



普通高等教育“十二五”规划教材

GAODENG SHUXUE

高等数学

(第二版)

郭卫华 李 春◎主编



科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

(第二版)

郭卫华 李 春 主编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书依据教育部2012年最新颁发的高等数学教学大纲,遵循教育部高等数学教学基本要求,结合本科少学时及高职高专教学改革的新形势,以及编者多年的教学经验,在第一版基础上重新编写而成。

本书共分10章,内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程、线性代数与空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数等内容。

本书适合本科少学时,工科、经管、财经和文科类专业使用,也可供各类高职高专院校根据专业需求自行选用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/郭卫华,李春主编. —2版. —北京:科学出版社,2013

(普通高等教育“十二五”规划教材)

ISBN 978-7-03-038406-5

I. ①高… II. ①郭… ②李… III. ①高等数学-高等学校-教材
IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第196887号

责任编辑:王 超 刘文军/责任校对:柏连海
责任印制:吕春珉/封面设计:东方人华平面设计部

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010年12月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2013年9月第 二 版 印张:23 1/2

2013年9月第二次印刷 字数:550 000

定价:39.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈铭浩〉)

销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62135763-2003

版权所有,侵权必究

举报电话:010-64030229; 010-64034315; 13501151303

第二版前言

本书依据教育部 2012 年最新颁发的高等数学教学大纲，遵循教育部高等数学教学基本要求，在广泛调查研究的基础上，结合本科少学时及高职高专教学改革的新形势，以及编者多年的教学经验，尽量吸取高等数学教学改革成果和国内外诸多同类优秀教材的精华编写而成。

本书有以下几大特点：一是以素质教育为目的，重视问题的几何意义及实际应用，有利于培养学生的数学应用能力；二是内容阐述简明扼要，同时注重渗透数学思想方法，便于教师讲授和学生自学；三是章节题例设计实用，书中选有较多的例题和习题，对例题的讲解着重思路分析和解题规律的总结；四是本书配备的各类题型都是精心设计的，包括掌握基本知识、基本方法和基本技巧的习题，巩固提高的习题。章末配备的复习题可以使学生强化全章知识的掌握，综合使用所学知识，通过训练达到能力提升的目的。在各类题型中均设计了一定量的贴近生活实际的应用题，以增强学生综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力，为学生学习后续课程和进一步获得专业知识奠定必要的数学基础。

本书结构严谨，叙述较为详细，语言力求准确，文字通俗易懂，既突出了数学方法的介绍，又不失数学理论的系统性和科学性。与以往所用教材相比，本书克服了教材覆盖面小，习题配备难度大、不配套等不适合本科少学时和高职高专学生学习的弊端。本书不但会使学生在课堂上学到必要的基础知识，而且会使其基本技能得到必要的训练，能力得到普遍提高。由于很多现代化的知识渗透其中，这将为学生的进一步深造和就业奠定良好的基础。

本书由郑州轻工业学院郭卫华、李春任主编；张新敬、李永凤、吕红杰、刘强、谢栋梁任副主编。由于编者水平有限，书中难免有不妥和纰漏之处，敬请读者不吝指教，以便我们进行改正。

编者

2013 年

第一版前言

本书是根据教育部最新颁发的《高职高专高等数学教学基本要求》，在广泛调查研究的基础上，结合高职高专教育改革的新形势，以及编者多年的教学经验和高职高专教改成果编写而成的。

本书有以下几大特点：一是以应用为目的，重视问题的几何意义及实际应用，有利于培养学生的数学应用能力；二是内容阐述简明扼要，同时注重渗透数学思想方法，便于教师讲授和学生自学；三是章、节例题设计实用，书中选有较多的例题和习题，对例题的讲解着重思路分析和解题规律的总结。对易于混淆和出错之处，采用“注”或“注意”的形式予以指出；四是每章都配备了精心设计的习题和复习题。各节习题有助于掌握基本知识和方法，复习题有助于强化全章知识，提高综合运用所学知识的能力。

本书结构严谨，叙述较为详细，语言力求准确，文字通俗易懂，既突出了数学方法的介绍，又不失数学理论的系统性和科学性。与以往所用教材相比，本教材克服了过去教材覆盖面小，习题配备难度大、不配套等不适合高职学生学习的特点，同时增加了数学实验等现代化的教学内容，供有条件的院校选用，使学生在课堂上不但能学到必要的基础知识，而且能得到基本技能的训练，为进一步深造和就业奠定良好的基础。

本书编写分工如下：平顶山城建学院兰奇逊(第1章)、刘玉晓(第4~5章)、郑州轻工业学院郭卫华(第2~3章)、杨萍(第6~7章)、李永凤(第9章)、李春(第8~10章及数学实验和习题参考答案)。

由于时间仓促，编者水平有限，书中难免有不妥和纰漏之处，敬请读者不吝指教，提出宝贵的批评和建议，以便我们进行改正。

编者

2010年6月

目 录

第 1 章 函数	1
1.1 函数的概念	1
1.1.1 集合的概念	1
1.1.2 函数的概念	2
1.1.3 函数的定义域	4
1.1.4 几个特殊函数	4
1.1.5 函数的特性	6
习题 1.1	8
1.2 反函数、复合函数和初等函数	9
1.2.1 反函数	9
1.2.2 复合函数	10
1.2.3 基本初等函数	11
1.2.4 初等函数	14
习题 1.2	14
复习题 1	15
第 2 章 极限与连续	17
2.1 数列的极限	17
2.1.1 数列的概念	17
2.1.2 数列的极限	18
2.1.3 数列极限的几何意义	21
2.1.4 收敛数列的性质	22
2.1.5 收敛数列的四则运算	22
习题 2.1	23
2.2 函数的极限	24
2.2.1 函数的极限	24
2.2.2 函数极限的性质	27
习题 2.2	28
2.3 无穷小量与无穷大量	28
2.3.1 无穷小量	28
2.3.2 无穷小量的性质	29

2.3.3 无穷大量	30
习题 2.3	31
2.4 极限的运算法则	32
习题 2.4	34
2.5 极限存在准则及两个重要极限	35
2.5.1 极限存在准则	35
2.5.2 两个重要极限	37
习题 2.5	42
2.6 无穷小量的比较	43
2.6.1 无穷小量的比较	43
2.6.2 等价无穷小量的性质	43
习题 2.6	46
2.7 连续函数	46
2.7.1 函数的连续性	46
2.7.2 函数的间断点	48
2.7.3 连续函数的运算与性质	49
2.7.4 初等函数的连续性	51
2.7.5 闭区间上连续函数的性质	52
习题 2.7	53
复习题 2	54
第 3 章 导数与微分	56
3.1 导数的基本概念	56
3.1.1 函数的变化率问题举例	56
3.1.2 导数的定义	57
3.1.3 用定义求导数举例	59
3.1.4 左、右导数	61
3.1.5 导数的几何意义	62
3.1.6 函数可导与连续的关系	63
习题 3.1	63
3.2 函数的求导法则	64
3.2.1 函数的和、差、积、商的求导法则	64
3.2.2 反函数的求导法则	66
3.2.3 复合函数的求导法则	67
3.2.4 基本求导法则与导数公式	68
习题 3.2	70



3.3 高阶导数	72
3.3.1 高阶导数的定义	72
3.3.2 高阶导数的求导法则	74
习题 3.3	74
3.4 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数	75
3.4.1 隐函数的导数	75
3.4.2 对数求导法	76
3.4.3 由参数方程所确定的函数的求导法则	78
3.4.4 相关变化率	80
习题 3.4	81
3.5 函数的微分	82
3.5.1 微分的概念	82
3.5.2 微分的几何意义	84
3.5.3 微分的基本公式和运算法则	84
3.5.4 微分在近似计算中的应用	86
习题 3.5	87
复习题 3	88
第 4 章 导数的应用	91
4.1 微分中值定理	91
4.1.1 费马定理	91
4.1.2 罗尔定理	92
4.1.3 拉格朗日(Lagrange)中值定理	93
4.1.4 柯西中值定理	95
4.1.5* 泰勒中值定理	96
习题 4.1	99
4.2 洛必达法则	100
4.2.1 $\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限	100
4.2.2 其他形式的未定式	103
习题 4.2	106
4.3 函数的单调性与极值	107
4.3.1 函数单调性的判别法	107
4.3.2 函数的极值及其判别法	108
4.3.3 函数的最大值、最小值问题	112
习题 4.3	113
4.4 曲线的凹凸性与函数作图	113



4.4.1	函数的凹凸性与拐点	113
4.4.2	曲线的渐近线	116
4.4.3	函数图像的描绘	117
	习题 4.4	118
	复习题 4	119
第 5 章	不定积分	120
5.1	不定积分的概念与性质	120
5.1.1	不定积分的概念	120
5.1.2	不定积分的基本公式	121
5.1.3	不定积分的性质	122
5.1.4	不定积分的几何意义	124
	习题 5.1	125
5.2	不定积分的换元积分法	125
5.2.1	第一类换元积分法	126
5.2.2	第二类换元积分法	130
	习题 5.2	133
5.3	不定积分的分部积分法	134
	习题 5.3	137
5.4	有理函数与无理函数的积分	138
5.4.1	有理函数的积分	138
5.4.2	三角函数有理式的积分	141
5.4.3	简单无理函数的积分	142
	习题 5.4	143
	复习题 5	143
第 6 章	定积分及其应用	145
6.1	定积分的概念与性质	145
6.1.1	定积分的概念	145
6.1.2	定积分的性质	149
	习题 6.1	151
6.2	微积分基本公式	151
6.2.1	积分上限函数	151
6.2.2	微积分基本定理	153
	习题 6.2	155
6.3	定积分的换元积分法和分部积分法	155



6.3.1 定积分的换元积分公式	156
6.3.2 定积分的分部积分公式	158
习题 6.3	161
6.4 反常积分	162
6.4.1 无穷限的反常积分	162
6.4.2 无界函数的反常积分	164
习题 6.4	165
6.5 定积分的应用	166
6.5.1 定积分的微元法	166
6.5.2 平面图形的面积	166
6.5.3 旋转体的体积	167
习题 6.5	169
复习题 6	169
第 7 章 微分方程	171
7.1 常微分方程的基本概念	171
习题 7.1	174
7.2 一阶微分方程	174
7.2.1 可分离变量的微分方程	174
7.2.2 一阶线性微分方程	177
7.2.3 伯努利(Bernoulli)微分方程	180
7.2.4 一阶微分方程应用举例	181
习题 7.2	183
7.3* 可降阶的高阶微分方程	183
7.3.1 $y^{(n)}=f(x)$ 型微分方程	184
7.3.2 $y''=f(x, y')$ 型微分方程	184
7.3.3 $y''=f(y, y')$ 型微分方程	185
习题 7.3	186
7.4 二阶线性微分方程解的结构	186
7.4.1 二阶齐次线性微分方程解的结构	187
7.4.2* 二阶非齐次线性微分方程解的结构	188
习题 7.4	189
7.5 二阶常系数线性微分方程	190
7.5.1 二阶常系数齐次线性微分方程	190
7.5.2 二阶常系数非齐次线性微分方程	192
习题 7.5	196

复习题 7	196
第 8 章 线性代数与空间解析几何	198
8.1 行列式	198
8.1.1 行列式的概念	198
8.1.2 行列式的性质及运算	200
8.1.3 克莱姆(Cramer)法则	202
习题 8.1	204
8.2 矩阵	205
8.2.1 矩阵的概念	205
8.2.2 矩阵的运算	206
8.2.3 逆矩阵	210
8.2.4 矩阵的秩	213
习题 8.2	215
8.3 线性方程组	216
8.3.1 消元法	216
8.3.2 初等变换法	217
8.3.3 方程组的解的存在条件	218
习题 8.3	221
8.4 向量的概念与几何运算	222
8.4.1 向量的概念	222
8.4.2 向量的加减运算	222
8.4.3 向量的数乘运算	224
习题 8.4	224
8.5 向量代数	224
8.5.1 空间直角坐标系	224
8.5.2 向量的坐标表达式	226
8.5.3 向量线性运算的坐标表达式	227
8.5.4 向量的模与方向余弦的坐标表达式	227
8.5.5 向量的数量积	228
8.5.6 向量的向量积	230
习题 8.5	232
8.6 平面与空间直线	233
8.6.1 平面及其方程	233
8.6.2 空间直线方程	237
8.6.3 直线与平面的位置关系	238

习题 8.6	239
8.7 空间曲面与空间曲线的方程	240
8.7.1 曲面方程的概念	240
8.7.2 几种常见曲面的方程	241
8.7.3 常见的二次曲面	243
8.7.4 空间曲线及其方程	245
习题 8.7	247
复习题 8	248
第 9 章 多元函数微积分	251
9.1 二元函数	251
9.1.1 二元函数的概念	251
9.1.2 二元函数的极限与连续	253
习题 9.1	254
9.2 偏导数	255
9.2.1 偏导数的概念	255
9.2.2 偏导数的几何意义	258
9.2.3 高阶偏导数	258
习题 9.2	259
9.3 全微分	260
9.3.1 全微分的概念	260
9.3.2 可微的性质	261
9.3.3 全微分在近似计算中的应用	263
习题 9.3	263
9.4 多元复合函数的导数	264
9.4.1 多元复合函数的求导法则	264
9.4.2 全微分的形式不变性	267
9.4.3 隐函数的求导法则	267
习题 9.4	270
9.5 偏导数的几何应用	270
9.5.1 空间曲线的切线与法平面	270
9.5.2 曲面的切平面与法线	272
习题 9.5	275
9.6 多元函数的极值及其求法	275
9.6.1 多元函数的极值	275
9.6.2 多元函数的最大值与最小值	277

9.6.3	条件极值	278
	习题 9.6	281
9.7	二重积分	282
9.7.1	二重积分的概念	282
9.7.2	二重积分的性质	284
9.7.3	二重积分的计算方法	285
	习题 9.7	295
	复习题 9	297
第 10 章	无穷级数	300
10.1	常数项级数的概念和性质	300
10.1.1	基本概念	300
10.1.2	常数项级数的性质	303
	习题 10.1	305
10.2	常数项级数的审敛法	305
10.2.1	正项级数及其审敛法	305
10.2.2	交错级数及其审敛法	311
10.2.3	绝对收敛与条件收敛	313
	习题 10.2	315
10.3	幂级数	315
10.3.1	函数项级数的概念	315
10.3.2	幂级数及其收敛性	316
10.3.3	幂级数的运算	320
	习题 10.3	322
10.4	函数展开成幂级数	322
10.4.1	泰勒(Taylor)级数	322
10.4.2	函数展开成幂级数的方法	323
	习题 10.4	327
	复习题 10	327
	习题答案	329
	参考文献	359

第 1 章 函 数

在自然科学、工程技术,甚至在某些社会科学中,函数是被广泛应用的一个数学概念.函数描述了现实世界中各种变量之间的相互依赖关系,是高等数学研究的基本对象.本章将给出函数的概念和基本性质.

1.1 函数的概念

1.1.1 集合的概念

集合是数学中的一个基本概念,一般地,我们将某些具有确定性质的对象组成的总体称为集合(简称集),通常用大写字母 A, B, \dots 或带下标的大写字母 A_1, B_1, \dots 表示,集合中的各个对象称为集合的元素,通常用小写字母 a, b, \dots 或带下标的小写字母 a_1, b_1, \dots 表示.如果 a 是集合 A 的一个元素,记作 $a \in A$,读作 a 属于 A ,否则记作 $a \notin A$.

把不含任何元素的集合称为空集,记为 \emptyset ;而把所研究问题的全体元素组成的集合称为全集,记为 I ;含有有限个元素的集合称为有限集,含有无限多个元素的集合称为无限集.

集合的表示方法通常有以下两种:

一种是列举法(枚举法),即将集合中的元素全部列出,写在一个花括号内,元素间用逗号隔开.例如, $A = \{a, b, c, d\}$, $N = \{0, 1, 2, \dots\}$. 用列举法表示集合时,一般对元素之间的次序没有要求,重复的元素通常看作同一个元素,在集合中用到省略号时,省略的部分必须满足一般的可认知性.

一种是描述法,一般形式是 $A = \{x | p(x)\}$,其中 x 表示 A 中的元素, $p(x)$ 表示 A 中的元素 x 所具有的特征.如 $B = \{x | 3 \leq x \leq 5, x \in \mathbf{R}\}$ 表示大于等于 3 且小于等于 5 的全体实数的集合.一般在不致混淆的情况下,可以省去“ $x \in \mathbf{R}$ ”,记为 $B = \{x | 3 \leq x \leq 5\}$.

如果集合中的元素都是数,则称其为数集.有时在表示数集字母的右上角标注“+”或者“-”来表示该数集是由所有正数或者负数构成的特定子集.常用的数集及其符号表示有以下几种:

全体自然数的集合记为 \mathbf{N} ,即 $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$. 全体正整数的集合记为 \mathbf{N}^+ ,即

$\mathbf{N}^+ = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$.

全体整数的集合记为 \mathbf{Z} , 即 $\mathbf{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$.

全体有理数的集合记为 \mathbf{Q} , 即 $\mathbf{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^+, \text{且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质}\}$.

全体实数的集合记为 \mathbf{R} .

集合之间有以下几种关系:

定义 1.1 如果集合 A 中的任意一个元素都是集合 B 中的元素, 则称 A 是 B 的一个子集, 记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$, 读作 A 包含于 B , 或 B 包含 A .

定义 1.2 如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则称 A 和 B 相等, 记作 $A = B$, 否则记为 $A \neq B$.

定义 1.3 如果 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$, 则称 A 是 B 的一个真子集, 记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

在后面许多问题的讨论中, 往往将问题限定在某两个实数之间的实数范围内, 为了简便地表示这部分实数集合, 我们引入区间和邻域的概念.

若实数 $a < b$, 满足条件 $a < x < b$ 的全体实数构成的集合称为一个开区间, 记作 (a, b) , 即 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$; 满足条件 $a \leq x \leq b$ 的全体实数所构成的集合称为一个闭区间, 记作 $[a, b]$, 即 $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$. 类似地, 可以定义半开半闭区间 $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$.

以上这些区间都称为有限区间, 数 $b - a$ 称为这些区间的长度.

除了有限区间外, 还可以定义无限区间:

$(-\infty, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbf{R}\}$; $(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$, $[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$;

$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$, $(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$.

下面给出邻域的概念.

定义 1.4 以点 x_0 为中心, δ ($\delta > 0$) 为半径的开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 称为点 x_0 的 δ 邻域, 记作 $U(x_0, \delta)$, 即

$$U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}.$$

有些情形下不要求指出邻域的半径, 则可以简单记作 $U(x_0)$, 称为 x_0 的某个邻域.

我们还可以定义以点 x_0 为中心, δ 为半径的去心邻域:

$$\dot{U}(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\},$$

它不包含邻域中心 x_0 .

1.1.2 函数的概念

在自然科学和工程技术中, 常常会遇到两种量: 常量和变量. 在某一变化过程中保持不变的量叫常量, 常用 a, b, c, \dots 表示; 在某一变化过程中不断变化的量叫变量, 常用 x, y, z, \dots 表示.

例 1.1 一个物体在做自由落体运动过程中, 物体经过的路程 s 与时间 t 之间的对应关系由公式

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

给出,其中重力加速度 g 为常量,而路程 s 与时间 t 均为变量.

例 1.2 一根导线在输送电流的过程中,电压 U 与电流 I 之间的对应关系满足欧姆定律(设电阻值保持不变)

$$I = \frac{U}{R} \text{ 或 } U = RI,$$

其中电阻 R 为常量,而 I 与 U 均为变量.

例 1.3 圆的面积 A 与它的半径 r 之间的对应关系为

$$A = \pi r^2.$$

其中 π 为常量,而 A 与 r 均为变量.

定义 1.5 设 x 与 y 是两个变量, D 为实数集的一个非空子集.若对 D 中的每一个数 x , 变量 y 按照一定的对应关系 f 总有唯一确定的值与之对应,则称 y 是 x 的(单值)函数,记作 $y = f(x)$, $x \in D$. 其中 x 称为自变量, y 称为因变量,自变量的取值范围 D 叫作这个函数的定义域.

当 x 在定义域 D 内取值 x_0 时,对应的 y 的数值为函数在点 x_0 处的函数值,记作

$$y_0 = f(x_0) \text{ 或 } y \Big|_{x=x_0} = f(x_0).$$

当 x 取遍 D 内的一切数值时,对应函数值的集合

$$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

叫作函数 $y = f(x)$ 的值域.

例 1.4 设 $f(x) = 3x^2 + 1$, 求 $f(0)$, $f(-2)$ 及 $f(a+1)$.

解 由函数的定义可知

$$f(0) = 3 \times 0^2 + 1 = 1,$$

$$f(-2) = 3 \times (-2)^2 + 1 = 13,$$

$$f(a+1) = 3(a+1)^2 + 1 = 3a^2 + 6a + 4.$$

例 1.5 设 $f(x-1) = x^2 - 3x + 2$, 求 $f(x+1)$.

解 令 $u = x-1$, 则 $x = u+1$, 所以 $f(u) = (u+1)^2 - 3(u+1) + 2$, 即

$$f(x) = (x+1)^2 - 3(x+1) + 2.$$

所以

$$f(x+1) = (x+2)^2 - 3(x+2) + 2 = x^2 + x.$$

注意 在函数的定义中有两个基本要素:

- (1) 自变量的取值范围,即函数的定义域;
- (2) 自变量与因变量之间的对应关系.

当两个函数的定义域相同,对应关系也相同时,我们将这两个函数视为同一个函数.

例 1.6 判断下列函数是否相同.

(1) $f(x) = x$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2}$;

(2) $f(x) = x$ 与 $g(x) = \frac{x^2}{x}$;

(3) $f(x)=x$ 与 $g(x)=x \cos^2 x+x \sin^2 x$.

解 (1) 由于 $g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$ 与函数 $f(x)=x$ 的对应关系不同, 所以这两个函数不相同.

(2) 在函数 $g(x)=\frac{x^2}{x}$ 中, $x \neq 0$, 与函数 $f(x)=x$ 的定义域不同, 故两个函数不相同.

(3) $g(x)=x \cos^2 x+x \sin^2 x=x$ 与函数 $f(x)=x$ 的定义域和对应关系相同, 故这两个函数相同, 即 $f(x)=g(x)$.

1.1.3 函数的定义域

定义域一般分为两种情况:

(1) 在实际问题中, 函数的定义域是根据实际意义确定的, 叫实际定义域, 如自由落体运动函数 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 中的时间 t 必须满足 $t \geq 0$ 才有意义, 即函数的定义域为 $D=[0, +\infty)$.

(2) 对于用数学解析式表示的函数, 如果不考虑它的实际意义, 那么使函数表达式有意义的一切实数组成的集合就是函数的定义域, 叫自然定义域, 简称为定义域. 例如, 函数 $f(x)=\frac{1}{2}gx^2$ (g 是常数), 它的定义域为实数集.

例 1.7 求函数 $f(x)=\frac{1}{\ln(2x+1)}$ 的定义域.

解 要使得函数有意义, 要求自变量必须满足:

$$\begin{cases} 2x+1 > 0, \\ 2x+1 \neq 1. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x > -\frac{1}{2}, \\ x \neq 0, \end{cases}$$

则函数的定义域为 $D=(-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, +\infty)$.

1.1.4 几个特殊函数

例 1.8 绝对值函数

$$y=f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

其定义域 $D=(-\infty, +\infty)$, 值域 $Z=[0, +\infty)$ (图 1.1).

如果一个函数在其定义域的不同子集上, 用不同的解析式表示, 这样的函数称为分段函数, 相应的子集的共同端点称为该函数的分段点. 需要注意的是, 尽管在不同的区间内函数的表达式不同, 但它们是一个整体, 是一个函数而不是几个函数.