插值型无网格方法

任红萍 著

国防大学出版社

插值型无网格方法

任红萍著

国防大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

插值型无网格方法/任红萍著. -- 北京：国防大学出版社，2012.6

ISBN 978-7-5626-1988-8

Ⅰ.①插… Ⅱ. ①任… Ⅲ. ①数值方法 Ⅳ. ①O241

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第123925号

插值型无网格方法

任红萍著

出版发行：国防大学出版社

地　　址：北京市海淀区红山口甲3号

邮政编码：100091

联系电话：（010）66772856

责任编辑：冯国权

经　　销：新华书店

印　　刷：北京七彩星印刷有限公司

开　　本：850毫米X1168毫米

印　　张：6

字　　数：100千字

版　　次：2012年6月第1版6月第1次印刷

印　　数：500 册

定　　价：25.00元

总　序

2012年，太原科技大学将迎来60周年华诞。值此六秩荣庆之际，我校的专家学者推出了这套学术丛书，以此献礼，共襄盛举。

六十年前，伴随着新中国的成立，伟业初创，百废待兴，以民族工业为先锋的社会主义现代化建设蓬勃兴起，太原科技大学应运而生。六十年来，几代科大人始终心系民族振兴大业，胸怀制造强国梦想，潜心教书育人，勇担科技难题，积极服务社会，为国家装备制造行业发展壮大和社会主义现代化建设做出了积极贡献。四万余名优秀学子从这里奔赴国民经济建设的各个战场，涌现出一大批杰出的科学家、优秀的工程师和知名的企业家。作为新中国独立建设的两所“重型机械”院校之一，今天的太原科技大学已发展成为一所以工业为主，“重大技术装备”领域主流学科特色鲜明，多学科协调发展的教学研究型大学，成为国家重型机械工业高层次人才培养和高水平科技研发的重要基地之一。

太原科技大学一直拥有浓郁的科研和学术氛围，众位同仁在教学科研岗位上辛勤耕耘，硕果累累。这套丛书的编撰出版，定能让广大读者、校友和在校求学深造的莘莘学子共享我校科技百花园散发的诱人芬芳。

愿太原科技大学在新的征途上继往开来、再创辉煌。

谨以为序。

太原科技大学校长　郭勇义

目　录

第一章　绪论 …………………………………………………………（1）
　第一节　计算科学中的数值方法 ………………………………（1）
　第二节　无网格方法概述 ………………………………………（1）
　第三节　无网格方法研究进展 …………………………………（5）
　第四节　无网格方法目前存在的问题 …………………………（16）
　第五节　本文的主要工作及创新点 ……………………………（17）
第二章　无网格方法介绍 ……………………………………………（19）
　第一节　无网格方法的近似函数 ………………………………（19）
　第二节　无网格方法的离散原理 ………………………………（22）
　第三节　本质边界条件的施加 …………………………………（25）
　第四节　现有无网格方法小结 …………………………………（25）
第三章　改进的移动最小二乘插值法 ………………………………（27）
　第一节　移动最小二乘法 ………………………………………（27）
　第二节　改进的移动最小二乘插值法 …………………………（31）
　第三节　改进的移动最小二乘插值法的插值特性 ……………（35）
　第四节　权函数的选择 …………………………………………（40）
　第五节　小结 ……………………………………………………（43）
第四章　复变量移动最小二乘插值法 ………………………………（44）
　第一节　复变量移动最小二乘法 ………………………………（45）
　第二节　改进的复变量移动最小二乘法 ………………………（47）
　第三节　复变量移动最小二乘插值法 …………………………（52）
　第四节　复变量移动最小二乘插值法的插值特性 ……………（55）

第五节　小结 …………………………………………………………（58）
第五章　势问题的无单元 Galerkin 方法 ………………………………（59）
第一节　势问题的积分弱形式 ……………………………………………（59）
第二节　势问题的无单元 Galerkin 方法 ………………………………（60）
第三节　算法实施流程 ……………………………………………………（63）
第四节　小结 ………………………………………………………………（65）
第六章　势问题的插值型无单元 Galerkin 方法 ………………………（66）
第一节　势问题的积分弱形式 ……………………………………………（66）
第二节　势问题的插值型无单元 Galerkin 方法 ………………………（67）
第三节　算法实施流程 ……………………………………………………（69）
第四节　数值算例 …………………………………………………………（70）
第五节　小结 ………………………………………………………………（75）
第七章　弹性问题的无单元 Galerkin 方法 ……………………………（76）
第一节　弹性问题的基本方程 ……………………………………………（76）
第二节　弹性问题的无单元 Galerkin 方法 ……………………………（77）
第三节　算法实施流程 ……………………………………………………（80）
第四节　小结 ………………………………………………………………（82）
第八章　弹性问题的插值型无单元 Galerkin 方法 ……………………（83）
第一节　弹性问题的插值型无单元 Galerkin 方法 ……………………（86）
第二节　算法实施流程 ……………………………………………………（86）
第三节　数值算例 …………………………………………………………（87）
第四节　小结 ………………………………………………………………（99）
第九章　势问题的插值型边界无单元法 ………………………………（100）
第一节　势问题的基本解 ………………………………………………（101）
第二节　势问题的边界积分方程 ………………………………………（102）
第三节　势问题的插值型边界无单元法 ………………………………（103）
第四节　数值实现 ………………………………………………………（105）
第五节　奇异积分的处理 ………………………………………………（108）

第六节　算法实施流程 …………………………… （109）
第七节　数值算例 ………………………………… （110）
第八节　小结 ……………………………………… （114）
第十章　弹性问题的插值型边界无单元法 ……………… （115）
第一节　弹性问题的基本解 ………………………… （115）
第二节　弹性问题的边界积分方程 ………………… （117）
第三节　弹性问题的插值型边界无单元法 ………… （120）
第四节　数值实现 ………………………………… （122）
第五节　奇异积分的处理 ………………………… （126）
第六节　算法实施流程 …………………………… （128）
第七节　数值算例 ………………………………… （129）
第八节　小结 ……………………………………… （137）
第十一章　势问题的复变量插值型无单元 Galerkin 方法 （138）
第一节　势问题的积分弱形式 …………………… （138）
第二节　势问题的复变量插值型无单元 Galerkin 方法 （139）
第三节　数值算例 ………………………………… （142）
第四节　小结 ……………………………………… （145）
第十二章　弹性问题的改进的复变量无单元 Galerkin 方法 （146）
第一节　二维弹性问题的复变量无单元 Galerkin 方法 （146）
第二节　数值算例 ………………………………… （149）
第三节　小结 ……………………………………… （151）
第十三章　无网格方法在曲面拟合中的应用 …………… （152）
第一节　实变量移动最小二乘逼近法用于曲面拟合 · （152）
第二节　复变量移动最小二乘插值法用于曲面拟合 · （153）
第三节　小结 ……………………………………… （154）
参考文献 ……………………………………………… （155）

第一章　绪论

第一节　计算科学中的数值方法

当今科学活动可分为三种，即理论、实验和计算。随着计算科学和计算机技术的迅速发展，计算在科学研究和工程分析中的作用越来越重要。特别是目前很多特大工程，如原子弹爆炸、大型舰船和飞机的设计建造等，除了少量的实验之外几乎完全依赖于科学计算和分析。

目前计算科学中的数值方法有加权残数法、有限差分法、有限元法、边界元法和无网格方法等。有限元法目前已成为研究和应用最为广泛的数值方法，在科学研究和工程分析方面发挥了巨大作用，取得了巨大的社会和经济效益。

有限元法将问题所在区域离散为有限单元，在单元上对求解变量建立基于节点的插值函数近似，以变分原理或加权残数法建立控制方程，通过数值积分得到与节点未知量有关的代数方程组，求解此代数方程组就可以得到离散模型的节点变量的数值解，然后由单元上的插值函数就得到了求解域内任一点变量的数值解。有限元法是一种从整体离散化为单元，再从单元分析到形成整体分析的数值方法。有限元法简单直观、计算效率高，一般采用高阶单元或加密网格可获得较高的数值精度。有限元法有效克服了有限差分法对于区域形状的限制，对于各种形状的边界都能灵活处理。但是，有限元法需在整个求解域上进行离散，复杂三维结构的有限元网格生成较为困难，在处理大变形、动态裂纹扩展、流固耦合等问题时，网格有时会发生畸变，因此在数值模拟过程中不可避

免地要进行网格重构，这不仅要花费大量的计算时间，大大降低了计算效率，而且会导致计算精度受损。

边界元法是继有限元法之后的一种基于边界单元和节点的数值方法。边界元法是借助待求解问题的基本解和加权残数法，将描述该问题的偏微分方程定解问题化为边界积分方程，并对求解域的边界进行单元离散而形成的数值方法。边界元法具有半解析、降维、域内应力连续等优点，但边界元法也有其难以克服的缺点，如建立边界积分方程时需要基本解、难以处理复杂问题的边界积分方程中的奇异积分、对裂纹扩展等问题也须进行网格重构等，所有这些问题限制了边界元法的计算效率和应用范围。边界元法在处理大变形和动态裂纹扩展等问题时，也需要进行网格重构，降低了计算效率和计算精度。

为了克服基于网格（单元和节点）的数值方法（如有限元法和边界元法等）对于单元或网格的依赖性，上世纪九十年代以来，一种仅仅基于节点而不需划分单元的数值方法——无网格方法取得了很大的发展。无网格方法试函数的构造是建立在一系列离散的节点上，场点与节点之间的联系不再通过单元实现，从而摆脱了网格或单元的约束，在涉及网格畸变、网格移动等问题时不再需要网格重构，显示出了较为明显的优势。

无网格方法目前已成为计算科学研究的热点之一。由于其研究和发展的时间较短，目前尚未解决的问题也较多，对其相关的理论和应用进行研究是非常重要的。

第二节　无网格方法概述

无网格方法的研究已有十几年的历史，国际上目前将基于点的近似构造试函数（trial function）、不需要划分单元的各种数值方法称为无网格方法（Meshless method，meshfree method）。

与基于网格的有限元法一样，无网格方法的实施同样包括三方面内容：试函数的构造、微分方程的离散和边界条件的施加。

无网格方法构造试函数的方法与基于网格的有限元法不同。在由试函数求得形函数后，无网格方法建立求解方程的方法与有限元法相同。

无网格方法的核心部分在于形函数的构造，这也是无网格方法与其它数值方法的根本区别所在。目前无网格方法中形成形函数的方法主要有：光滑粒子法（Smooth Particle Hydrodynamics Method，简称 SPH）、重构核粒子法（Reproducing Kernel Particle Method，简称 RKPM）、移动最小二乘法（Moving Least-Squares Approximation Method，简称 MLS）、单位分解法（The Partition of Unity Method）、径向基函数法（Radial Basis Functions，简称 RBF）以及点插值法（Point Interpolation Method，简称 PIM）等。

无网格方法建立求解方程的方法主要有加权残数法、变分原理和 Petro-Galerkin 法和边界积分方程方法等。

与有限元法不同，一般无网格方法构造的试函数是非线性的逼近或拟合，不具有插值特性，因此在基于 Galerkin 离散方案的无网格方法中，本质边界条件的施加并不像有限元法那样容易，必须通过一定的方法引入边界条件。目前已提出了多种处理边界条件的有效方法，如 Lagrange 乘子法、直接配点法、罚函数法等。

目前发展的无网格方法有十几种，它们的主要区别就在于使用了不同的形函数或微分方程的等效形式，主要有光滑粒子法（Smooth Particle Hydrodynamics，即 SPH）、重构核粒子法（Reproducing Kernel Particle Method，即 RKPM）、多尺度重构核粒子法（Multi-Scale Reproducing Kernel Particle Method，即MRKP）、扩散单元法（Diffuse Element Method，即 DEM）、无单元 Galerkin 方法（Element-Free Galerkin Method，即 EFG）、Hp-clouds 无网格方法、无网格局部 Petrov-Galerkin 方法（Meshless Local Petrov-

Galerkin Method,即 MLPG)、有限点法(The Finite Point Method,即 FPM)、小波粒子方法(Wavelet Particle Method,即 WPM)、径向基函数法(Radial Basis Functions Method,即 RBF)、自然单元法(Natural Element Method, 简称 NEM)、移动粒子有限元法 (Moving Particle Finite Element Method, 即 MPFEM)、无网格有限元法(Meshless Finite Element Method,即 MFEM)、复变量无网格方法以及边界积分方程的无网格方法(Boundary Integral Equation Method,即 BIE)等。

无网格方法作为一种数值方法，是继有限元法之后科学和工程问题数值方法的重要发展。无网格方法在处理问题时只需要节点信息,不需要对求解域进行网格划分,而且在计算过程中可以根据需要在某一区域增加或减少节点,便于进行自适应计算,同时也能提高局部区域的计算精度。一般无网格方法采用的形函数具有高阶连续性且形式灵活,保证计算精度的同时减小了计算难度,力学分析时不必进行应力修匀等工作，并能很好地反映局部高梯度情况,对于不可压缩材料进行计算时可以防止体积闭锁现象。无网格方法的基函数可选择性强，能够包含反映待求问题特性的函数系列,适合于分析具有高梯度、奇异性等特殊性的应用问题。无网格方法不仅适合于解决一般的科学和工程问题，更适于解决裂纹扩展等结构破坏过程仿真、梯度材料等新材料问题的性能分析、高速碰撞和爆破等瞬态动力问题和金属冲压成型等大变形问题,而这些问题的精确分析是科学和工程计算中迫切需要解决的难题。因此，对无网格方法的理论和应用进行研究具有重要的理论意义和工程应用价值。

第三节　无网格方法研究进展

对无网格方法的研究可以追溯到 20 世纪 70 年代对非规则网格有限差分法的研究[58,59],但是由于当时有限元法的巨大成功,无网格方法并未引起人们的广泛注意。直到 20 世纪 90 年代初,Nayroles 等人 [29] 基于移动最小二乘法提出了扩散单元法之后,Belytschko 等对 DEM 进行了改进,提出了著名的无单元 Galerkin 方法,无网格方法才得到了突飞猛进的发展。

1977 年 Lucy 等人提出了光滑粒子法,这是最早出现的无网格方法,主要用于研究无边界的天体问题和流体问题[9,10]。由于光滑粒子法计算精度低、稳定性差,一些学者对该方法进行了改进和完善。Johnson[60]利用归一化光滑函数提高精度;Swegle[61]、Chen[62]和 Dyka[63]等对光滑粒子法中存在的张拉不稳定现象,提出了 SPH 方法不稳定的起因及稳定化方案。目前光滑粒子法已成功应用到爆炸、高速碰撞、材料的动态响应的数值模拟等[60,64-67]。

1981 年,Lancster 等在研究曲面拟合时,建立了移动最小二乘法[12]。移动最小二乘法方法采用完备多项式作为基函数,构造的形函数具有一致性、单位分解性及再生性,所以利用该方法可以将互不相关的节点上的值通过逼近函数进行拟合,得到的拟合函数光滑性好且导数连续。上世纪 90 年代,Nayroles 和 Belytschko 等将移动最小二乘法引入微分方程边值问题的求解中,使得移动最小二乘法成为无网格方法中构造试函数的主要方法之一。

1992 年 Nayroles 等首次将移动最小二乘法和 Galerkin 方法相结合,提出了扩散单元法[29],并分析了 Possion 方程和弹性问题,但是扩散单元法存在计算精度不高、边界条件不容易施加的缺点。1994 年 Belytschko 等对扩散单元法进行了改进,提出了无单元 Galerkin 方法[16],掀起了无网格方法的研究热潮。无单元 Galerkin

方法是目前无网格方法中研究和应用最为广泛的方法之一。

Belytschko 等对无单元 Galerkin 方法中的数值积分以及逼近函数的计算方法进行了研究[68-70],并将该方法应用于求解动态断裂、裂纹扩展以及应力波的传播等动力学问题[71-73];Krysl与Belytschko 开发了一个 ESFLIB 形函数库,并提供接口函数以便于在无单元 Galerkin 方法程序中调用[74];为了避免使用背景网格积分,Beissel 等提出了节点积分方案[75];Smolinski 等给出了无单元Galerkin 方法显式时间积分方案,并用于求解扩散问题[76];Mukherjee 等对移动最小二乘法进行了改进,以方便无单元Galerkin 方法处理边界条件[24];Alves 利用扩展的单位分解有限元权函数讨论了无单元 Galerkin 方法的边界条件的处理方法[77];Kaljevic 利用插值型移动最小二乘法对无单元 Galerkin 方法进行了改进[78];Ponthot 和 Belytschko 给出了无单元 Galerkin 方法的任意 Lagrangian–Eulerian 公式[79];曾亿山、曾清红使用单位分解积分对无单元 Galerkin 方法进行了改进[80]。

Krysl 等将无单元 Galerkin 方法用于板壳分析中[81];Belytschko等利用无单元 Galerkin 方法求解静态和动态断裂问题[82];Sukumar等利用无单元 Galerkin 方法求解了三维断裂问题[83];Belytschko 等利用无单元 Galerkin 方法求解混凝土的断裂问题[84];Xu 等利用无单元 Galerkin 方法求解弹塑性材料的 I 型裂纹扩展问题[85];Kargarmovin 等利用无单元 Galerkin 方法求解弹塑性问题[86];Bouillard 等利用无单元 Galerkin 方法求解 Helmholtz 问题[87];Lee等讨论了无单元 Galerkin 方法的裂纹分析技术[88];Rao 等利用扩展的无单元 Galerkin 方法讨论了非线性断裂问题[89];Fleming 和Belytschko 等提出了求解裂纹尖端应力场的扩展的无单元Galerkin 方法[90];Liew 等人将无单元Galerkin 方法应用于形状记忆合金的变形问题[91];Zhang 等将改进的无单元 Galerkin 方法应用于分析三维势问题[92]。

1996 年 Onate 和 Idelsohn 等采用移动最小二乘法构造逼近函数,采用配点法进行微分方程的离散,提出了有限点法[17],这是一种无需背景积分网格的无网格方法。随后对此方法进行了修正[93],使其在计算中更稳定，效率更高，并将其应用于流体动力学分析[94]。

1998 年 Atluri 和 Zhu 基于移动最小二乘法和微分方程的局部弱形式,提出了无网格局部 Petrov-Galerkin 方法[18-21],该方法在各节点的局部子域上运用了对称的局部弱形式，建立了对应于这一节点子域的积分方程,即积分可在局部子域上完成,不需要背景网格。目前无网格局部 Petrov-Galerkin 方法已被应用于很多领域[95-97]。Shen 和 Atluri 根据无网格局部 Petrov-Galerkin 方法试函数和权函数取自不同函数空间的特点，提出了多种不同的无网格局部 Petrov-Galerkin 方法[98],拓展了这一方法的理论和应用范围。

由于无网格局部 Petrov-Galerkin 方法采用移动最小二乘法构造逼近函数,不具有插值特性,因此边界条件不能像有限元法一样直接施加，一般采用罚函数法或 Lagrange 乘子法施加边界条件，一些学者利用其它方法构造具有插值特性的形函数代替移动最小二乘法的形函数，克服了无网格局部 Petrov-Galerkin 方法中边界条件不易直接施加的缺陷[99, 100]。

1995 年 Liu 等利用函数的积分重构理论，基于 Galerkin 弱形式提出了重构核粒子法[11,101]。重构核粒子法是在光滑粒子法的基础上发展起来的一种较为成熟的无网格方法。光滑粒子法对于非均匀布置的节点不满足线性一致性条件，即使对于均匀布置的节点在边界处亦不满足线性一致性条件,从而导致计算精度受损。为了克服光滑粒子法的不足,Liu 等通过引入修正函数对其核函数进行完善,使修正后的核函数能够满足一致性条件,同时对控制方程采用 Gauss 积分以提高精度。重构核粒子法不仅解决了光滑粒子法在边界上的不一致性，完全消除了光滑粒子法的张力不稳定

性，而且还具备其它无网格方法所不具备的优点[102]：变时频特性、多分辨率特性等，从而使重构核粒子法在不稳定的热传导问题[103]、大变形分析[104,105]、结构动力学[106,107]、微电子机械系统分析[108]、超弹性橡胶材料非线性分析[109]、中厚梁板分析[110]、动力学[111]、结构动力学[112]等诸多领域中得到广泛应用。

Liu 将重构核粒子法和有限元法结合，提出大变形问题的扩展的有限元法[113]。Chen 等对重构核粒子法进行了改进，并应用于不可压缩的有限弹性体分析[114]。Shangwu 等将重构核粒子法应用于二维弹性问题分析[115]。Chen 等还讨论了重构核粒子法的节点插值特性[116]。Danielson 等开发了显式重构核粒子法并行程序，并用于冲击载荷下模拟剪切带和动态断裂问题的研究[117]。

1996 年 Li 和 Liu 将最小二乘法的思想引入积分核中，提出移动最小二乘法的重构核粒子法[118,119]和重构核的分级单位分解方法[120,121]。Liu 等又将小波（wavelet）分析中的尺度伸缩平移、多分辨率概念引入重构核粒子法中，建立了多尺度重构核粒子法（Multiscale Reproducing Kernel Particle Method，即 MRKPM）[28,122]和小波粒子法[31]。多尺度重构核粒子法实现了重构核粒子法的自适应分析，扩大了重构核粒子法的应用范围，一些学者将这一方法应用于声学分析[123]、流体动力学[124]以及大变形问题[125]。

2000 年 Aluru 等采用重构核近似来构造逼近函数，并采用配点格式进行离散，提出了无网格配点法（Meshless Point Collocation Method，简称 PCM）[126]，并用于分析压电元件[127]。

1995 年 Oden 和 Durate 提出了 Hp-Clouds 无网格方法[30,128]，该方法利用移动最小二乘法建立单位分解函数，并由此构造逼近函数，然后由 Galerkin 法建立求解方程。之后又讨论了其自适应方法[129]。Mendoncca 等将该方法用于求解铁摩辛柯梁问题[130]，Garcia 等将其用于求解厚板的弯曲问题[131]，刘欣等将其应用于二维裂纹问题的自适应分析[132]。Oden 等又将有限元形函数作为单位分解函

数，提出了基于 Hp-clouds 的新型 Hp 有限元法[133]。Liszka 等改用配点格式，避免了 Galerkin 格式中用于积分计算的背景网格，提出了 Hp 无网格云团法（Hp Meshless Clouds Method）[134]。

1996 年，Babuska 和 Melenk 提出了单位分解法（Partition of Unity Method，简称 PUM）[135]。Babuska 对单位分解法进行了严格的数学论证，并提出了使用特征解析解进行增强的基函数。Babuska 和 Melenk 等将单位分解法与有限元法相结合，提出了单位分解有限元法（Partition of Unity Finite Element Method，简称 PUFEM）[136] 和广义有限元法（Generalized Finite Element Method，简称 GFEM）[137]。用该方法求解动态裂纹扩展问题时，可以处理任意形状的裂纹，并且不需要重新划分网格[138,139]。

径向基函数法[32]是求解偏微分方程的一种真正无网格方法，且与空间维数无关。径向基函数具有形式简单、各向同性等优点，可以逼近几乎所有的函数[140]。Kansa 将径向基函数和配点法相结合，建立了用于求解双曲、椭圆、抛物型问题的无网格方法[141,142]。Wendland 将径向基函数和 Galerkin 弱形式相结合，建立了相应的无网格方法[143]。Bouhamidi 等将径向基函数和基本解方法结合求解 Helmholtz 问题[144]。

1995 年，Braun 和 Sambridge 基于自然邻域插值构造试函数和权函数，提出了求解偏微分方程的自然单元法[33,145]，该方法的最大特点是采用自然邻点插值构造试函数，试函数的构造不依赖于网格，形函数满足 Kronecker Delta 函数的特性，可以直接施加本质边界条件[146-148]。

Liu 等建立了点插值法[15]。这一方法是以多项式作为基函数，在点的邻域内构造满足 Kronecker Delta 函数特性的试函数，可以方便地施加本质边界条件，不足之处是在计算形函数时容易出现奇异。为了克服这一缺陷，Liu 等提出了矩阵变换法[149]、局部径向点插值法[150]和线性一致径向点插值法[151]。

2002 年 Hao 和 Liu 等提出移动粒子有限元法(Moving Particle Finite Element Method)[34]。该方法的计算精度与有限元法相当,不像其他无网格方法需要花大量时间计算形函数，不需要背景积分网格,而且边界条件容易引入。

2003 年 Idelsohn 等人提出了无网格有限元法[35]。该方法将无网格方法和基于网格的方法相结合，基于 Voronoi 图来形成形函数,具有无网格方法和基于网格的方法的优点,但同时也是介于无网格方法和基于网格的方法之间的一种方法。

边界积分方程的无网格方法是将边界积分方程和移动最小二乘法相结合形成的无网格方法。

目前发展的边界积分方程的无网格方法主要有 Mukherjee 等提出的边界点法(Boundary Node Method,即 BNM)[38-43];Atluri 等提出的局部边界积分方程方法（Local Boundary Integral Equation,即 LBIE)[44-49];程玉民等提出的边界无单元法(Boundary Element-Free Method,即 BEFM)[50-52];姚振汉等提出的杂交边界点法（Hybrid Boundary Node Method)[53];Liu 等提出的边界点插值法(Boundary Radial Point Interpolation Method，即 BRPIM)[54, 55]。

Mukherjee 等提出的边界点法是将移动最小二乘法导出的插值公式代入边界积分方程中，由于采用节点变量的近似解作为基本未知量，所以对源点和场点的位移和面力均需应用移动最小二乘法的插值公式，增加了求解和引入边界条件的复杂性，还需设置"评估点"。

局部边界积分方程方法的思想是在引入局部基本解后在边界节点或内点邻域边界上建立局部边界积分方程，然后引入移动最小二乘法进行求解。局部边界积分方程方法的优点是引入"伴随解"的概念,在内部节点子域应用边界积分方程时,用相关节点位移代替了边界积分方程中的面力项，使该方法既具有完全无网格的优点又具有有限元求解方程格式。这一优点使该方法在求解边