



机械振动实验与分析

JIXIE ZHENDONG SHIYAN YU FENXI



张力 刘斌 编著



清华大学出版社
<http://www.tup.com.cn>



北京交通大学出版社
<http://www.bjtu.com.cn>

机械振动实验与分析

张 力 刘 斌 编著

清华大学出版社
北京交通大学出版社

· 北京 ·

内 容 简 介

本书讲授机械振动实验与分析,旨在帮助读者在机械工程领域,通过振动实验与分析了解结构的动力学特性,进而修改模型、优化设计,并学会使用振动实验分析的专用软件程序和实验设备。

全书共分6章,主要内容:绪论、振动分析理论基础、振动信号的时间历程测量、振动信号的分析与处理、振动测试分析实验、振动测试分析的工程应用。

本书可供从事机械工程、车辆工程等专业的科技工作者阅读和参考,也可作为高等院校机械工程专业研究生和本科生的教材。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

图书在版编目(CIP)数据

机械振动实验与分析/张力,刘斌编著. —北京:北京交通大学出版社:清华大学出版社,2013.10

ISBN 978-7-5121-1674-0

I. ①机… II. ①张… ②刘… III. ①机械振动-实验-高等学校-教材 IV. ①TH113.1-33

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第237190号

责任编辑:赵彩云 特邀编辑:张奉格

出版发行:清华大学出版社 邮编:100084 电话:010-62776969 <http://www.tup.com.cn>
北京交通大学出版社 邮编:100044 电话:010-51686414 <http://www.bjtup.com.cn>

印刷者:北京瑞达方舟印务有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185×260 印张:14.75 字数:372千字

版 次:2013年12月第1版 2013年12月第1次印刷

书 号:ISBN 978-7-5121-1674-0/TH·54

印 数:1~3 000册 定价:32.00元

本书如有质量问题,请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评,我们表示欢迎和感谢。

投诉电话:010-51686043,51686008;传真:010-62225406;E-mail: press@bjtu.edu.cn。

前 言

本书阐述了机械振动实验与分析，通过学习振动分析理论基础，掌握振动测量系统和振动激励与响应，通过傅里叶变换、离散傅氏变换、泄露与加窗及功率谱密度分析完成了振动信号的分析与处理，结合振动测试分析的工程应用，完成了振动测试分析在结构性能评价、故障诊断和状态监测及在噪声控制中的应用研究。采用振动测试分析实验的专用软件程序和实验设备，实现振动系统传递函数的测量与分析、振动实验设计与实现。

本书汇集了近年来作者的科研项目研究成果，并参考了很多资料，全面、系统地论述了机械振动实验与分析，重点介绍了振动分析专用软件程序，应用例题来源于科研项目中新的工程应用实例，注重培养读者用本书知识解决工程实际问题的方法。本书的研究成果具有科学意义和理论价值。

在本书的编著过程中，得到了林建龙教授、汤晓华教授、冯涛教授、聂广远、陈凯、田野、卜晓媛、马艳苗、李泽超、苏彬、黎亚军等的大力协助，在此向他们深表感谢。

本书获得“学位与研究生教育——食品学科特色学科群建设”项目资助（编号：PXM2011_014213_113634）和“北京市属高等学校人才强教计划资助项目”资助（编号：PHR201107110）。

限于作者水平，书中难免有不当之处，恳请读者不吝赐教。

作者

2013. 12

目 录

第 1 章 绪论	1	2.3.1 黏性阻尼系统	20
1.1 振动的基本概念	1	2.3.2 结构阻尼系统	25
1.2 振动的分类	2	2.4 多自由度系统实模态分析	28
1.2.1 按对系统的激励类型分	2	2.4.1 无阻尼系统	28
1.2.2 按系统的响应类型分	2	2.4.2 黏性比例阻尼系统	33
1.2.3 按系统的性质分	3	2.4.3 结构比例阻尼系统	36
1.2.4 按系统的自由度分	3	2.5 多自由度系统复模态分析	38
1.3 周期振动的谐波表示方法	3	2.5.1 一般黏性阻尼系统	38
1.4 非周期振动与积分变换	6	2.5.2 一般结构阻尼系统	45
1.4.1 傅氏变换定义	8	2.6 拉普拉斯变换及应用	47
1.4.2 傅氏积分定理	8	2.6.1 拉普拉斯变换基本理论	47
1.5 δ -函数及其应用	10	2.6.2 单自由度系统	52
1.5.1 δ -函数定义	10	2.6.3 多自由度系统	53
1.5.2 δ -函数的傅氏变换	11	习题和思考题	57
1.6 模态分析基本概念	11	第 3 章 振动信号的时间历程测量	59
1.6.1 模态分析在结构性能 评价中的应用	12	3.1 引言	59
1.6.2 模态分析在结构动态 设计中的应用	12	3.2 振动测量系统	60
1.6.3 模态分析在结构损伤诊断 和状态监测中的应用	12	3.2.1 实验结构的支撑方式	60
1.6.4 模态分析在声音控制中 的应用	12	3.2.2 激励方式及激励装置	62
习题和思考题	13	3.2.3 测量系统	70
第 2 章 振动分析理论基础	14	3.3 振动激励信号	90
2.1 引言	14	3.3.1 非周期信号——纯随机	92
2.2 简谐振动	14	3.3.2 周期信号	93
2.2.1 简谐振动的基本概念	14	3.3.3 暂态信号	96
2.2.2 简谐振动的矢量表示法	16	3.3.4 单频信号	101
2.2.3 简谐振动的复数表示法	18	3.4 常用的机械振动测量实验	103
2.3 单自由度振动	20	3.4.1 机械振动测量实验中应 注意的问题	103
		3.4.2 激振器实验	105
		3.4.3 冲击实验	109
		习题和思考题	113

第 4 章 振动信号的分析与处理 ·····	114	5.3.2 LMS Test. Lab 的优越性	··· 144
4.1 引言	····· 114	5.3.3 LMS Test. Lab 模态	
4.2 信号分类及其数学描述	····· 114	分析软件应用简介	····· 146
4.2.1 信号的分类	····· 115	5.3.4 锤击法模态测试方法	
4.2.2 信号的数学描述	····· 117	简述	····· 149
4.3 傅里叶变换	····· 120	5.4 模态分析实验设计	····· 149
4.4 离散信号的傅里叶变换	····· 121	5.4.1 传递函数的测量实验	
4.4.1 离散傅里叶级数	····· 122	设计	····· 149
4.4.2 离散傅里叶变换	····· 122	5.4.2 振动结构的模态分析	
4.4.3 离散傅里叶变换的性质	··· 123	实验设计	····· 152
4.4.3 离散傅里叶变换应用		5.5 模态分析专用软件应用	
的相关问题	····· 124	实例	····· 152
4.5 窗函数的应用	····· 128	5.5.1 Impact 锤击法模态测试	
4.6 振动信号分析所涉及的时间、		——锤击激振悬臂梁	
频率函数及其应用	····· 132	实验	····· 152
4.6.1 自相关函数与自功率谱		5.5.2 Spectral Testing 谱分析	
密度函数	····· 132	——橡胶垫的激振器	
4.6.2 互相关函数与互功率谱		模态实验	····· 178
密度函数	····· 133	5.5.3 齿轮模态实验	····· 186
4.6.3 平均	····· 134	习题和思考题	····· 195
4.6.4 频率响应函数与相干		第 6 章 振动测试分析的工程应用 ·····	196
函数	····· 135	6.1 引言	····· 196
4.7 振动信号分析与处理的流程	··· 137	6.2 振动测试分析在结构性能评价	
习题和思考题	····· 138	中的直接应用	····· 197
第 5 章 振动测试分析实验 ·····	140	6.2.1 冻干机压缩机弯管的振动	
5.1 引言	····· 140	特性分析	····· 197
5.2 实验设备	····· 141	6.2.2 电子钉扣机壳振动测试	
5.2.1 传感器	····· 141	分析	····· 200
5.2.2 力锤	····· 141	6.2.3 工业平缝机的工作模态	
5.2.3 激振器	····· 141	分析	····· 203
5.2.4 功率放大器	····· 142	6.2.4 平缝机的实验模态	
5.2.5 LMS 模态分析实验数据		分析	····· 207
采集前端及计算机数据		6.2.5 工业平缝机的工作变形	
处理软件	····· 142	(ODS) 分析	····· 210
5.2.6 校准器	····· 143	6.2.6 食品配料系统搅拌机机架的	
5.3 测试分析软件	····· 143	工作变形分析	····· 214
5.3.1 LMS 公司及其产品应用		6.3 模态分析在故障诊断和状态	
领域	····· 143	检测中的应用	····· 216

6.3.1	模态分析在故障诊断中的 应用	216	6.4.1	测试系统的建立	219
6.3.2	模态分析在状态监测中的 应用	217	6.4.2	工业平缝机振动特性与声 辐射间的关联特性	219
6.4	振动测试分析在噪声控制中的 应用	218		习题和思考题	222
				参考文献	223

第 1 章

绪 论

1.1 振动的基本概念

在机械工程领域，普遍存在着物体随时间变化的往复运动，如机械钟摆的摆动、汽车和铁路机车车辆在行驶中的颠动、桥梁和建筑物的晃动等都是往复运动，上述所提到的物体在平衡位置附近作往复性或周期性的机械运动，称之为机械振动。

早期的振动研究着重建立相应的数学模型以较好地描述系统的振动特性，目前的振动研究大多为了振动的工程应用，主要集中在机械设计、结构设计和控制系统的设计等。机械振动有利也有弊，例如，机械振动会影响精密仪器的性能，降低加工精度和光洁度，加剧构件疲劳和磨损，缩短机器和结构物的使用寿命，甚至引起结构的破坏。较典型的例子有：轴承和齿轮的磨损以及产生的有害噪声，飞机的颤振常使飞机失事，地震引起建筑物的严重损坏，桥梁在过大振动下的坍塌，特别是当机械结构的固有频率与外部激励的频率一致时，会发生共振现象，从而引起机械结构的严重失效破坏，这些都是物体发生机械振动有害的一面；然而，机械振动也有积极的一面，如工业上常用的振动传输、振动筛选、振动沉桩、振动消除内应力以及按振动理论设计的测量传感器、地震仪等即是这方面的典型应用实例。因此，学习振动理论的目的就是掌握振动的基本理论和分析方法，用以确定和限制振动对工程结构和机电产品的性能、寿命及安全的有害影响；同时运用振动理论去创造和设计新型振动设备、仪表及自动化装置。

振动问题所涉及的内容可用系统、激励和响应来描述。通常研究的对象被称为系统，它可以是一个零件、一个部件、一台机器或者一个完整的工程结构；初始干扰、强迫力等外界激振力对于系统的作用位移统称为激励；系统在激励作用下产生的运动称为系统的响应。通常可将振动问题分为三类。

第一类：已知激励和系统特性，求系统响应。

这类问题称为振动系统动力响应分析，这是工程中最常见的研究问题，研究的任务是验算工程结构或产品等在工作时的动力响应是否满足预定的设计要求，在产品的设计阶段，对具体设计方案进行动力响应验算，以确定该设计方案的可行性，为机械强度或刚度计算提供依据，这一过程称之为振动设计。

第二类：已知激励和响应，求系统的特性参数。

这类问题称为振动系统识别。振动系统识别主要是指获得系统的物理参数和系统的固有特性，如质量、刚度和阻尼系数以及固有频率、主振型等。通过对系统进行振动实验，记录

输入输出数据并作数据处理, 逆推出系统的有关物理参数和固有特性。振动系统识别以估计物理参数为任务的称为物理参数识别; 以估计系统振动固有特性为任务的称作模态参数识别。系统识别也可以理解为在一定的激励条件下确定系统参数, 使响应满足指定的条件。

第三类: 已知振动系统和响应, 求系统的激励。

这类问题称为振动环境预测。振动环境预测主要是测定系统的激扰特性问题, 如为了避免产品在公路或铁路运输中损坏, 需要通过实地行车记录汽车或铁路车辆振动, 以及确定产品的响应振动规律, 以估计在运输过程中产品将承受的是怎样一种振动环境, 运输过程对于产品是怎样的一种激励, 在此基础上才能有根据地为产品设计可信而有效的减振包装, 确保产品运输过程安全可靠。

振动分析的一般过程是建立数学模型、推导振动方程、求解和结果分析。分析系统振动的数学模型中有弹簧元件、质量或惯性元件和阻尼元件。

实际振动问题往往比较复杂, 可能同时包含振动系统识别、分析和预测方面的问题。

1.2 振动的分类

实际振动的物体系统往往是很复杂的, 在理论分析中, 根据研究的侧重点不同, 可从不同的角度对振动进行分类。

1.2.1 按对系统的激励类型分

(1) 自由振动: 受初始激励后, 不再受外界激扰, 系统所作的振动。

(2) 强迫振动: 系统在外界激励下所作的振动。

(3) 自激振动: 系统受到由其自身运动导致的激励作用而产生并维持的振动, 如铁路车辆轮对由于踏面形状, 在运动过程中引起的蛇形运动属于自激振动。

(4) 参数振动: 系统受到自身参数随时间变化而引起的振动, 如秋千受到激励以摆长随时间变化的形式出现, 而摆长的变化由人体的下蹲及站直造成, 因此秋千在初始小摆角下被越荡越高, 形成参数振动。

1.2.2 按系统的响应类型分

(1) 确定性振动: 系统响应是时间的确定性函数。根据响应存在时间的长短分为瞬态振动和稳态振动, 瞬态振动只在较短的时间中发生。稳态振动可在充分长的时间中进行。

(2) 简谐振动: 响应为时间的正弦或余弦函数。

(3) 周期振动: 响应为时间的周期函数, 故可用谐波分析的方法展开为一系列简谐振动的叠加。

(4) 准周期振动: 若干个周期不可通约的简谐振动组合而成的振动。

(5) 混沌振动: 响应为时间的始终有限的非周期函数。

(6) 随机振动: 响应不是时间的确定性函数, 只能用概率统计的方法描述振动规律。

1.2.3 按系统的性质分

(1) 确定性系统和随机性系统：确定性系统的系统特征可用时间的确定性函数给出；随机性系统的系统特征不能用时间的确定性函数给出，只具有统计规律性。

(2) 离散系统和连续系统：离散系统是由有限个质量元件、弹簧和阻尼器构成的系统，具有有限个自由度，数学描述为常微分方程。实际工程结构的物理参数，如板壳、梁、轴、杆等的质量及弹性一般是连续分布的，具有无穷多个自由度，数学描述为偏微分方程，保持这种特征抽象出的模型所代表的系统称为连续系统。

(3) 定常系统和参变系统：定常系统是系统特性不随时间改变的系統，数学描述为常系数微分方程；参变系统是系统特性随时间变换的系统，数学描述为变系数微分方程。

(4) 线性系统和非线性系统：线性系统是质量不变且弹性力和阻尼力与运动参数呈线性关系的系统，数学描述为线性微分方程；非线性系统是不能简化为线性系统的系统，数学描述为非线性微分方程。

1.2.4 按系统的自由度分

(1) 单自由度系统振动：用一个独立坐标就能确定系统运动的系统振动。

(2) 多自由度系统振动：需用多个独立坐标才能确定系统运动的系统振动。

(3) 弹性体振动：要用无限多个独立坐标才能确定系统运动的系统振动，也称为无限自由度系统振动。

对于相同的振动问题，在不同条件下可以采用不同的振动模型。振动模型的建立及分析结论必须通过科学实验或生产实践的检验，只有那些符合或大体符合客观实际的振动模型和结论，才是正确或基本正确的。

1.3 周期振动的谐波表示方法

简谐振动是一种最简单的周期振动，实际振动问题中更多的是非简谐的周期振动，一般的周期振动可以通过傅里叶级数理论分解成简谐振动。

如果一个以 T 为周期的实值函数 $f_T(t)$ ，在 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上满足狄利克雷 (Dirichlet) 条件，即 $f_T(t)$ 在 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上满足：

(1) 连续或只有有限个第一类间断点；

(2) 只有有限个极值点，则在 $f_T(t)$ 的连续点处。

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (1-1)$$

其中

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \cos n\omega t dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \sin n\omega t dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

为方便起见, 常将 $f_T(t)$ 的傅里叶级数改写成复数形式。将欧拉公式

$$\cos t = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}$$

代入式 (1-1) 中, 有

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{2} (e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}) - \frac{jb_n}{2} (e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega t} \right) \end{aligned}$$

令 $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$, $c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$, 则有

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} \quad (1-2)$$

其中, $c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-jn\omega t} dt$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 称式 (1-2) 为傅里叶级数的复指数

形式。在式 (1-1) 中, 若令 $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $A_0 = \frac{a_0}{2}$, 则

$$f_T(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \theta_n)$$

这里 A_n 反映了频率为 $n\omega$ 的谐波在 $f_T(t)$ 中所占的份额, 称为振幅。

在复指数形式中, 第 n 次谐波为

$$c_n e^{jn\omega t} + c_{-n} e^{-jn\omega t}$$

其中, $c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$, $c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$, 则

$$|c_n| = |c_{-n}| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

即

$$A_n = 2|c_n| \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

它反映了各次谐波的振幅随频率变化的分布情况, 因此称 A_n 为周期函数 $f_T(t)$ 的振幅频谱。由于 $n = 0, 1, 2, \dots$, 所以频谱 A_n 的图形不连续, 称为离散频谱。

把一个周期函数展开成一个傅里叶级数，亦即展开成一系列简谐函数之和，称为谐波分析。谐波分析是函数分析中一种常用的方法，用于振动理论便可以把一个周期振动分解为一系列简谐振动的叠加，这对于分析振动位移、速度和加速度的波形，以及分析周期激振力等都是很重要的。

[例 1-1] 一周期为 T 、振幅为 F_0 的矩形波，时序图如图 1.1 (a) 所示。在一个周期内的函数表达式为

$$F = \begin{cases} F_0 & 0 < t < \frac{T}{2} \\ -F_0 & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

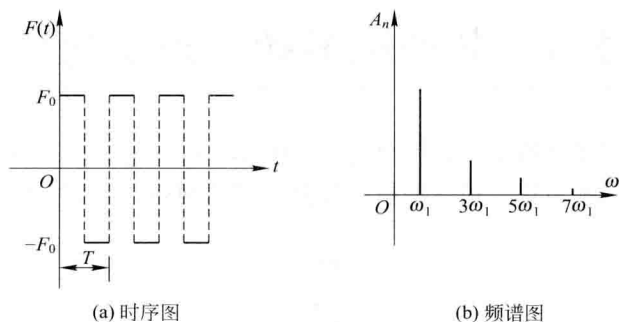


图 1.1 矩形波

试展开为傅里叶级数。

解：将 $F(t)$ 按式 (1-1) 展开为傅里叶级数，并用式 (1-1) 求各项常数。

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) dt = \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} F_0 dt - \int_{\frac{T}{2}}^T F_0 dt \right] = 0$$

由于函数 $F(t)$ 对 $t = \frac{T}{2}$ 是反对称的，而 $\cos n\omega_1 t$ 对 $t = \frac{T}{2}$ 却是对称的，两者乘积的积分必然等于零，即 $a_n = 0$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} F_0 \sin n\omega_1 t dt - \int_{\frac{T}{2}}^T F_0 \sin n\omega_1 t dt \right] \\ &= \frac{2F_0}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \frac{4F_0}{n\pi} \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \end{aligned}$$

代入式 (1-1) 即得矩形波的傅里叶级数为

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{4F_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)\omega_1 t \\ &= \frac{4F_0}{\pi} \left[\sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \dots \right] \end{aligned}$$

上式只包含正弦项，并且只有奇次项各次谐波。

我们知道一个函数 $F(t)$ ，如满足 $F(t) = F(-t)$ ，称为 t 的偶函数；如满足 $F(t) = -F(-t)$ ，则称为 t 的奇函数。因为 $\cos n\omega_1 t$ 是 t 的偶函数， $\sin n\omega_1 t$ 是 t 的奇函数，所以如果 $F(t)$ 是偶函数，便不会有 $\sin n\omega_1 t$ 的各项，即 $b_n = 0$ ；反之，如果 $F(t)$ 是奇函数，就不会有 $\cos n\omega_1 t$ 的各项，即 $a_n = 0$ 。本题 $F(t)$ 为奇函数，所以展开后的傅里叶级数只有正弦项。

各次谐波的幅值为

$$A_1 = \frac{4F_0}{\pi}, A_3 = \frac{4F_0}{3\pi}, A_5 = \frac{4F_0}{5\pi}, \dots$$

频谱图如图 1.1 (b) 所示。

1.4 非周期振动与积分变换

周期振动可以用傅里叶级数作谐波分析，而图 1.2 所示的非周期振动则可以通过傅氏变换作谐波分析，傅氏变换可以通过令傅里叶级数中的周期趋向无穷大而得到。

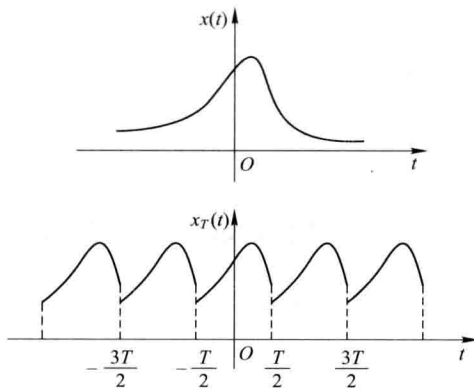


图 1.2 非周期信号的傅式变换

先在区间 $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ 上截取一段非周期振动，即令

$$x_T(t) = x(t) \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \quad (1-3)$$

非周期振动 $x(t)$ 可以看成周期 $T \rightarrow \infty$ 时 $x_T(t)$ 的极限，即

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_T(t) \quad (1-4)$$

将 $x_T(t)$ 按周期性要求拓展到区间 $(-\infty, +\infty)$ ， $x_T(t)$ 就成为周期函数了。 $x_T(t)$ 可以展开为

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{X}_n e^{jn\omega_1 t} \quad (1-5)$$

其中 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, \bar{X}_n 为

$$\bar{X}_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (1-6)$$

令

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \omega_1 \\ \omega_n &= n\omega_1 \end{aligned} \quad (1-7)$$

$$X_n = X_n(\omega_n) = T \bar{X}_n = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \bar{X}_n$$

则式 (1-5) 可以写成

$$x_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n(\omega_n) e^{j\omega_n t} \Delta\omega \quad (1-8)$$

其中

$$X_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-j\omega_n t} dt \quad (1-9)$$

当 $T \rightarrow \infty$ 时, ω_n 成为连续变量, $\Delta\omega$ 成为微分 $d\omega$ 。这样, 式 (1-8) 与式 (1-9) 成为

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1-10)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1-11)$$

式 (1-10) 称为傅里叶积分, 只要式 (1-11) 的 $X(\omega)$ 存在, 就可以用傅里叶积分表示非周期振动 $x(t)$ 。而欲保证 $X(\omega)$ 存在, $x(t)$ 必须在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上满足狄里克雷条件, 并且绝对可积, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$$

相当多的非周期振动是满足上述条件的。式 (1-10) 与式 (1-11) 又被称为傅里叶变换对, 其中 $X(\omega)$ 称为 $x(t)$ 的傅里叶变换, 记为

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$$

而 $x(t)$ 称为 $X(\omega)$ 的傅里叶逆变换, 记为

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)]$$

还可以写成更为对称的形式

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

比较式(1-10)的傅里叶积分与式(1-2)的复数傅里叶级数,可知一个非周期振动仍然能够表示成无穷简谐振动的叠加,但这些简谐振动的频率在范围 $(-\infty, +\infty)$ 内不再是离散分布,而是连续分布, $X(\omega)d\omega$ 可以视为频率在区间 $(\omega, \omega+d\omega)$ 内的简谐振动 $e^{j\omega t}$ 对非周期振动 $x(t)$ 的贡献。

$X(\omega)$ 是 ω 的复数函数,用图像表示 $|X(\omega)|$ 与 ω 和 $\arg X(\omega)$ 与 ω 的函数关系,即得到非周期振动 $x(t)$ 的振幅频谱图及相位频谱图,因此 $X(\omega)$ 又称为 $x(t)$ 的频谱函数。从这个意义上说,对一个非周期振动 $x(t)$ 求傅里叶变换 $X(\omega)$,即表示对 $x(t)$ 作频谱分析。

下面就傅氏变换作如下说明。

1.4.1 傅氏变换定义

对于任何一个非周期函数 $f(t)$,作周期为 T 的函数 $f_T(t)$,使得它在 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 之内与 $f(t)$ 相等,而在 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 之外按周期 T 向左向右延拓到整个实轴上,则当 T 越大时, $f_T(t)$ 与 $f(t)$ 相等范围也越大,当 $T \rightarrow +\infty$ 时,周期函数 $f_T(t)$ 便可转化为 $f(t)$,即

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(t) = f(t)$$

由式(1-2)有

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau) e^{-j\omega_n t} d\tau \right] e^{j\omega_n t}$$

当 n 取一切正整数时, $\omega_n = n\omega$ 所对应的点分布在整个数轴上,将相邻两点间距离记为 $\Delta\omega_n$,即 $\Delta\omega_n = \omega_n - \omega_{n-1} = \omega = \frac{2\pi}{T}$,则

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta\omega_n \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{\pi}{\Delta\omega_n}}^{\frac{\pi}{\Delta\omega_n}} f_T(\tau) e^{-j\omega_n t} d\tau \cdot e^{j\omega_n t} \right] \Delta\omega_n$$

这是一个和式极限,在下面定理的条件下,可以用傅里叶积分公式(简称傅氏积分公式)来表示。

1.4.2 傅氏积分定理

如果定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数 $f(t)$ 满足下列条件:

(1) $f(t)$ 在任一有限区间上满足狄利克雷条件;

(2) $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积(即 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ 收敛),则有傅氏积分公式收敛,且

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega = \begin{cases} f(t), & \text{当 } t \text{ 是 } f(t) \text{ 的连续点时} \\ \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}, & \text{当 } t \text{ 是 } f(t) \text{ 的间断点时} \end{cases} \quad (1-12)$$

若令

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1-13)$$

则有

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1-14)$$

由上面两式可以看出, $f(t)$ 与 $F(\omega)$ 可以通过类似的积分运算相互表达。式 (1-13) 称为 $f(t)$ 的傅氏变化, 函数 $F(\omega)$ 称为 $f(t)$ 的傅氏变化的象函数, 记为 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$; 式 (1-14) 称为 $F(\omega)$ 的傅氏逆变换, $f(t)$ 称为 $F(\omega)$ 原函数, 记为 $f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$ 。可见, 象函数 $F(\omega)$ 与象原函数 $f(t)$ 构成了一对傅氏变换对。

在频谱分析中, $F(\omega)$ 又称为 $f(t)$ 的频谱函数, 而频谱函数的模 $|F(\omega)|$ 称为 $f(t)$ 的振幅频谱。由于 ω 是连续变化的, 所以称之为连续频谱。

[例 1-2] 求矩形脉冲函数

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \delta \\ 0, & |t| > \delta \end{cases}$$

(其中, $\delta > 0$) 的傅氏变换, 并验证 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ 。

解: 由式 (1-13) 有

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\delta}^{\delta} e^{-j\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\delta}^{\delta} = 2 \frac{\sin \delta\omega}{\omega} \end{aligned}$$

再由式 (1-14) 可得 $f(t)$ 的傅氏积分表达式为

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin \delta\omega}{\omega} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin \delta\omega}{\omega} \cos \omega t d\omega + \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin \delta\omega}{\omega} \sin \omega t d\omega \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \delta\omega}{\omega} \cos \omega t d\omega \\ &= \begin{cases} 1, & |t| < \delta \\ 1/2, & |t| = \delta \\ 0, & |t| > \delta \end{cases} \end{aligned}$$

令 $t=0$, 由上式可得 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

[例 1-3] 求指数衰减函数

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-\beta t}, & t \geq 0 \quad (\beta > 0) \end{cases}$$

的傅氏变换, 并作出 $f(t)$ 的频谱图。

解: 由式 (1-13)

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\beta+j\omega)t} dt \\ &= -\frac{1}{\beta+j\omega} e^{-(\beta+j\omega)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\beta-j\omega}{\beta^2+\omega^2} \end{aligned}$$

所以 $|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\beta^2+\omega^2}}$, 其图形如图 1.3 所示。

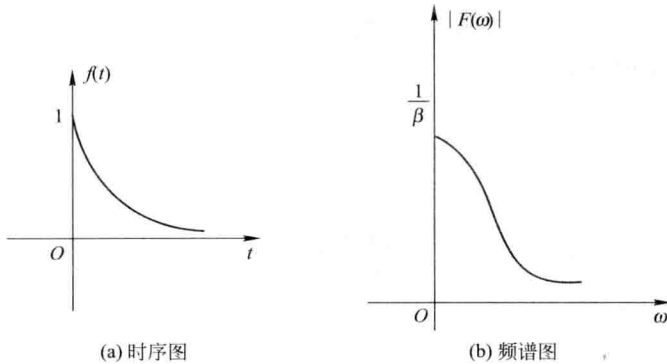


图 1.3 指数衰减函数 $f(t)$

1.5 δ -函数及其应用

在工程实际问题中, 许多物理现象具有一种脉冲特征, 它们不是在某一段时间间隔内出现, 而是在某一瞬间或某一点才出现。

工程技术中常用一个长度为 1 的有向线段表示 δ -函数, 如图 1.4 这个线段长度表示 $\delta(t)$ 的积分值, 称为 δ -函数的强度。

1.5.1 δ -函数定义

如果对于任意一个在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上连续的函数 $f(t)$, 恒有 $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)f(t)dt = f(t_0)$, 则称 $\delta(t)$ 为 δ -函数, 如图 1.4 所示。

从此定义知, 任何一个连续函数 $f(t)$ 都对应一个确定的数 $f(0)$ 或 $f(t_0)$, 这一运算性质使 δ -函数在近代物理和工程技术中有着广泛的应用。有时, 人们将 δ 函数直观地理解为 $\delta(t) = \lim \delta_\epsilon(t)$ (弱极限), 其中 $\delta_\epsilon(t)$ 为单个方脉冲函数且