普通高等教育"十二五"规划教材

GAODENG SHUXUE

高等数学

（第二版）

郭卫华　李　春◎主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

（第二版）

郭卫华　李　春　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书依据教育部2012年最新颁发的高等数学教学大纲，遵循教育部高等数学教学基本要求，结合本科少学时及高职高专教学改革的新形势，以及编者多年的教学经验，在第一版基础上重新编写而成.

本书共分10章，内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程、线性代数与空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数等内容.

本书适合本科少学时，工科、经管、财经和文科类等专业使用，也可供各类高职高专院校根据专业需求自行选用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/郭卫华，李春主编．—2版．—北京：科学出版社，2013
（普通高等教育“十二五”规划教材）
ISBN 978-7-03-038406-5

Ⅰ.①高… Ⅱ.①郭… ②李… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材
Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第196887号

责任编辑：王 超 刘文军／责任校对：柏连海
责任印制：吕春珉／封面设计：东方人华平面设计部

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
铭浩彩色印装有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2010年12月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2013年9月第 二 版 印张：23 1/2
2013年9月第二次印刷 字数：550 000

定价：39.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈铭浩〉）
销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62135763-2003

第二版前言

本书依据教育部2012年最新颁发的高等数学教学大纲，遵循教育部高等数学教学基本要求，在广泛调查研究的基础上，结合本科少学时及高职高专教学改革的新形势，以及编者多年的教学经验，尽量吸取高等数学教学改革成果和国内外诸多同类优秀教材的精华编写而成.

本书有以下几大特点：一是以素质教育为目的，重视问题的几何意义及实际应用，有利于培养学生的数学应用能力；二是内容阐述简明扼要，同时注重渗透数学思想方法，便于教师讲授和学生自学；三是章节题例设计实用，书中选有较多的例题和习题，对例题的讲解着重思路分析和解题规律的总结；四是本书配备的各类题型都是精心设计的，包括掌握基本知识、基本方法和基本技巧的习题，巩固提高的习题. 章末配备的复习题可以使学生强化全章知识的掌握，综合使用所学知识，通过训练达到能力提升的目的. 在各类题型中均设计了一定量的贴近生活实际的应用题，以增强学生综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力，为学生学习后续课程和进一步获得专业知识奠定必要的数学基础.

本书结构严谨，叙述较为详细，语言力求准确，文字通俗易懂，既突出了数学方法的介绍，又不失数学理论的系统性和科学性. 与以往所用教材相比，本书克服了教材覆盖面小，习题配备难度大、不配套等不适合本科少学时和高职高专学生学习的弊端. 本书不但会使学生在课堂上学到必要的基础知识，而且会使其基本技能得到必要的训练，能力得到普遍提高. 由于很多现代化的知识渗透其中，这将为学生进一步深造和就业奠定良好的基础.

本书由郑州轻工业学院郭卫华、李春任主编；张新敬、李永凤、吕红杰、刘强、谢栋梁任副主编. 由于编者水平有限，书中难免有不妥和纰漏之处，敬请读者不吝指教，以便我们进行改正.

编　者

2013年

第一版前言

本书是根据教育部最新颁发的《高职高专高等数学教学基本要求》，在广泛调查研究的基础上，结合高职高专教育改革的新形势，以及编者多年的教学经验和高职高专教改成果编写而成的.

本书有以下几大特点：一是以应用为目的，重视问题的几何意义及实际应用，有利于培养学生的数学应用能力；二是内容阐述简明扼要，同时注重渗透数学思想方法，便于教师讲授和学生自学；三是章、节题例设计实用，书中选有较多的例题和习题，对例题的讲解着重思路分析和解题规律的总结。对易于混淆和出错之处，采用“注”或“注意”的形式予以指出；四是每章都配备了精心设计的习题和复习题。各节习题有助于掌握基本知识和方法，复习题有助于强化全章知识，提高综合运用所学知识的能力.

本书结构严谨，叙述较为详细，语言力求准确，文字通俗易懂，既突出了数学方法的介绍，又不失数学理论的系统性和科学性。与以往所用教材相比，本教材克服了过去教材覆盖面小，习题配备难度大、不配套等不适合高职学生学习的特点，同时增加了数学实验等现代化的教学内容，供有条件的院校选用，使学生在课堂上不但能学到必要的基础知识，而且能得到基本技能的训练，为进一步深造和就业奠定良好的基础.

本书编写分工如下：平顶山城建学院兰奇逊(第 1 章)、刘玉晓(第 4～5 章)、郑州轻工业学院郭卫华(第 2～3 章)、杨萍(第 6～7 章)、李永凤(第 9 章)、李春(第 8～10 章及数学实验和习题参考答案).

由于时间仓促，编者水平有限，书中难免有不妥和纰漏之处，敬请读者不吝指教，提出宝贵的批评和建议，以便我们进行改正.

编　者

2010 年 6 月

目　录

第1章 函 数

在自然科学、工程技术，甚至在某些社会科学中，函数是被广泛应用的一个数学概念. 函数描述了现实世界中各种变量之间的相互依赖关系，是高等数学研究的基本对象. 本章将给出函数的概念和基本性质.

1.1 函数的概念

1.1.1 集合的概念

集合是数学中的一个基本概念，一般地，我们将某些具有确定性质的对象组成的总体称为**集合**(简称**集**)，通常用大写字母 $A,B,\cdots$ 或带下标的大写字母 $A_1,B_1,\cdots$ 表示，集合中的各个对象称为集合的**元素**，通常用小写字母 $a,b,\cdots$ 或带下标的小写字母 $a_1,b_1,\cdots$ 表示. 如果 a 是集合 A 的一个元素，记作 $a\in A$，读作 a 属于 A，否则记作 $a\notin A$.

把不含任何元素的集合称为**空集**，记为 $\varnothing$；而把所研究问题的全体元素组成的集合称为**全集**，记为 I；含有有限个元素的集合称为**有限集**，含有无限多个元素的集合称为**无限集**.

集合的表示方法通常有以下两种：

一种是列举法(枚举法)，即将集合中的元素全部列出，写在一个花括号内，元素间用逗号隔开. 例如，$A=\{a,b,c,d\}$，$N=\{0,1,2,\cdots\}$. 用列举法表示集合时，一般对元素之间的次序没有要求，重复的元素通常看作同一个元素，在集合中用到省略号时，省略的部分必须满足一般的可认知性.

一种是描述法，一般形式是 $A=\{x\mid p(x)\}$，其中 x 表示 A 中的元素，$p(x)$ 表示 A 中的元素 x 所具有的特征. 如 $B=\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 5,x\in\mathbf{R}\}$ 表示大于等于 3 且小于等于 5 的全体实数的集合. 一般在不致混淆的情况下，可以省去"$x\in\mathbf{R}$"，记为 $B=\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 5\}$.

如果集合中的元素都是数，则称其为数集. 有时在表示数集字母的右上角标注"+"或者"−"来表示该数集是由所有正数或者负数构成的特定子集. 常用的数集及其符号表示有以下几种：

全体自然数的集合记为 $\mathbf{N}$，即 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$. 全体正整数的集合记为 $\mathbf{N}^+$，即

$\mathbf{N}^{+}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

全体整数的集合记为 $\mathbf{Z}$,即 $\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

全体有理数的集合记为 $\mathbf{Q}$,即 $\mathbf{Q}=\{\frac{p}{q}\mid p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}^{+}$,且 p 与 q 互质$\}$.

全体实数的集合记为 $\mathbf{R}$.

集合之间有以下几种关系：

定义 1.1 如果集合 A 中的任意一个元素都是集合 B 中的元素,则称 A 是 B 的一个子集,记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$,读作 A 包含于 B,或 B 包含 A.

定义 1.2 如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则称 A 和 B 相等,记作 $A=B$,否则记为 $A\neq B$.

定义 1.3 如果 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$,则称 A 是 B 的一个真子集,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

在后面许多问题的讨论中,往往将问题限定在某两个实数之间的实数范围内,为了简便地表示这部分实数集合,我们引入区间和邻域的概念.

若实数 $a<b$,满足条件 $a<x<b$ 的全体实数构成的集合称为一个开区间,记作(a,b),即$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$;满足条件 $a\leqslant x\leqslant b$ 的全体实数所构成的集合称为一个闭区间,记作$[a,b]$,即$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$. 类似地,可以定义半开半闭区间$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$,$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$.

以上这些区间都称为有限区间,数 $b-a$ 称为这些区间的长度.

除了有限区间外,还可以定义无限区间：

$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$;$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$,$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$;

$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$,$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$.

下面给出邻域的概念.

定义 1.4 以点 x_0 为中心,$\delta(\delta>0)$为半径的开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$,称为点 x_0 的 δ 邻域,记作 $U(x_0,\delta)$,即

$$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}.$$

有些情形下不要求指出邻域的半径,则可以简单记作 $U(x_0)$,称为 x_0 的某个邻域.

我们还可以定义以点 x_0 为中心,δ 为半径的去心邻域：

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\},$$

它不包含邻域中心 x_0.

1.1.2 函数的概念

在自然科学和工程技术中,常常会遇到两种量:常量和变量. 在某一变化过程中保持不变的量叫**常量**,常用 $a,b,c,\cdots$表示;在某一变化过程中不断变化的量叫**变量**,常用 $x,y,z,\cdots$表示.

例 1.1 一个物体在做自由落体运动过程中,物体经过的路程 s 与时间 t 之间的对应关系由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给出，其中重力加速度 g 为常量，而路程 s 与时间 t 均为变量.

例 1.2 一根导线在输送电流的过程中，电压 U 与电流 I 之间的对应关系满足欧姆定律(设电阻值保持不变)

$$I=\frac{U}{R} \text{或} U=RI,$$

其中电阻 R 为常量，而 I 与 U 均为变量.

例 1.3 圆的面积 A 与它的半径 r 之间的对应关系为

$$A=\pi r^2.$$

其中 π 为常量，而 A 与 r 均为变量.

定义 1.5 设 x 与 y 是两个变量，D 为实数集的一个非空子集. 若对 D 中的每一个数 x，变量 y 按照一定的对应关系 f 总有唯一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的(单值)函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$. 其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，自变量的取值范围 D 叫作这个函数的定义域.

当 x 在定义域 D 内取值 x_0 时，对应的 y 的数值为函数在点 x_0 处的函数值，记作

$$y_0=f(x_0) \text{或} y\Big|_{x=x_0}=f(x_0).$$

当 x 取遍 D 内的一切数值时，对应函数值的集合

$$W=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$$

叫作函数 $y=f(x)$ 的**值域**.

例 1.4 设 $f(x)=3x^2+1$，求 $f(0)$，$f(-2)$ 及 $f(a+1)$.

解 由函数的定义可知

$$f(0)=3\times 0^2+1=1,$$
$$f(-2)=3\times(-2)^2+1=13,$$
$$f(a+1)=3\,(a+1)^2+1=3a^2+6a+4.$$

例 1.5 设 $f(x-1)=x^2-3x+2$，求 $f(x+1)$.

解 令 $u=x-1$，则 $x=u+1$，所以 $f(u)=(u+1)^2-3(u+1)+2$，即

$$f(x)=(x+1)^2-3(x+1)+2.$$

所以

$$f(x+1)=(x+2)^2-3(x+2)+2=x^2+x.$$

注意 在函数的定义中有两个基本要素：

(1) 自变量的取值范围，即函数的定义域；

(2) 自变量与因变量之间的对应关系.

当两个函数的定义域相同，对应关系也相同时，我们将这两个函数视为同一个函数.

例 1.6 判断下列函数是否相同.

(1) $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$；

(2) $f(x)=x$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2}{x}$；

(3) $f(x)=x$ 与 $g(x)=x\cos^2 x+x\sin^2 x$.

解 (1)由于 $g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$ 与函数 $f(x)=x$ 的对应关系不同，所以这两个函数不相同.

(2)在函数 $g(x)=\frac{x^2}{x}$ 中，$x\neq 0$，与函数 $f(x)=x$ 的定义域不同，故两个函数不相同.

(3) $g(x)=x\cos^2 x+x\sin^2 x=x$ 与函数 $f(x)=x$ 的定义域和对应关系相同，故这两个函数相同，即 $f(x)=g(x)$.

1.1.3 函数的定义域

定义域一般分为两种情况：

(1)在实际问题中，函数的定义域是根据实际意义确定的，叫**实际定义域**，如自由落体运动函数 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 中的时间 t 必须满足 $t\geqslant 0$ 才有意义，即函数的定义域为 $D=[0,+\infty)$.

(2)对于用数学解析式表示的函数，如果不考虑它的实际意义，那么使函数表达式有意义的一切实数组成的集合就是函数的定义域，叫**自然定义域**，简称为定义域. 例如，函数 $f(x)=\frac{1}{2}gx^2$（g 是常数），它的定义域为实数集.

例 1.7 求函数 $f(x)=\frac{1}{\ln(2x+1)}$ 的定义域.

解 要使得函数有意义，要求自变量必须满足：

$$\begin{cases}2x+1>0,\\2x+1\neq 1.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x>-\frac{1}{2},\\x\neq 0,\end{cases}$$

则函数的定义域为 $D=(-\frac{1}{2},0)\cup(0,+\infty)$.

1.1.4 几个特殊函数

例 1.8 绝对值函数

$$y=f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\-x, & x<0,\end{cases}$$

其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $Z=[0,+\infty)$（图 1.1）.

如果一个函数在其定义域的不同子集上，用不同的解析式表示，这样的函数称为分段函数，相应的子集的共同端点称为该函数的分段点. 需要注意的是，尽管在不同的区间内函数的表达式不同，但它们是一个整体，是一个函数而不是几个函数.