DAXUESHUXUE

普通高等教育“十二五”规划教材

大学数学（经管类）

主编 杨青 朱成莲
副主编 徐新亚 陈学华

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育"十二五"规划教材

大学数学

（经管类）

主编　杨　青　朱成莲
徐新亚　陈学华

同济大学出版社

内 容 提 要

本书是一本为经济管理专业大学生编写的大学数学教科书，内容完全参照全国研究生入学考试“数学三”考试大纲的要求编写. 该书结构严谨，内容详实，例证充分，实用性强，每一节都配备适量的课后习题，用于复习巩固该节内容. 书中的例题和习题的难度按从低到高进行梯级配备，许多近年数学三的考研原题被选入. 为方便学生学习，编者将绝大多数课后习题的简答放在书后的附录中，便于对照查阅.

本书完全能够满足高校经管类各专业学生的学习需要，既是教科书，又适合自学，可选作高校经济管理专业大学数学的教材，也可作为相关专业学生考研复习时的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学:经管类 / 杨青，朱成莲等主编. -- 上海：同济大学出版社，2013.7

ISBN 978-7-5608-5217-1

Ⅰ.①大… Ⅱ.①杨…②朱… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 153467 号

普通高等教育“十二五”规划教材

大学数学(经管类)

主　编　杨　青　朱成莲　徐新亚　陈学华

责任编辑　张　莉　**责任校对**　徐春莲　**封面设计**　潘向蓁

出版发行　同济大学出版社　www.tongjipress.com.cn

(地址:上海市四平路 1239 号　邮编:200092　电话:021-65985622)

经　销　全国各地新华书店

印　刷　同济大学印刷厂

开　本　787 mm×960 mm　1/16

印　张　27

字　数　540 000

版　次　2013 年 7 月第 1 版　2013 年 7 月第 1 次印刷

书　号　ISBN 978-7-5608-5217-1

定　价　48.00 元

前言

大学数学是理、工、农、经各专业学生重要的必修课和基础课，它具有高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性. 大学数学不仅是学习后继课程必不可少的基础，而且对于训练和培养学生的数学素养、理性思维、抽象概括、逻辑推理、空间想象以及分析解决实际问题等的能力有着至关重要的作用.

对经管类各专业的学生而言，大学数学的作用尤为重要. 通过学习大学数学，能逐步培养学生对各种经济管理问题的抽象概括和建立模型、用数学工具进行逻辑推理和空间想象等方面的能力，使学生能够综合运用所学知识进行比较熟练的运算，养成终身的自学能力和良好的生活习惯，提高学生的综合素质，从而达到为社会培养优秀人才的目的.

高等教育的大众化，给高校的教育提出了新的要求和更高标准；中学数学教材内容的调整，也给大学数学的教学提出了新的任务. 另外，大学数学课程本身也要求我们在经典内容的基础上，融入近现代数学的思想、观点和概念，增加现代数学的术语、符号和方法. 为造就 21 世纪具有更多知识、更高素质的大学生，需要我们在转变教育思想和教育观念、优化课程体系和改革教学内容、教学方法和教学手段等方面进行有益的探索和尝试，在提高教育质量的道路上不断实践并努力创新，使学生能够在数学理论学习的基础上，比较系统地掌握本课程的基本概念、基本理论和分析与解决问题的方法，培养辩证唯物主义观点和科学态度，为以后专业课程的学习提供必要的数学知识，打下扎实的数学基础.

然而，由于大学数学自身的抽象性及其独有的逻辑方式，它成为众多学生尤其是经管类各专业学生学习中的一大难关. 对此，国内从事经济管理专业大学数学教学工作的专家学者们一直在进行探索，千方百计改进教学手段，提高教学质量，各种精品课程、优秀教材不断出现. 但是，要让大学数学教材真正符

合当今社会经管类专业教学需要却是一个重大课题.我们编写的《大学数学(经管类)》一书,希望在这方面作一次有益的尝试.如果该书能够达到或部分达到这个目的,那将是对我们工作的巨大鞭策和鼓舞.

全书共分8章.第1章 函数极限与连续;第2章 一元函数微分学;第3章 一元函数积分学;第4章 无穷级数;第5章 二元函数的微分与积分;第6章 常微分方程与差分方程;第7章 线性代数;第8章 概率论与数理统计.各章内容参照近年全国研究生入学考试数学三考试大纲要求编写,每一节配备适量的课后习题,供师生在教学中选用.为方便学生自学,我们将绝大多数的课后习题的简答放在本书的附录中,便于对照查阅.本书第1章至第3章由杨青同志执笔;第3至第6章由徐新亚同志执笔;第7章由陈学华同志执笔;第8章由朱成莲同志执笔.全书最后由杨青同志统筹.

为了增强教材的针对性和适用性,我们在教学内容和结构体系上花费了巨大心血,对绝大多数的数学概念、定理、结论、例题等进行严格筛选,反复斟酌,使之适合相关的经济模型.语言叙述方面,在注意保持数学逻辑的基础上,注意贴合当代语言,使本书既是教科书,又适合自学.

在本书的编写过程中,我们得到了我校数学科学学院的领导和师生的大力支持和无私帮助,我们对此表示由衷的感谢,特别要感谢陈光曙教授、柏传志教授、周友士教授和郭嵩、王晓晶、朱守丽、严定军等老师.正是他们的鼓励和奉献,才有了我们将这本书完成的决心和动力.

由于我们的水平有限,书中一定存在着这样或那样的疏漏和错误,因此,恳请各位专家、同仁和广大师生不吝赐教.

编　者

2013年7月

目　录

第 1 章　函数、极限与连续

初等数学研究的主要是常量，而高等数学研究的则是变量. 客观世界中的变量之间往往相互依存、相互作用、相互联系，这种关系称为函数关系，研究函数的有效工具是极限. 本章中，将介绍函数、极限与连续等基本概念，以及它们的一些基本性质.

1.1　函　数

1.1.1　函数的概念

在研究自然现象、客观规律和经济现象、经济规律时，常常会遇到各种不同的量，其中有些量在过程中始终不变，只取一个值，这种量叫**常量**；还有些量在同一问题中可以取不同的值，这种量叫**变量**.

通常用字母 a, b, c 等表示常量；用字母 x, y, z 等表示变量.

客观世界中的变量都不是孤立存在的，变量与变量之间往往相互作用、相互依赖和相互影响，这种关系就是数学上的函数关系. 函数是微积分学中的基本概念，下面给出函数的定义.

定义 1.1　设 D 是一个数集，若对 D 中的每一个数 x，按照对应法则 f，总可以确定唯一的数值 y 与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作：

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，D 称为**定义域**，对应法则 f 称为**函数关系**. 当自变量 x 取遍定义域 D 内的每一个值时，所得到的变量 y 的所有值的全体称为函数 $y = f(x)$ 的**值域**，记作 $f(D)$. 由此可见，对应法则 f 和函数的定义域 D 是构成函数的两大要素.

函数记号 $f(x)$ 中的字母"f"，还可用其他的英文字母或希腊字母，如"φ"、"g"、"F"、"G"、"Φ"等表示，相应地函数可以记作 $y = \varphi(x)$，$y = g(x)$，$y = F(x)$，$y = G(x)$ 等.

函数的定义域与值域通常用**区间**表示. 区间是常用的一类数集，大体可分为有限区间和无限区间，其中有限区间包括以下四种（设 a, b 为实数，且 $a < b$）：

开区间
$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\};$$

闭区间
$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\};$$
左开右闭区间
$$(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\};$$
左闭右开区间
$$[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}.$$

有时将 $(a, b]$ 与 $[a, b)$ 统称为半开半闭区间. 无限区间共有以下五种:
$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\};$$
$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\};$$
$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\};$$
$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\};$$
$$(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}.$$

开区间 $(a-\delta, a+\delta)$（设 $a, \delta \in \mathbf{R}$, 且 $\delta > 0$）称为点 a 的**δ 邻域**, 记为 $U(a, \delta)$, 即
$$U(a, \delta) = (a-\delta, a+\delta) = \{x \mid (a-\delta < x < a+\delta)\}$$
$$= \left\{x \,\middle|\, |x-a| < \delta\right\}.$$
点 a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径; 邻域 $U(a, \delta)$ 去掉中心 a 后, 称为点 a 的去心 δ 邻域, 记作 $\mathring{U}(a, \delta)$, 即
$$\mathring{U}(a, \delta) = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$$
是两个开区间的并集, 其中 $(a-\delta, a)$ 称为点 a 的**δ 左邻域**, $(a, a+\delta)$ 称为点 a 的**δ 右邻域**.

1.1.2 函数的表示法

函数的表示法主要有以下三种:

公式法(又称解析法)是用数学式子表示函数的方法. 例如 $y = x\sin\frac{1}{x}$, $y = \sqrt{1-x^2}$ 等.

图像法是用坐标平面上的图形表示函数的方法. 所谓 $y = f(x)$ 的图形, 指的是坐标平面上的点集
$$\{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}.$$
一个函数的图形通常是平面内的一条曲线.

表格法是用表格表示函数的方法. 例如: 三角函数表.

例 1 设函数 $f(x)=\begin{cases}2+x, & x\leqslant 0,\\ 2^x, & x>0,\end{cases}$ 求:

(1) 函数的定义域;

(2) $f(0)$, $f(-1)$, $f(3)$, $f(a)$, $f[f(-1)]$;

(3) 画出函数的图形.

解 (1) 函数的定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$.

(2) 由 $0\in(-\infty,0]$, $-1\in(-\infty,0]$, 此时 $f(x)=2+x$, 得 $f(0)=2+0=2$, $f(-1)=2+(-1)=1$.

因 $3\in(0,+\infty)$, 此时 $f(x)=2^x$, 得 $f(3)=2^3=8$.

当 $a\leqslant 0$ 时, $f(a)=2+a$; 当 $a>0$ 时, $f(a)=2^a$.

因 $f(-1)=1$, 所以 $f[f(-1)]=f(1)=2^1=2$.

(3) 函数 $f(x)$ 的图形如图 1-1 所示.

例 2 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$, 值域 $f(D)=[0,+\infty)$, 它的图形如图 1-2 所示.

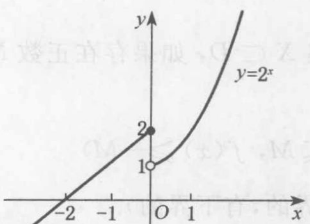

图 1-1

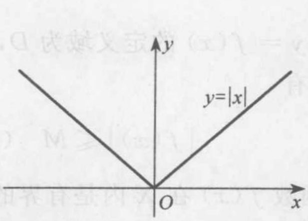

图 1-2

例 3 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$, 值域 $f(D)=\{-1,0,1\}$, 它的图形如图 1-3 所示. 显然, 对任意实数 x, 有 $|x|=\operatorname{sgn}x\cdot x$.

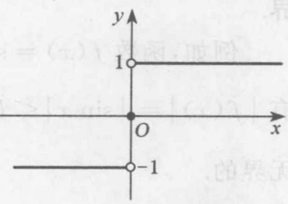

图 1-3

例 4 取整函数 $y=[x]$.

对任意实数 x, 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 例如:

$\left[-\frac{4}{3}\right]=-2$，$[2]=2$，$[\sqrt{10}]=3$，$[\pi]=$

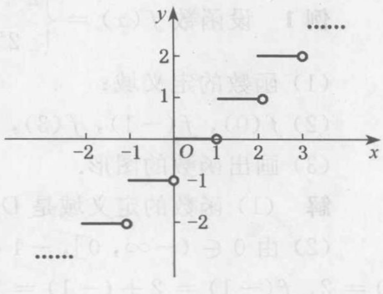

图 1-4

3. 这个函数的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $f_D=Z$，它的图形如图 1-4 所示.

例 5 狄利克雷函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $f(D)=\{0,1\}$.

上述例子中的几个函数具有共同特征：在自变量的不同变化范围内的对应法则由不同的解析式表示，通常称其为**分段函数**.

分段函数是一个函数，在自然科学、工程技术和经济管理中常用到这类函数.

1.1.3 函数的几种特性

在数学逻辑推理中，为了书写方便，通常用符号"$\forall$"表示"任意"，用"$\exists$"表示"存在"或"找到".

1. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，实数集 $X\subset D$，如果存在正数 M，使得对 $\forall x\in X$ 都有

$$|f(x)|\leqslant M\quad(f(x)\leqslant M,\ f(x)\geqslant -M)$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 内是有界的(有上界的，有下界的).

如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 X 内是无界的(无上界的，无下界的)，即对 $\forall M>0$，$\exists x_1\in X$，使得 $|f(x_1)|>M\quad(f(x_1)>M,\ f(x_1)<-M)$.

显然，**函数 $f(x)$ 在 X 内有界的充要条件是函数 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界.**

例如，函数 $f(x)=\sin x$，在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，因对 $\forall M\geqslant 1$，都有 $|f(x)|=|\sin x|\leqslant M$；函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内有下界，但无上界，因而是无界的.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对于 I 内的任意两点 x_1，x_2，

(1) 当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ **在区间 I 上是单调增加的.**

(2) 当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 $y = f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少的**.

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

单调增加的函数图像如图 1-5 所示，单调减少的函数图像如图 1-6 所示.

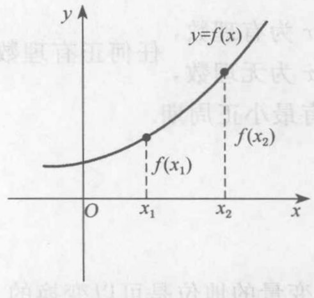

图 1-5

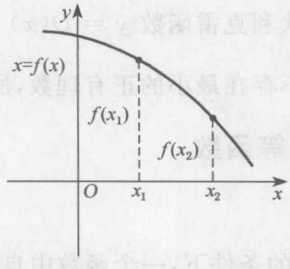

图 1-6

函数的单调性与所讨论的函数的区间有关. 例如，函数 $y = x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的，在 $(-\infty, 0]$ 上是单调减少的；但在 $(-\infty, +\infty)$ 上它却不具有单调性.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，即对 $\forall x \in D$，有 $-x \in D$，如果对 $\forall x \in D$，有

$$f(-x) = -f(x),$$

则称 $f(x)$ 为奇函数；如果对 $\forall x \in D$，有

$$f(-x) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数.

例如，$f(x) = x^3$ 为奇函数，$f(x) = x^2$ 为偶函数.

奇函数的图形关于原点对称；偶函数的图形关于 y 轴对称.

4. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在正数 T，使得对 $\forall x \in D$，有 $x + T \in D$，且

$$f(x + T) = f(x)$$

恒成立，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为 $f(x)$ 的一个**周期**.

显然，如果 T 为 $f(x)$ 的一个周期，则对 $\forall n \in \mathbf{N}^+$，$nT$ 也是 $f(x)$ 的周期，通常所说的周期指的是周期函数的**最小正周期**(也叫基本周期).

例如，函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 和 $y=\cos(\omega x+\varphi)$ 都是以 $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$ 为周期的周期函数；函数 $y=\tan(\omega x+\varphi)$ 和 $y=\cot(\omega x+\varphi)$ 都是以 $\dfrac{\pi}{|\omega|}$ 为周期的周期函数.

并非每一个周期函数都有最小正周期.

例如，狄利克雷函数 $y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$ 任何正有理数都是它的周期，因为不存在最小的正有理数，所以它没有最小正周期.

1.1.4 初等函数

1. 反函数

在一定的条件下，一个函数中自变量与因变量的地位是可以变换的. 例如半径为 r 的圆的面积 $S=\pi r^2\ (r\geqslant 0)$，这里半径 r 为自变量，S 为因变量. 如果要从面积 S 确定圆的半径 r 时，有 $r=\sqrt{S/\pi}\ (S\geqslant 0)$. 就这两个函数而言，可以把后一个函数看作是前一个函数的反函数，也可以把前一个函数看作是后一个函数的反函数.

设给定函数 $y=f(x)$，定义域为 D，值域为 W，如果对于 $\forall\, y\in W$，D 中总有唯一的一个 x 满足 $y=f(x)$，这样就得到一个以 y 为自变量的函数，称它为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记为

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in W.$$

因习惯用 x 表示自变量，y 表示因变量，所以总是将函数 $y=f(x)$ 的反函数表示为

$$y=f^{-1}(x),\quad x\in W.$$

在同一坐标系中，$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称. 如图 1-7 所示.

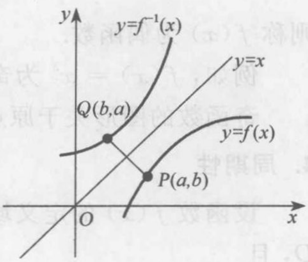

图 1-7

单值单调的函数一定存在反函数.

例如，函数 $y=x^2$，$x\in(0,+\infty)$ 存在反函数 $y=\sqrt{x}$，$x\in(0,+\infty)$；函数 $y=x^2$，$x\in(-\infty,0]$ 存在反函数 $y=-\sqrt{x}$，$x\in[0,+\infty)$，而在 $(-\infty,+\infty)$ 内，函数 $y=x^2$ 没有反函数.

2. 复合函数

函数关系是可以传递的，就是说，如果变量 y 是变量 u 的函数，而 u 又是变量 x 的函数，那么在一定条件下，y 也是变量 x 的函数.

叫做指数函数.

指数函数 $y=a^x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$. 当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少. 其图形总在 x 轴的上方，且过点 $(0,1)$. 如图 1-9、图 1-10 所示.

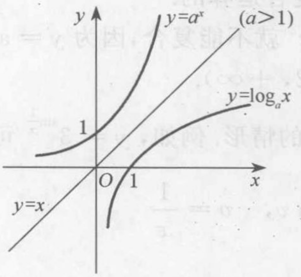

图 1-9

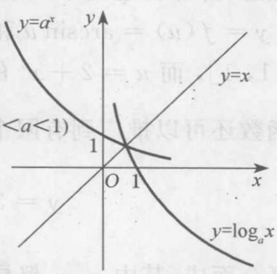

图 1-10

(4) **对数函数**

函数

$$y=\log_a x \quad (a>0,\text{且 } a\neq 1,\ a \text{ 是常数})$$

叫做**对数函数**.

对数函数是指数函数的反函数，它的定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，其图像总过点 $(1,0)$. 当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少. 其图形与 $y=a^x$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称. 如图 1-9、图 1-10 所示.

以 e 为底的对数函数 $y=\log_e x$（其中 $e=2.718\,281\,8\cdots$ 是一个无理数）叫做**自然对数函数**，简记作 $y=\ln x$.

(5) **三角函数**

共有六个，分别是

正弦函数 $y=\sin x$（图 1-11）；

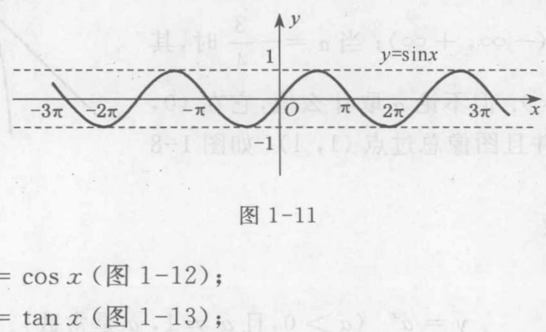

图 1-11

余弦函数 $y=\cos x$（图 1-12）；

正切函数 $y=\tan x$（图 1-13）；

余切函数 $y=\cot x$（图 1-14）；

一般地，设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，其定义域为 D，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，其值域 $W\subset D$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，u 称为**中间变量**.

例如，$y=\sin\ln x$ 可以看作是由 $y=\sin u$ 和 $u=\ln x$ 复合而成的.

必须注意：并非任意两个函数都能进行复合运算的.

例如，$y=f(u)=\arcsin u$ 和 $u=2+x^2$ 就不能复合，因为 $y=\arcsin u$ 的定义域是 $[-1,1]$，而 $u=2+x^2$ 的值域是 $[2,+\infty)$.

复合函数还可以推广到有限个函数复合的情形. 例如，$y=3^{\sin\frac{1}{x}}$ 可以看成由

$$y=3^u,\ u=\sin v,\quad v=\frac{1}{x}$$

三个函数复合而成，其中 u，v 都是中间变量.

3. 初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**.

(1) **常函数**

函数

$$y=C$$

叫做常函数.

它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，它是偶函数且有界.

(2) **幂函数**

函数

$$y=x^{\alpha}\quad(\alpha\text{ 为常数})$$

叫做幂函数.

幂函数的定义域取决于 α 的取值，例如，当 $\alpha=3$ 时，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$；当 $\alpha=-\dfrac{3}{4}$ 时，其定义域为 $(0,+\infty)$. 但不论 α 取什么值，它在 $(0,+\infty)$ 内有定义，并且图像总过点 $(1,1)$，如图 1-8 所示.

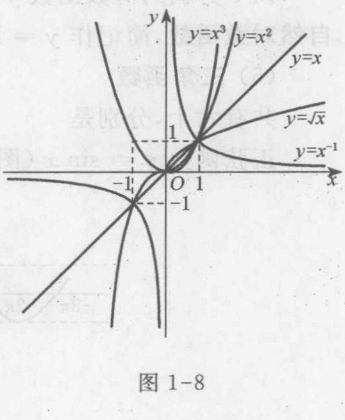

图 1-8

(3) **指数函数**

函数

$$y=a^x\quad(a>0,\text{且 }a\neq1,\ a\text{ 是常数})$$

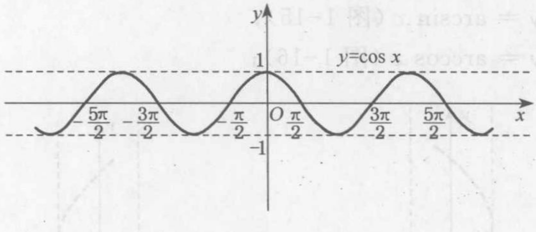

图 1-12

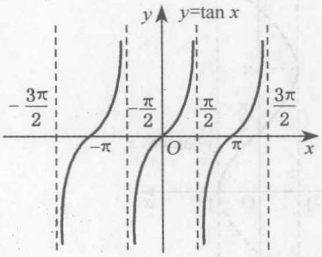

图 1-13

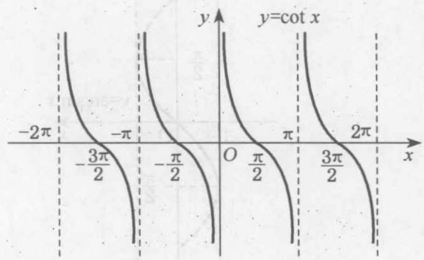

图 1-14

正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$;

余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$,值域都是 $[-1,1]$;它们都是以 2π 为周期的周期函数且都有界;$y=\sin x$ 为奇函数,$y=\cos x$ 为偶函数.

正切函数 $y=\tan x$ 和余切函数 $y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数,它们都是奇函数,正切函数的定义域为

$$D=\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R},\ x\neq n\pi+\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbf{Z}\right\};$$

余切函数的定义域为

$$D=\{x\mid x\in\mathbf{R},\ x\neq n\pi,\ n\in\mathbf{Z}\},$$

它们的值域都是 $(-\infty,+\infty)$.

正割函数 $y=\sec x$ 和余割函数 $y=\csc x$ 都是以 2π 为周期的周期函数,并且在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内都是无界函数.

(6) **反三角函数**

反三角函数是三角函数的反函数. 常用的反三角函数有

反正弦函数 $y = \arcsin x$（图 1-15）；

反余弦函数 $y = \arccos x$（图 1-16）；

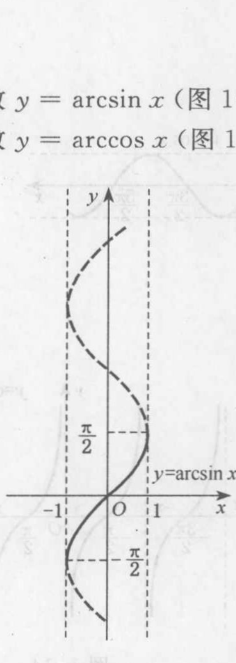

图 1-15

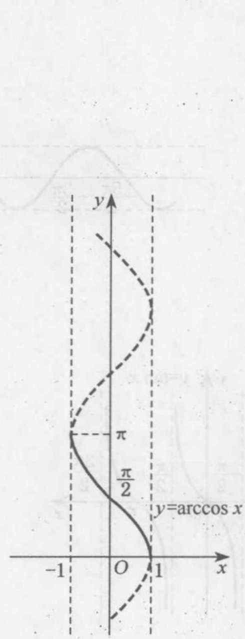

图 1-16

反正切函数 $y = \arctan x$（图 1-17）；

反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$（图 1-18）.

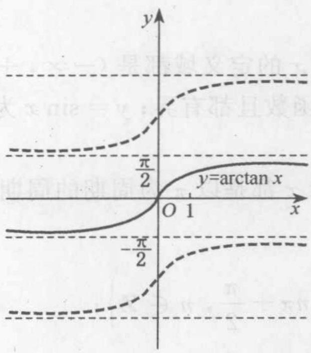

图 1-17

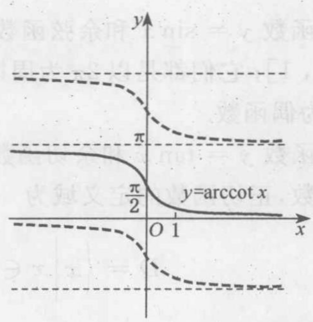

图 1-18

这四个反三角函数均为多值函数，按下列区间取其一个单值分支，称为**主值分支**，即

$$y = \arcsin x，定义域\ D = [-1,\ 1]，值域\ R = \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]；$$

$$y = \arccos x，定义域\ D = [-1,\ 1]，值域\ R = [0,\ \pi]；$$

$$y = \arctan x，定义域\ D = (-\infty,\ +\infty)，值域\ R = \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)；$$