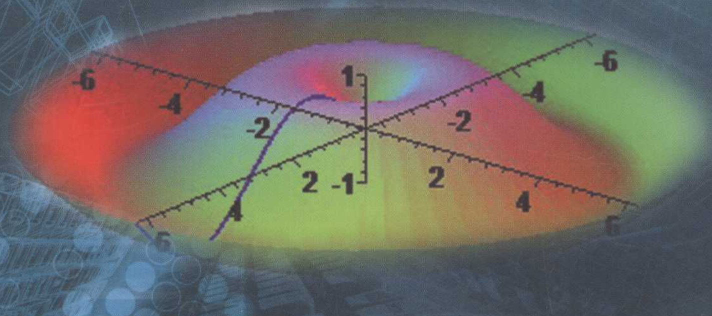
江苏师范大学科学计算与信息技术综合训练中心
江苏省“十二五”数学一级重点学科
江苏省优势学科统计学
数学与应用数学国家级特色专业建设点
江苏省“十二五”高等学校重点专业数学类
资助出版

Maple与数学实验

张晗方　编著



中国矿业大学出版社
China University of Mining and Technology Press

014002318

013
574

Maple 与数学实验

张晗方 编著

北京航空航天大学
藏书
图书馆

O13/574

中国矿业大学出版社

北航 C1688068

01400231 8

内容提要

数学实验是利用数学软件借助于计算机来处理数学问题的一门学科.本书介绍了 Maple 软件在符号运算、数值计算以及绘图与编程方面的功能.全书共 9 章,介绍了 Maple 在初等数学、向量与矩阵、多项式、微积分、代数方程与不等式、微分方程求解中的应用,Maple 程序设计,基于 Maple 的数学实验.

本书可作为高等院校数学专业本科阶段数学实验课程的教材,亦可供相关专业的研究生阅读、参考.

图书在版编目(CIP)数据

Maple 与数学实验/张晗方编著. —徐州:中国矿业大学出版社,2013.4

ISBN 978-7-5646-1850-6

Ⅰ.①M… Ⅱ.①张… Ⅲ.数学—实验—应用软件 Ⅳ.①O1-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 067912 号

书　　名 Maple 与数学实验
编　　著 张晗方
责任编辑 陈振斌
出版发行 中国矿业大学出版社有限责任公司
(江苏省徐州市解放南路　邮编 221008)
营销热线 (0516)83885307　83884995
出版服务 (0516)83885767　83884920
网　　址 http://www.cumtp.com　**E-mail**:cumtpvip@cumtp.com
印　　刷 江苏徐州新华印刷厂
开　　本 787×1092　1/16　**印张** 22.5　**字数** 562 千字
版次印次 2013 年 4 月第 1 版　2013 年 4 月第 1 次印刷
定　　价 30.00 元
(图书出现印装质量问题,本社负责调换)

前　言

随着科学技术的飞速发展，当今世界的各行各业或多或少都渗入了一些计算机知识，特别是航空航天事业、现代信息产业等方面都无处不使用计算机技术，所以计算机技术十分重要，这一点也可以从我国由小学到中学乃至大学都开设了计算机课程窥见一斑.

数学实验是利用数学软件借助于计算机来处理数学问题的一门学科.我国现行的高校数学实验教材，大多数是首先承认学生已经掌握了数学软件，直接介绍利用数学软件来解决数学问题.然而，实际上并非如此，大多数学校都是将数学软件与如何利用数学软件来解决数学问题同时讲授的.因此，数学实验也可以认为是借助于计算机，在介绍数学软件使用方法的同时，讲解如何利用该软件来解决数学问题的一门学科.本书就是采用这一方法进行编写的.

目前，我国高校开设数学实验课程所使用的软件大致有 Maple、Mathematica、Matlab 以及 MathCAD 等.Maple 软件以其强大的符号运算、数值计算以及绘图与编程功能而著称，特别是它灵活多变的二维与三维图形和动画技术，更适合目前课堂教学所制作的课件.与其他软件相比，Maple 软件制作的图形课件既节省时间又更具立体感，所以它更适合需要绘制数学图形的人群使用.因此，对于师范专业的数学实验课程，我们选择了 Maple 软件作为数学实验工具.在编写本书的过程中，考虑到数学实验课程的特点，只介绍了一些常用内容，并且在介绍时力求详细，也正是为了详细而导致本书的篇幅较大，致使有些内容无法再编写进去，例如数理统计方面的内容涉及很少，没有专门用一章的内容来详细介绍，同样，对于其他方面的内容也是如此，比如组合数学、图论、群论等也没有进行介绍.

本书共分 9 章，有些章节的内容是相对独立的，所以教师可以根据实际情况挑选其中的一些内容进行讲授.具体内容介绍如下：

第 1 章介绍了初等数学的知识，其中主要讲述了初等代数运算、Maple 的基本运算以及三角运算.

第 2 章介绍了图形的绘制问题，其中主要介绍了绘制平面图形以及空间立体图形，同时介绍了如何绘制平面与空间的动态图形，并且还讲述了几何变换的图形绘制以及向量场的有关图形绘制等内容.

第 3 章介绍了矩阵代数方面的知识，主要讲述了向量的基本运算与应用以及矩阵与矩阵的运算等.

第 4 章介绍了多项式的知识，其中主要包括多项式的系数、多项式的一些运算，同时还介绍了二次型的配平方问题，多项式的结式与正交多项式的问题.

第 5 章介绍了微积分的知识，其中主要包括极限、导数、级数与积分等内容.

第 6 章介绍了代数方程与不等式的求解问题，其中主要介绍了线性方程(组)与非线性方程(组)的求解，同时还讲述了一元不等式以及线性不等式组的求解问题.

第7章介绍了微分方程的求解问题，主要包括一阶与二阶线性与非线性方程的求解，著名二阶微分方程的求解，以及高阶微分方程(组)的求解问题，最后还介绍了偏微分方程的求解问题.

第8章介绍了Maple程序设计，其中简要介绍了程序的控制结构、定义函数与过程、调试程序与封装程序等内容.

第9章讲述了Maple的应用，其中主要介绍了如何用Maple对数学、物理等方面的问题做实验，这部分主要取自于参考文献中的相关内容.

本书在编写过程中参考了国内外同行关于Maple软件及数学实验的研究成果，在此向他们表示真诚的敬意！本书的出版得到了江苏师范大学科学计算与信息技术综合训练中心、江苏省“十二五”数学一级重点学科、江苏省优势学科统计学、数学与应用数学国家级特色专业建设点、江苏省“十二五”高等学校重点专业数学类等项目的资助，在此深表感谢！中国矿业大学出版社对本书的出版也给予了大力支持，在此一并表示感谢！

由于编者水平所限，疏漏与错误在所难免，敬请读者不吝指正.

张晗方

2012年10月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第1章　初等数学

Maple 具有强大的符号处理和数值计算能力，同时它也具有强大的绘图能力，所以它在初等数学中的作用是不可估量的. 这一章主要介绍 Maple 在初等数学方面的一些应用，包括 Maple 在初等代数方面的运算、Maple 的基本运算以及 Maple 在三角函数方面的应用.

1.1　初等代数运算

1.1.1　实数运算

对于最基本的数值计算，Maple 可以作为一个功能强大的计算器，例如：

```
> (12-sqrt(12^2-4*2*5))/(2*2);
```

$$3-\frac{\sqrt{26}}{2}$$

```
> evalf(%);
```

$$0.450490243$$

其中，evalf( )函数用来求表达式的近似值，它属于 eval( )系列函数中的一个 . eval( )系列函数包括 vela，evala，evalb，evalc，evalf evalhf，evalm，evaln，evalr 等，目的是为了获得一个确定的数值.

又如：

```
> 40!;
```

$$815915283247897734345611269596115894272000000000$$

```
> ifactor(%);
```

$$(2)^{38}(3)^{18}(5)^{9}(7)^{5}(11)^{3}(13)^{3}(17)^{2}(19)^{2}(23)\ (29)\ (31)\ (37)$$

其中，ifactor( )函数用于对整数的素因子分解.

在 Maple 中，以下几个函数常用来对浮点数进行操作：

trunc 表示取选择数值的整数部分；

round 表示将选择数值进行四舍五入操作；

frac 表示取出选择数值的小数部分；

floor 表示求小于选择数值的最大整数；

ceil 表示求大于选择数值的最小整数.

例如：

```
> trunc(-1.56),trunc(1.56);
```

$$-1,1$$

```
> round(-2.56),round(2.56);
```

$$-3,3$$

```
> frac(-2.53),frac(2.53);
```

$$-0.53,0.53$$

```
> floor(-3.57),floor(3.57);
```

$$-4,3$$

```
> ceil(-3.54),ceil(3.54);
```

$$-3,4$$

1.1.2 复数运算

虚数单位在 Maple 中用"I"来表示，例如：

```
> I^2;
```

$$-1$$

复数的实部与虚部可以独立应用，函数 Re( )与 Im( )分别用于获得复数的实部和虚部，例如：

```
> z:=3+4*I;
```

$$z:=3+4\mathrm{I}$$

```
> Re(z),Im(z);
```

$$3,4$$

复数的模可以用函数 abs( )得到，而复数的共轭复数与复角分别可以通过 conjugate( )和 argument( )函数得到，例如：

```
> abs(z);
```

$$5$$

```
> conjugate(z);
```

$$3-4\mathrm{I}$$

```
> argument(z);
```

$$\arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

复数之间的运算很简单，它与实数的运算类似，例如：

```
> (4+3*I)/(5-3*I);
```

$$\frac{11}{34}+\frac{27}{34}\mathrm{I}$$

```
> evalf(%);
```

$$0.3235294118+0.7941176471\mathrm{I}$$

还可以通过转换函数 convert( )将复数转换为极坐标的形式，例如：

```
> convert(4+3*I,polar);
```

$$\mathrm{polar}\left(5,\arctan\left(\frac{3}{4}\right)\right)$$

```
> z:='z':z:=1+sqrt(3)*I;
```

$$z:=1+\sqrt{3}\mathrm{I}$$

```
> convert(z,polar);
```

$$\mathrm{polar}\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$$

```
> z:='z':z:=a+b*I;
```

$$z:=a+b\mathrm{I}$$

```
> convert(z,polar);
```

$$\mathrm{polar}(|a+b\mathrm{I}|,\mathrm{argument}(a+b\mathrm{I}))$$

1.1.3 表达式处理

为了使表达式更好地满足计算需要，Maple 提供了不同的处理和显示方式，其中包括二项式的展开、因式分解、三角函数表达式化简、结果变量标识符赋值和将表达式转换，下面将一一介绍.

1.1.3.1 *表达式的展开、因式分解、化简*

将表达式展开要使用 expand( )函数，例如：

```
> expand((2*x+3*y)^5);
```

$$32x^5+240x^4y+720x^3y^2+1080x^2y^3+810xy^4+243y^5$$

而将一个表达式进行因式分解则需要用到 factor( )函数，例如，将上面的表达式进行分解因式，则为：

```
> factor(%);
```

$$(2x+3y)^5$$

注意，函数 ifactor( )只适用于具体的数字进行素因分解，它不能对一个表达式进行分解因式. 相应地，函数 factor( )也只能对一个表达式进行分解因式，而对于一个具体的数字却不能进行素因分解. 函数 factor(exp,F)表示对表达式 exp 在数域 F 中进行因式分解，当 F 是有理数域时，一般不需要标出参数 F，而当 F 是其他数域时则需要标出. 例如：

```
> factor(2*x^2-x-6);
```

$$(2x+3)(x-2)$$

```
>factor(x^2-1/4);
```

$$\frac{(2x-1)(2x+1)}{4}$$

```
> factor(x^2-5,sqrt(5));
```

$$(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$$

```
> factor(x^3-7,7^(1/3));
```

$$(x^2+x7^{(1/3)}+7^{(2/3)})(x-7^{(1/3)})$$

```
> factor(x^2+1,I);
```

$$(x-\mathrm{I})(x+\mathrm{I})$$

sort( )函数用于对一个多项式降幂排列，而 collect( )函数则是将一个含有其他参变量的多项式按某一个字母相同幂次的系数进行合并. 例如：

```
> sort(3*x^3+5*x^6-3+x^2);
```

$$5x^6+3x^3+x^2-3$$

```
> f:= 32*x^5+240*x^4* y+3*x^4-720*x^2*y^2+1080*x^2*y^3+810*x*y^4 +243*y^
5+3;
```

$$f:=32x^5+240x^4y+x^4-720x^2y^2+1080x^2y^3+810xy^4+243y^5+3$$

```
> collect(f,x);
```

$$32x^5+(240y+3)x^4+(1080y^3-720y^2)x^2+810xy^4+243y^5+3$$

使用 normal( )函数也可以对表达式进行化简，但是它只用于约去分式中分子和分母的公约数，例如：

```
> normal((x^2-3*x+2)/(x-1));
```

$$x-2$$

```
> normal(sin(x)^2+cos(x)^2);
```

$$\sin(x)^2+\cos(x)^2$$

```
> simplify(sin(x)^2+cos(x)^2);
```

$$1$$

在 Maple 中，当对表达式中的变量进行赋值时，可以使用 eval( )函数计算表达式的值，这里的 eval( )函数与 subs( )函数基本上具有相同的功能. 例如：

```
> f:=(x^2-x+2)^3;
```

$$f:=(x^2-x+2)^3$$

```
> eval(f,x=9);
```

$$405224$$

```
> eval(f,x=y-2);
```

$$((y-2)^2-y+4)^3$$

```
> subs(x=y-2,f);
```

$$((y-2)^2-y+4)^3$$

```
> expand(%);
```

$$y^6-15y^5+99y^4-365y^3+792y^2-960y+512$$

1.1.3.2　表达式形式变换

前面提到 convert( )函数可以将复数变为极坐标的形式，下面具体讲解它的作用. convert( )函数可以对表达式进行形式的变换，如坐标变换、拉普拉斯(Laplace)变换、贝塞尔(Bessel)变换、傅立叶(Fourier)变换、矩阵变换等.

下面通过例子来理解 convert( )函数的变换功能. 例如：

```
> convert(56,binary);
```

$$111000$$

上面的例子是用 convert( )函数将十进制的整数 56 转换成二进制的数值 111000.

```
> convert(56,hex);
```

$$38$$

```
> convert('38',decimal,hex);
```

$$56$$

```
> convert(3.1415926,fraction);
```

$$\frac{86598}{27565}$$

```
> convert(25/37,float);
```


此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$0.6756756757$$

上面的命令分别为:将十进制的56转换为十六进制的38、将十六进制的38转换为十进制的56、将浮点数转换为分数及将分数转换为浮点数.再看下面几个例子:

```
> convert([1,2,3,4,5,6,7,8,9,10],`+`);
```

$$55$$

```
> f:='f':f:=seq((2*i+1)*x^i,i=1..10);
```

$$f:=3x,5x^2,7x^3,9x^4,11x^5,13x^6,15x^7,17x^8,19x^9,21x^{10}$$

```
> convert([f],`*`);
```

$$13749310575x^{55}$$

```
> g:='g':g:=(x-1)^3/(x^3-1);
```

$$g:=\frac{(x-1)^3}{x^3-1}$$

```
> convert(g,parfrac,x);
```

$$1-\frac{3x}{x^2+x+1}$$

```
> h:='h':h:=sinh(x)+sin(x);
```

$$h:=\sinh(x)+\sin(x)$$

```
> convert(h,exp);
```

$$\frac{1}{2}\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{e}^x}-\frac{1}{2}\mathrm{I}\left(\mathrm{e}^{(xI)}-\frac{1}{\mathrm{e}^{(xI)}}\right)$$

```
> t:=(6*x-7)/(x^3+2*x^2+x+2);
```

$$t:=\frac{6x-7}{x^3+2x^2+x+2}$$

```
> convert(t,parfrac,x);
```

$$-\frac{19}{5(x+2)}+\frac{19x-8}{5(x^2+1)}$$

用 rationalize( )函数可以对包含根式的分式进行分母有理化,例如:

```
> 1/(2^(1/2)-1);
```

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

```
> rationalize(%);
```

$$1+\sqrt{2}$$

```
> (a^(1/2)+b)/(a+sqrt(a+sqrt(a)));
```

$$\frac{\sqrt{a}+b}{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}$$

```
> rationalize(%);
```

$$\frac{(\sqrt{a}+b)(a-\sqrt{a+\sqrt{a}})(a^2-a+\sqrt{a})}{a^4-2a^3+a^2-a}$$

使用 numer( )函数和 denom( )函数可以分别提取分式的分子与分母,例如:

```
> f:='f':f:=-19/5/(x+2)+1/5*(19*x-8)/(x^2+1);
```

$$f:=-\frac{19}{5(x+2)}+\frac{19x-8}{5(x^2+1)}$$

```
> simplify(f);
```

$$\frac{6x-7}{(x+2)(x^2+1)}$$

```
> numer(f);
```

$$6x-7$$

```
> denom(f);
```

$$(x+2)(x^2+1)$$

上面我们用转换函数 convert( )将一个复杂的有理式转化为部分分式的形式，而在实际运算中，基于减少计算量的考虑，经常用转换函数 convert( )把有理式转化为连分式的形式，例如：

```
> f:='f':f:=(1+x+x^3)/(x^4+2*x^3+5*x^2-3*x+1);
```

$$f:=\frac{1+x+x^3}{x^4+2x^3+5x^2-3x+1}$$

```
> convert(f,'confrac',x);
```

$$\cfrac{1}{x+2+\cfrac{4}{x+\frac{3}{2}+\cfrac{7}{2\left(x-\frac{53}{28}+\cfrac{387}{784\left(x+\frac{11}{28}\right)}\right)}}}$$

1.1.4 求和与求积

Maple 还提供了有限求和与无限求和的操作，它们均是使用求和函数 sum(f(k),k=a..b)，例如：

```
> sum(1/(i^2+3),i=1..10);
```

$$\frac{30829317}{47727316}$$

上面是计算 $\sum_{i=1}^{10}\frac{1}{i^2+3}$ 得到的结果，下面我们求无限和 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$.

```
> sum(1/i^2,i=1..infinity);
```

$$\frac{\pi^2}{6}$$

```
> sum(1/i^3,i=1..infinity);
```

$$\zeta(3)$$

```
> evalf(%);
```

$$1.202056903$$

另外，也可以对任意 n 项求和，例如：

```
> Sum(k^3,k=1..n)=sum(k^3,k=1..n);
```

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{(n+1)^4}{4}-\frac{(n+1)^3}{2}+\frac{(n+1)^2}{4}$$

```
> factor(%);
```

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

又如：

```
> Sum(1/(k*(k+1)*(k+2)),k=1..n)=factor(sum(1/(k*(k+1)*(k+2)),k=1..
n));
```

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

```
> Sum((n+1-k)*sin(k*theta),k=1..n)=sum((n+1-k)*sin(k*theta),k=1..n);
```

$$\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\sin(k\theta) = -\frac{1}{2}\frac{(n\cos(\theta)+\cos(\theta)-n-2)\sin((n+1)\theta)}{-1+\cos(\theta)}$$
$$-\frac{1}{2}\frac{(n\cos(\theta)+\cos(\theta)+n+1)\cos((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}-\frac{1}{2}\frac{\sin(\theta)(n+1)\cos((n+1)\theta)}{-1+\cos(\theta)}$$
$$+\frac{1}{2}\sin((n+1)\theta)(n+1)+\frac{1}{2}\frac{(n\cos(\theta)+\cos(\theta)-n-2)\sin(\theta)}{-1+\cos(\theta)}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{(n\cos(\theta)+\cos(\theta)+n+1)\cos(\theta)}{\sin(\theta)}+\frac{1}{2}\frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{-1+\cos(\theta)}-\frac{1}{2}\sin(\theta)$$

```
> simplify(%);
```

$$\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\sin(k\theta) = \frac{1}{2}\frac{-n+\cos(\theta)^2 n+\sin((n+1)\theta)\sin(\theta)-1+\cos(\theta)^2}{\sin(\theta)(-1+\cos(\theta))}$$

即

$$\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\sin(k\theta) = -\frac{1}{2}\frac{-\sin((n+1)\theta)+\sin(\theta)+n\sin(\theta)}{\cos(\theta)-1}$$

下面介绍二重求和的方法，我们知道

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij},$$

采用这种方法来给出在 Maple 中的二重求和表达式，例如：

```
> Sum(Sum(a[i,j],j=i+1..6),i=1..5)=sum(sum(a[i,j],j=i+1..6),i=1..5);
```

$$\sum_{i=1}^{5}\left(\sum_{j=i+1}^{6} a_{i,j}\right) = a_{1,2}+a_{1,3}+a_{1,4}+a_{1,5}+a_{1,6}+a_{2,3}+a_{2,4}+a_{2,5}+a_{2,6}+a_{3,4}+a_{3,5}+ a_{3,6}+a_{4,5}+a_{4,6}+a_{5,6}$$

又比如：

```
> (sum(m[i],i=1..6)*sum(m[i]*r[i]^2,i=1..6))>=sum(sum(m[i]*m[j]*a[i,
j]^2,j=i+1..6),i=1..5);
```

$$m_1m_2a_{1,2}^2+m_1m_3a_{1,3}^2+m_1m_4a_{1,4}^2+m_1m_5a_{1,5}^2+m_1m_6a_{1,6}^2+m_2m_3a_{2,3}^2+m_2m_4a_{2,4}^2+m_2m_5a_{2,5}^2+ m_2m_6a_{2,6}^2+m_3m_4a_{3,4}^2+m_3m_5a_{3,5}^2+m_3m_6a_{3,6}^2+m_4m_5a_{4,5}^2+m_4m_6a_{4,6}^2+m_5m_6a_{5,6}^2\leqslant(m_1+ m_2+m_3+m_4+m_5+m_6)(m_1r_1^2+m_2r_2^2+m_3r_3^2+m_4r_4^2+m_5r_5^2+m_6r_6^2)$$

使用 add( )函数也可以进行求和，但它不能推广到任意 n 项的求和，例如：

```
> add(k^2,k=1..100);
```

338350

但它就不能表示为：

```
> add(k^2,k=1..n);
Error,unable to execute add
```

对于连乘，Maple 使用 product( )函数，例如：

```
> Product(i^2+2*i,i=1..n)=product(i^2+2*i,i=1..n);
```

$$\prod_{i=1}^{n}(x^2+2i)=\frac{1}{2}\Gamma(n+1)\Gamma(n+3)$$

```
> Product(1+1/k^2,k=1..infinity)=product(1+1/k^2,k=1..infinity);
```

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)=\frac{\sinh(\pi)}{\pi}$$

由于

```
> evalf(1/Pi*sinh(Pi));
```

$$3.676077910$$

故有

```
> Product(1+1/k^2,k=1..infinity)<4;
```

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)<4$$

```
> Product(1-x^2/k^2,k=1..infinity)=product(1-x^2/k^2,k=1.. infinity);
```

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)=\frac{\sin(\pi x)}{x\pi}$$

```
> Product(1-x^2/(Pi*k)^2,k=1..infinity)=product(1-x^2/(Pi*k)^2,k=1..
infinity);
```

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2k^2}\right)=\frac{\sin(x)}{x}$$

这里我们可以利用关系式 $\cos x=\dfrac{\sin 2x}{2\sin x}$，求得 $\cos x$ 的表达式：

```
> Product(1-(2*x)^2/(Pi*k)^2,k=1..infinity)/Product(1-x^2/(Pi*k)^2,
k=1..infinity)=simplify(product(1-(2*x)^2/(Pi*k)^2,k=1..infinity)/
product(1-x^2/(Pi*k)^2,k=1..infinity));
```

$$\frac{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2k^2}\right)}{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2k^2}\right)}=\cos(x)$$

连乘还可以使用 mul( )函数，但它只对具体的有限项进行，而对于任意 n 项犹如前面的 add( )函数一样，不能进行求积. 例如：

```
> mul(i^2+2*i,i=1..20);
```

$$136729181390107329533142903029760000000$$

但它就不能表示为：

```
> mul(i^2+2*i,i=1..n);
Error,unable to execute mul
```

对于二重求积，我们也可以采用二重求和的方法来进行，例如：

```
> Product(Product(b[i,j],j=i+1..6),i=1..5)=product(product(b[i,j],j
=i+1..6),i=1..5);
```

$$\prod_{i=1}^{5}\left(\prod_{j=i+1}^{6} b_{i,j}\right)=b_{1,2}b_{1,3}b_{1,4}b_{1,5}b_{1,6}b_{2,3}b_{2,4}b_{2,5}b_{2,6}b_{3,4}b_{3,5}b_{3,6}b_{4,5}b_{4,6}b_{5,6}$$

```
> Product(Product(m[i]*m[j],j=i+1..6),i=1..5)=product(product(m[i]*m
[j],j=i+1..6),i=1..5);
```

$$\prod_{i=1}^{5}\left(\prod_{j=i+1}^{6} m_i\, m_j\right)=m_1^5 m_2^5 m_3^5 m_4^5 m_5^5 m_6^5$$

对于前面求和中的 $\zeta(3)$，实际上它是 zeta(z)函数中当 $z=3$ 时的情形，而 zeta(z)函数的具体定义是：

设 $z\in\mathbf{C}$，且 $\mathrm{Re}(z)>1$，则

$$\zeta(z)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^z}.$$

另外，对于 zeta(z)函数还有 $\zeta(n,z)$的形式，它等于 $\zeta(z)$的 n 阶导数，即

$$\zeta(n,z)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^z}\right)^{(n)}.$$

同样，对于不是非负整数的参数 v，还有

$$\zeta(n,v,z)=\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(i+v)^z}\right)^{(n)}.$$

通常又把 zeta 函数 $\zeta(0,v,z)$叫做 Hurwitz Zeta 函数.

例如：

```
> Zeta(2.2);
```

$$1.490543257$$

```
> evalf(Zeta(-1.5+3.5*I),30);
```

$$0.232434139233841813873124398558+0.173728378830616590886617515292\mathrm{1I}$$

```
> Zeta(1,1/2);
```

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2}\ln(8\pi)+\frac{\pi}{4}\right)$$

```
> Zeta(0,2,1/2);
```

$$\frac{1}{2}\pi^2$$

```
> Zeta(3,-1.2+35.3*I,.2+I);
```

$$-0.2383200150\ 10^{22}+0.1841204211\ 10^{22}\,\mathrm{I}$$

而

```
> Zeta(0,2,s);
```

$$\Psi(1,s)$$

这里，对于函数 $\Psi(x)$来说，通常是由 Gamma 函数的导数来定义的，即

$$\Psi(x)=(\ln\Gamma(x))'=\frac{(\Gamma(x))'}{\Gamma(x)},\text{其中 }\Gamma(x)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{(-t)}\,t^{(x-1)}\,\mathrm{d}t.$$

通常 $\Psi(n,x)$是指由 $\Psi(x)$关于变量 x 的 n 阶导数而得到的表达式，即

$$\Psi(n,x)=(\Psi(x))^{(n)}.$$

例如：

```
> Psi(2);
```

$$1-\gamma$$

```
> Psi(1,2);
```

$$-1+\frac{1}{6}\pi^2$$

```
> Psi(3.5+4.7*I);
```

$$1.717883835+1.001470255I$$

```
> Psi(7,-2.2+3.3*I);
```

$$-0.02713341434+0.003825068416I$$

```
> Psi(-2,1.543);
```

$$-0.7957394716$$

```
> Psi(1.342+I,3.5233);
```

$$-0.6988919005-0.7978763419I$$

```
> Psi(50);
```

$$\frac{13881256687139135026631}{3099044504245996706400}-\gamma$$

```
> Psi(51);
```

$$\Psi(51)$$

```
> expand(Psi(51));
```

$$-\gamma+\frac{13943237577224054960759}{3099044504245996706400}$$

用浮点数来表示上面的近似结果为：

```
> evalf(%);
```

$$3.921989673$$

当然，也可以采用如下方法来给出：

```
> evalf(Psi(51));
```

$$3.921989673$$

上面的 γ 为 Euler 常数，它的定义是：

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right).$$

用浮点数来表示 γ 的 30 位有效数字为：

```
> evalf(gamma,30);
```

$$0.577215664901532860606512090082$$

有趣的问题是，到目前为止，γ 是有理数还是无理数还没有人能给出证明.

这里需要再指出一个问题，就是浮点数的位数的另一种表示方法. 原来的表示方法是 evalf(x,n)，它表示对于数 x 的有效位数是 n，其实它也可以表示为 evalf[n](x)，它的含义与前者相同，例如：

```
> evalf[100](add(1/sqrt(k),k=1..80));
```


此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com