大学数学辅导丛书

高等数学（第3版）

题型归类 方法点拨 考研辅导

GAODENG SHUXUE TIXING GUILEI
FANGFA DIANBO KAOYAN FUDAO

主　编　马菊侠
副主编　程红英　翟岁兵　吴云天

$OM = (x, y, z)$

$$y = \mathrm{Ln}x_0 + \frac{1}{x_0}(x - x_0)$$

$AD + BE + CF = 0$

$a + b + c = 0$

国防工业出版社
National Defense Industry Press

大学数学辅导丛书

高等数学

题型归类·方法点拨·考研辅导

（第3版）

主编　马菊侠

副主编　程红英　翟岁兵　吴云天

国防工业出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学、题型归类、方法点拨、考研辅导 / 马菊侠主编.
—3 版. —北京：国防工业出版社，2013.9
（大学数学辅导丛书）
ISBN 978-7-118-08936-3

Ⅰ.①高... Ⅱ.①马... Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 182601 号

※

国防工业出版社出版发行
（北京市海淀区紫竹院南路 23 号　邮政编码 100048）
北京嘉恒彩色印刷责任有限公司
新华书店经售

*

开本 710×960　1/16　**印张** 26¼　**字数** 476 千字
2013 年 9 月第 3 版第 1 次印刷　**印数** 1—5000 册　**定价** 45.00 元

国防书店：(010)88540777　发行邮购：(010)88540776
发行传真：(010)88540755　发行业务：(010)88540717

前　言

《高等数学》是理工科院校一门必修的基础课,由于该课程推理性、灵活性、技巧性、多变性等特点,及在后继课程学习与硕士研究生考试的要求,特编写了《高等数学 题型归类·方法点拨·考研辅导》一书,以供理工科院校师生、职业教育与继续教育师生等的“高等数学”的教与学参考及考研辅导之用。

《高等数学 题型归类·方法点拨·考研辅导》包含知识网络、方法归类、题型归类、方法点拨、考研辅导、综合训练与参考答案以及三个附录:附录一 高等数学(上册)期末考试真题(5 套);附录二 高等数学(下册)期末考试真题(5 套);附录三 2010 年—2013 年考研真题与解答。本书是以方法指导、题型归类为主线,贯穿着知识网络、方法与技巧、考研辅导的辅导用书,旨在提高读者理解、贯通与应试能力。

本书有以下特点:

(1) 知识网络。在知识点的处理上,采用了重点知识网络结构图、表格式、类比式等特点,使读者易于比较与区分,加深理解与记忆。

(2) 方法归纳。针对每一种题型,进行详细的方法归纳,打破题海训练,寻求方法体系,达到触类旁通的功效。

(3) 题型归类。将“高等数学”中的常考题、重点题、难点题、是非题,进行系统归纳与提炼,注重题目的深度与广度,力求体现题型的多变性、技巧性、灵活性,加强读者的全方位训练。

(4) 应试提高。每章附有综合训练,以检测读者对知识的掌握程度,期末考试真题上下册共 10 套(附有参考解答),以帮助同步学习者期末复习之且,对于考研或需自我提升的读者,附有 2010 年—2013 年考研真题与解答。

(5) 紧扣教材。紧扣同济六版,便于同步学习参考。

本书由陕西科技大学马菊侠、吴云天,陕西服装工程学院程红英、翟岁兵编写。

其中程红英编写第一章～第三章，翟岁兵编写第四章～第七章，吴云天编写第十章～第十二章，马菊侠编写第八章、第九章及附录部分。在编写中，我们参阅了近几年国内外相关书籍与相关网站，在此特向有关作者、出版社及相关网站致谢。

由于我们水平有限，书中不妥或疏漏，敬请读者及同仁斧正。

编者

2013 年 8 月

目　　录

第一章　函数与极限 …… 1

一、知识网络 …… 1

二、方法归纳 …… 2

三、题型归类・方法点拨・技巧分析 …… 6

四、综合训练 …… 41

五、参考答案 …… 44

第二章　导数与微分 …… 47

一、知识网络 …… 47

二、方法归纳 …… 48

三、题型归类・方法点拨・技巧分析 …… 52

四、综合训练 …… 78

五、参考答案 …… 80

第三章　微分中值定理与导数的应用 …… 82

一、知识网络 …… 82

二、方法归纳 …… 83

三、题型归类・方法点拨・技巧分析 …… 86

四、综合训练 …… 113

五、参考答案 …… 115

第四章　不定积分 …… 119

一、知识网络 …… 119

二、方法归纳 …… 120

三、题型归类・方法点拨・技巧分析 …… 123

四、综合训练 …… 136

五、参考答案 …… 138

第五章 定积分 …… 140
一、知识网络 …… 140
二、方法归纳 …… 141
三、题型归类·方法点拨·技巧分析 …… 142
四、综合训练 …… 172
五、参考答案 …… 174
第六章 定积分的应用 …… 179
一、知识网络 …… 179
二、方法归纳 …… 180
三、题型归类·方法点拨·技巧分析 …… 181
四、综合训练 …… 193
五、参考答案 …… 194
第七章 微分方程 …… 195
一、知识网络 …… 195
二、方法归纳 …… 196
三、题型归类·方法点拨·技巧分析 …… 196
四、综合训练 …… 209
五、参考答案 …… 211
第八章 空间解析几何与向量代数 …… 213
一、知识网络 …… 213
二、方法归纳 …… 214
三、题型归类·方法点拨·技巧分析 …… 217
四、综合训练 …… 226
五、参考答案 …… 228
第九章 多元函数微分法及应用 …… 229
一、知识网络 …… 229
二、方法归纳 …… 230
三、题型归类·方法点拨·技巧分析 …… 232
四、综合训练 …… 255

五、参考答案 …… 257

第十章　重积分 …… 259

一、知识网络 …… 259
二、方法归纳 …… 260
三、题型归类 · 方法点拨 · 技巧分析 …… 263
四、综合训练 …… 277
五、参考答案 …… 281

第十一章　曲线积分与曲面积分 …… 283

一、知识网络 …… 283
二、方法归纳 …… 285
三、题型归类 · 方法点拨 · 技巧分析 …… 287
四、综合训练 …… 308
五、参考答案 …… 311

第十二章　无穷级数 …… 313

一、知识网络 …… 313
二、方法归纳 …… 314
三、题型归类 · 方法点拨 · 技巧分析 …… 317
四、综合训练 …… 336
五、参考答案 …… 339

附录一　高等数学(上册)期末试题与解答 …… 341

附录二　高等数学(下册)期末试题与解答 …… 356

附录三　2011 年—2013 年全国硕士研究生入学统一考试高等数学试题及解答 …… 375

第一章　函数与极限

一、知识网络

- **函数**
  - 常见类型　初等函数、分段函数、复合函数
  - 几何特性　有界性、单调性、奇偶性、周期性
- **极限**
  - 数列极限　$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$　　$\forall\varepsilon>0,\ \exists N,\quad |x_n-a|<\varepsilon \underset{\text{成立条件}}{\overset{\text{找 } N}{\rightleftarrows}} n>N$
  - 函数极限　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$　　$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\quad |f(x)-A|<\varepsilon \underset{\text{成立条件}}{\overset{\text{找 } \delta}{\rightleftarrows}} 0<|x-x_0|<\delta$
    $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=A$　　$\forall\varepsilon>0,\ \exists X>0,\quad |f(x)-A|<\varepsilon \underset{\text{成立条件}}{\overset{\text{找 } X}{\rightleftarrows}} |x|>X$
  - 极限存在的充要条件　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow f(x_0^+)=A$ 且 $f(x_0^-)=A$
  - 无穷大与无穷小　$\lim f(x)=\infty,\ \lim f(x)=0$
  - 重要极限　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$
  - 极限的计算　详见本章方法归纳
- **连续**
  - 连续的定义　"ε-δ"　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(x_0)$
  - 连续的运算　四则运算，复合函数与反函数的连续性定理
  - 初等函数的连续性　基本初等函数在定义域内连续，初等函数在其定义区间内连续
  - 闭区间上连续函数的性质　有界性、介值、最大(小)值、一致连续
  - 间断点

间断点		
第一类间断点 ($f(x_0^-),f(x_0^+)$ 都存在)	可去间断点	$f(x_0^-)=f(x_0^+)$
	跳跃间断点	$f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$
第二类间断点	无穷型、振荡型	

二、方法归纳

(一) 极限的计算方法归纳

求极限是高等数学中最基本的运算,也是每次考试必考的内容。现将其计算方法归纳如下:

1. 用极限的定义

以数列极限的“$\varepsilon-N$”定义为例,其它可仿此进行。

首先明确数列极限“$\varepsilon-N$”的定义:

$\forall\varepsilon>0,\exists N$,当 $n>N$ 时,$|x_n-A|<\varepsilon$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$。

(1) 给定任意小的正数 ε;

(2) 由不等式 $|x_n-A|<\varepsilon$ 出发来找 N,即要得到不等式 $n>\varphi(\varepsilon,A)$(与 ε,A 有关的表达式);

(3) 令 $N=[\varphi(\varepsilon,A)]$或 $N=[\varphi(\varepsilon,A)]+K$($K$ 为自然数);

(4) 由 $n>N$ 能推演出 $|x_n-A|<\varepsilon$。

找 N 的方法有两种。

① 直接法:即从不等式 $|x_n-A|<\varepsilon$ 中直接解出 $n>\varphi(\varepsilon,A)$,令 $N=[\varphi(\varepsilon,A)]$。

② 间接法(放大法):当不等式 $|x_n-A|<\varepsilon$ 不易解得 $n>\varphi(\varepsilon,A)$或不能解时,将 $|x_n-A|$稍作放大到 b_n,即 $|x_n-A|\leqslant b_n<\varepsilon$,再解不等式 $b_n<\varepsilon$ 得到 $n>\varphi(\varepsilon,A)$,从而得到 $N=[\varphi(\varepsilon,A)]$。

2. 极限的运算法则

设 $\lim f(x)$、$\lim g(x)$ 均存在,则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$;

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$;

(3) $\lim[\lambda f(x)]=\lambda\lim f(x)$;

(4) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$;

(5) $\lim f(x)^{g(x)}=[\lim f(x)]^{\lim g(x)}\qquad(\lim f(x)>0)$;

(6) 当 $a_0,b_0\neq0$ 时

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0} & \text{当 } m=n\\ 0 & \text{当 } m<n\\ \infty & \text{当 } m>n\end{cases}$$

(7) 复合函数的极限运算法则。

设$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$,又设函数 $u=u(x)$,当 $x\to x_0$ 时,函数的极限存在且等于 u_0,即

$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=u_0$，但在 x_0 的某去心邻域内 $u(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0}f[u(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A$$

3. 极限存在准则

（1）夹逼定理。

① 数列的情形：

给定数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$，满足

$$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n \qquad (n=1,2,\cdots)$$

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}z_n=a$$

则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

② 函数的情形：

设在 x_0 的某去心邻域内有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=a$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$。

（2）单调有界数列必有极限。

单调递增有上界的数列必有极限；

单调递减有下界的数列必有极限。

4. 重要极限

基本形式	一般形式	说明
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$	$\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\square}{\square}=1$	“$\dfrac{0}{0}$”
$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$	$\lim\limits_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}$ $\lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}$	“1^∞” $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ （数列也适合）

5. 无穷小与无穷大

（1）无穷小的性质。

① 有限个无穷小的和、差、积仍为无穷小；

② $\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中 $\lim\alpha=0$；

③ 无穷小与有界量之积为无穷小。

（2）无穷小与无穷大的关系。

若$\lim\limits_{x}f(x)=0(f(x)\neq 0)\Rightarrow\lim\limits_{x}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$；反之，若$\lim\limits_{x}f(x)=\infty\Rightarrow\lim\limits_{x}\dfrac{1}{f(x)}=0$。

（3）无穷小的比较。

前提条件	定　义	记　号
若$\lim\limits_{x}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$(有限) 其中$\lim\limits_{x}f(x)=\lim\limits_{x}g(x)=0$ 且$g(x)\neq 0$	(1) $A\neq 0, A\neq 1$,称$f(x)$与$g(x)$为同阶无穷小	$f(x)\sim Ag(x)$
	(2) $A=1$,称$f(x)$与$g(x)$为等价无穷小	$f(x)\sim g(x)$
	(3) $A=0$,称$f(x)$为$g(x)$的高阶无穷小	$f(x)=o(g(x))$
若$\lim\limits_{x}f(x)=\lim\limits_{x}g(x)=0$ $g^k(x)\neq 0, k>0$,为常数	$\lim\limits_{x}\dfrac{f(x)}{g^k(x)}=B$(有限,$\neq 0$)称$f(x)$是$g(x)$的$k$阶无穷小	$f(x)\sim Bg^k(x)$

(4) 无穷小量的等价性。

熟记$x\to 0$时:$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arctan x\sim x,\ln(1+x)\sim x,e^x-1\sim x,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x(\alpha\neq 0),a^x-1\sim x\ln a(a>0,a\neq 1)$。

特别地,当$\alpha=\dfrac{1}{n}$时(n为自然数),有

$$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}$$

另外,利用无穷小的变量代换法则,上述重要等价无穷小均可扩展应用范围:当$x\to x_0(x\to\infty)$时,$u(x)\to 0(u(x)\neq 0)$;当$x\to x_0(x\to\infty)$时,有下列等价无穷小:

$u(x)\sim\sin u(x)\sim\tan u(x)\sim\arcsin u(x)\sim\arctan u(x)\sim\ln(1+u(x))\sim e^{u(x)}-1$;

$1-\cos u(x)\sim\dfrac{1}{2}u^2(x)$;$(1+u(x))^\alpha-1\sim\alpha u(x)\quad(\alpha\neq 0)$;

$a^{u(x)}-1\sim u(x)\ln a\quad(a>0,a\neq 1)$。

例如:$x\to 0$时,$e^{\sin x^2}-1\sim\sin x^2\sim x^2$;

$x\to+\infty$时,$\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\sim\dfrac{1}{\sqrt{x}}$。

(5) 无穷小的等价代换性质。

设在自变量的同一变化过程中,$\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$,则

① 如果$\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$存在,则$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}$也存在,且$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$。即为:在代换时,必须将分子和分母的整体分别换成它们各自的等价无穷小(保持分子或分母不变也可以),这称之为整体代换。

② 在分子(分母)为若干因子的乘积时,可以进行局部代换,即

如果 $\lim\dfrac{\alpha'\cdot u'(x)}{\beta'}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\alpha\cdot u(x)}{\beta}$ 也存在，且 $\lim\dfrac{\alpha\cdot u(x)}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'\cdot u'(x)}{\beta'}$（其中 $u(x)\sim u'(x)$）。

③ 在代数和的形式时，不能代换，即

$$\lim(\alpha\pm\beta)\neq\lim(\alpha'\pm\beta')$$

6. 极限存在的充要条件

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$（左、右极限存在且相等）。主要用于分段函数分段点的极限及连续性讨论。

7. 用函数的连续性极限

（1）如果 $f(x)$ 在 x_0 点连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$；

（2）如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，函数 $f(u)$ 在 $u=a$ 连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]=f(a)$。

（说明：极限符号与运算符号可交换次序）

8. 利用洛必达法则求极限

9. 利用泰勒公式求极限

10. 利用导数定义及定积分的定义求极限

11. 利用无穷级数的性质求极限

（其中 8～11 在以后知识中会讲到）

（二）函数连续性的讨论

因基本初等函数在定义域内连续，初等函数在定义区间内连续，因此对于初等函数的连续性没有什么可讨论的。这里，关于函数连续性讨论主要是就非初等函数而言，如分段函数、带有绝对值符号的函数、由极限定义的函数。而带有绝对值符号的函数及由极限定义的函数一般都可表示成分段函数，所以这里主要讨论分段函数的连续性。

而分段函数在每一分段区间上为初等函数，由初等函数的连续性知：其为连续的。故重点讨论分段点的连续性了。

函数 $f(x)$ 的分段点为 x_0 时，讨论如下：

（1）$f(x)$ 在 x_0 的两侧表达式不相同时，先计算左、右极限：

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$　（只能用 x_0 左边的函数（$x<x_0$））

$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$　（只能用 x_0 右边的函数（$x>x_0$））

再计算 $f(x_0)$，若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则 $f(x)$ 在 x_0 点为连续（否则为间

断点）。

（2）$f(x)$在x_0的两侧表达式相同时，直接用$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$来判定在$x_0$点是否连续（特别地含有$a^{\frac{1}{x}}$，$\arctan\dfrac{1}{x}$时，注意区分$x=0$的两侧极限）。

（三）函数间断点的讨论

1. 连续的三个要素

（1）函数$f(x)$在x_0点有定义；

（2）在$x\to x_0$时，函数极限存在；

（3）在$x\to x_0$时，函数极限值等于函数在x_0处的函数值。

以上三个要素同时成立，则函数$f(x)$在x_0点连续，至少有一个不成立，则称$f(x)$在x_0点间断（不连续）。

2. 间断点分类

$$\text{间断点}\begin{cases}\text{第一类：左右极限}\dot{\text{都}}\text{存在}\begin{cases}\text{可去型}\quad\text{左极限}=\text{右极限，即极限存在}\\\text{跳跃型}\quad\text{左极限}\neq\text{右极限}\end{cases}\\\text{第二类：左右极限中}\dot{\text{至}}\dot{\text{少}}\text{有一个不存在}\end{cases}$$

注　只有第一类可去型间断点才能补充或改变函数在该点的定义而成为连续点，其它类型不能做到。

3. 间断点及类型的确定

（1）求出$f(x)$无定义的点x_0，（但在$\mathring{U}(x_0,\delta)$内$f(x)$应有定义），则$x=x_0$为间断点；求出分段函数分段点x_0（注意区分分段点与区间端点），这些点是可能的间断点；

（2）当$f(x)$在x_0的两侧的表达式不同时，求出$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$及$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，看是否存在，是否相等；当$f(x)$在$x_0$的两侧表达式相同时，直接求$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，看是否存在，是否等于$f(x_0)$。若相等即为连续点，若不相等，即为间断点，再进一步确定类型。

（四）闭区间上连续函数的性质应用

详见本章的题型归类。

三、题型归类·方法点拨·技巧分析

【题型1　求函数定义域】

【方法与技巧】

（1）如果函数表达式中含有分式，则分母不能为零；

（2）如果函数表达式中含有偶次方根，则根号下表达式大于等于零；

(3) 如果函数表达式中含有对数,则真数大于零;

(4) 如果函数表达式中含有反正弦或反余弦,则其绝对值小于等于 1;

(5) 有以上几种情形,则取交集;

(6) 分段函数定义域,取各分段区间的并集;

(7) 对实际问题,则从实际出发考虑自变量取值范围。

【例 1】 设 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\arcsin\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)$,求定义域。

解 $\begin{cases}2-x^2>0\\ -1\leqslant\dfrac{1}{2}x-1\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x|<\sqrt{2}\\ 0\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$ 则定义域为 $[0,\sqrt{2})$。

【例 2】 设 $y=f(x)$ 定义域为 $(0,4]$,求下列函数定义域:

(1) $f(x^2)$;(2) $f(\ln x)$。

解 (1) 由 $0<x^2\leqslant 4$ 得 $f(x^2)$ 的定义域为 $[-2,0)\cup(0,2]$;

(2) 由 $0<\ln x\leqslant 4$ 得 $\ln 1<\ln x\leqslant \ln e^4$,故 $f(\ln x)$ 的定义域为 $(1,e^4]$。

【例 3】 设 $f(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2 & 1<x\leqslant 2\end{cases}$ 则 $g(x)=f(2x)+f(x-2)$ 的定义域为________。

(A) 无意义　　(B) 在 $[0,2]$ 上有意义

(C) 在 $[0,4]$ 上有意义　　(D) 在 $[2,4]$ 上有意义

解 由 $f(x)$ 表达式知 $f(x)$ 的定义域为 $[0,2]$,故 $f(2x)$ 的定义域为 $0\leqslant 2x\leqslant 2$,即 $x\in[0,1]$,$f(x-2)$ 的定义域为 $0\leqslant x-2\leqslant 2$,即 $x\in[2,4]$,而 $g(x)=f(2x)+f(x-2)$ 为一个表达式,故 $g(x)$ 无意义,选(A)。

【例 4】 求函数 $y=\dfrac{1}{[x+1]}$ 的定义域。

解 $[x+1]$ 为取整函数,当 $0\leqslant x+1<1$ 时,$[x+1]=0$,即 $-1\leqslant x<0$ 时,函数的分母为 0,故去掉 $-1\leqslant x<0$ 的部分,即为函数的定义域,即为 $(-\infty,-1)$,$[0,+\infty)$。

【例 5】 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[1,2]$,求 $f[1-\ln x]$ 的定义域。

解 本题是已知 $f(x)$ 的定义域为 $[1,2]$,求复合函数的定义域,一般采用代入法,即

$$1\leqslant 1-\ln x\leqslant 2$$

解之得

$$\frac{1}{e}\leqslant x\leqslant 1,\quad 即\left[\frac{1}{e},1\right]$$

【例 6】 设 $f(x)$ 的定义域 $D=[0,1]$,求下列各函数的定义域:

(1) $f(x^2)$;(2) $f(\sin x)$;(3) $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$。

[1 - 1.15(1),(2),(4)]①

解 (1) 由已知 $0\leqslant x^2\leqslant 1$ 得 $x\in[-1,1]$。

(2) 由已知 $0\leqslant \sin x\leqslant 1, 2n\pi\leqslant x\leqslant (2n+1)\pi, (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

故 $f(\sin x)$ 的定义域为 $2n\pi\leqslant x\leqslant(2n+1)\pi \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$。

(3) $f(x+a)$ 的定义域 由 $0\leqslant x+a\leqslant 1$ 得 $-a\leqslant x\leqslant 1-a$

$f(x-a)$ 的定义域 由 $0\leqslant x-a\leqslant 1$ 得 $a\leqslant x\leqslant 1+a$

若 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$,则 $a\leqslant x\leqslant 1-a$,函数 $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$ 的定义域为 $[a,1-a]$;

若 $a>\dfrac{1}{2}$,则 $1-a<\dfrac{1}{2}$,函数 $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$ 的定义域为空集。

【例 7】 已知 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$,且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$ 及其定义域。

解 因为 $f(x)=e^{x^2}$,所以 $f[\varphi(x)]=e^{[\varphi(x)]^2}$

而 $f[\varphi(x)]=1-x$,故

$$e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$$

$$[\varphi(x)]^2=\ln(1-x)$$

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)} \quad (\varphi(x)\geqslant 0)$$

于是由 $\begin{cases}\ln(1-x)\geqslant 0\\ 1-x>0\end{cases}$ 得定义域为 $x\leqslant 0$,即 $x\in(-\infty,0]$。

【题型 2 求函数表达式】

【方法与技巧】 这种题型的做法是找出函数框架,代入即可;或是进行变量代换。

【例 1】 已知 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}(x\neq -1)$, $g(x)=1-x$,求 $f[g(x)]$, $g[f(x)]$。

解 $f(x)$ 的框架为 $f(\quad)=\dfrac{1-(\quad)}{1+(\quad)}$,从而

$$f[g(x)]=\frac{1-g(x)}{1+g(x)}=\frac{1-(1-x)}{1+(1-x)}=\frac{x}{2-x} \quad (x\neq 2)$$

① [1 - 1.15(1)]表示《高等数学》(第六版)(同济大学)习题 1 - 1 中第 15 题第(1)题,下同。

同理 $g[f(x)]=1-f(x)=1-\frac{1-x}{1+x}=\frac{2x}{1+x}\quad(x\neq-1)$

【例2】 设 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|=1\\ -1 & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$。

[1-1.18]

解 因为 $f(\quad)=\begin{cases}1 & |\quad|<1\\ 0 & |\quad|=1\\ -1 & |\quad|>1\end{cases}$，所以 $f[g(x)]=\begin{cases}1 & |e^x|<1\\ 0 & |e^x|=1\\ 1 & |e^x|>1\end{cases}$

即
$$f[g(x)]=\begin{cases}1 & x<0\\ 0 & x=0\\ -1 & x>0\end{cases}$$

而 $g(\quad)=e^{(\quad)}$，所以 $g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e & |x|<1\\ 1 & |x|=1\\ e^{-1} & |x|>1\end{cases}$。

【例3】 已知 $f(\sin^2x)=\cos2x+\tan^2x(0<x<1)$，求 $f(x)$。

解 令 $\sin^2x=t$，$\cos2x=1-2\sin^2x=1-2t$

$$\tan^2x=\sec^2x-1=\frac{1}{\cos^2x}-1=\frac{1}{1-\sin^2x}-1=\frac{1}{1-t}-1$$

故 $f(t)=-2t+\frac{1}{1-t}$，即 $f(x)=-2x+\frac{1}{1-x}$。

【例4】 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，求 $f\{f[f(x)]\}$。

解 由题知 $|f(x)|\leqslant1$，于是 $f[f(x)]=1$，则 $f\{f[f(x)]\}=f(1)=1$。

【例5】 设 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant1\\ -1 & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-x^2 & |x|\leqslant2\\ 2 & |x|>2\end{cases}$，求 $f[g(x)]$。

解 这是两个分段函数的复合，其中的关键是函数的框架及中间变量的值域。因为 $f[g(x)]=\begin{cases}1 & |g(x)|\leqslant1\\ -1 & |g(x)|>1\end{cases}$，所以要求 $|g(x)|\leqslant1$ 或 $|g(x)|>1$ 的 x 的范围。

因 $|x|>2$ 时，$g(x)=2>1$，所以只有在 $|x|\leqslant2$ 时，才有可能使 $|g(x)|\leqslant1$，即 $|2-x^2|\leqslant1$，解得 $1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3}$。