,斷非致力於此不可.讀者苟能注意第一行之三函數各爲第二行三函數之倒數,則更能便於記憶. 因,

$$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{1}{\frac{c}{a}}=\frac{1}{\csc A};\qquad \csc A=\frac{c}{a}=\frac{1}{\frac{a}{c}}=\frac{1}{\sin A};$$

$$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{1}{\frac{c}{b}}=\frac{1}{\sec A};\qquad \sec A=\frac{c}{b}=\frac{1}{\frac{b}{c}}=\frac{1}{\cos A};$$

$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{1}{\frac{b}{a}}=\frac{1}{\cot A};\qquad \cot A=\frac{b}{a}=\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{1}{\tan A}.$$

若將定義(1)至(6)應用在銳角B上,則得

$$\sin B=\frac{b}{c};\qquad \csc B=\frac{c}{b};$$

$$\cos B=\frac{a}{c};\qquad \sec B=\frac{c}{a};$$

$$\tan B=\frac{b}{a};\qquad \cot B=\frac{a}{b}.$$

與A角諸函數比較之,即見

$$\sin A=\cos B;\qquad \csc A=\sec B;$$

$$\cos A=\sin B;\qquad \sec A=\csc B;$$

$$\tan A=\cot B;\qquad \cot A=\tan B.$$

因$A+B=90°$(即A與B互為餘角),故上述之結果,可簡述之如下:

定理. 一銳角之函數等於其餘角之餘函數(Co-function)*

上述定理可書 如下:

$$\sin A=\cos(90°-A);\qquad \csc A=\sec(90°-A);$$

$$\cos A=\sin(90°-A);\qquad \sec A=\csc(90°-A);$$

*正弦與餘弦,互謂餘函數 同理,正切與餘切,正割與餘割,均可互謂餘函數