场论基础

易中 著

冶金工业出版社

场论基础

易中 著

北京
冶金工业出版社
2013

内容简介

本书从连续介质运动、非完整力学系统、电磁关系、引力场、量子效应、基本粒子构造、场的量子理论、场规范、随机场九个方面介绍了电磁场、引力场、量子场、规范场、统计场的初步知识。

本书可供暖通、化工、金融、土木、机电、计算机和建筑物理等专业的科技人员使用。

图书在版编目(CIP)数据

场论基础/易中著. —北京:冶金工业出版社,2013.6
ISBN 978-7-5024-5554-5

Ⅰ.①场… Ⅱ.①易… Ⅲ.①场论 Ⅳ.①O412.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 077091 号

出 版 人 谭学余
地　　址 北京北河沿大街嵩祝院北巷 39 号,邮编 100009
电　　话 (010)64027926 电子信箱 yjcbs@cnmip.com.cn
责任编辑 于昕蕾 李 臻 美术编辑 李 新 版式设计 孙跃红
责任校对 王永欣 责任印制 牛晓波
ISBN 978-7-5024-5554-5
冶金工业出版社出版发行;各地新华书店经销;三河市双峰印刷装订有限公司印刷
2013 年 6 月第 1 版,2013 年 6 月第 1 次印刷
850mm×1168mm 1/32; 18.625 印张; 497 千字; 583 页
59.00 元

冶金工业出版社投稿电话:(010)64027932 投稿信箱:tougao@cnmip.com.cn
冶金工业出版社发行部 电话:(010)64044283 传真:(010)64027893
冶金书店 地址:北京东四西大街 46 号(100010) 电话:(010)65289081(兼传真)
(本书如有印装质量问题,本社发行部负责退换)

前　　言

场是物理学中最基本、最重要的概念之一，场论是物理学的重要组成部分。场的概念贯穿物理学始终，无论是微观物理、介观物理，还是宏观物理、宇观物理，尤其是以相对论与量子力学为标志的近代物理学，场的思想十分突出。

场和粒子是统一的物质的两种表现形式，场反映物质的连续特性，粒子反映物质的断续特性。从某种意义上讲，场理论的主要内容是建立场方程，即描述场的运动性质的方程，如麦克斯韦电磁场方程、狄拉克相对论性电子运动方程、爱因斯坦引力场方程、杨-米尔斯场方程等。

本书从连续介质运动、非完整力学系统、电磁关系、引力场、量子效应、基本粒子构造、场的量子理论、场规范、随机场九个方面介绍了电磁场、引力场、量子场、规范场、统计场的初步知识。

本书可供暖通、化工、金融、土木、机电、计算机和建筑物理等专业的科技人员使用。

限于作者的水平，书中必定有许多不妥之处，恳请读者不吝赐教。

作　者

冶金工业出版社部分图书推荐

书　　名	定价(元)
函数论初步	29.00
统计力学基础	30.00
离散数学概论	25.00
双相钢——物理和力学冶金(第2版)	79.00
化学热力学与耐火材料	66.00
物理污染控制工程	30.00
建筑力学	35.00
理论力学	35.00
流体力学	27.00
工程流体力学(第3版)	25.00
工程力学	28.00
模糊数学及其应用(第2版)	22.00
电工与电子技术(第2版)	49.00
电工与电子技术基础	29.00
统计动力学及其应用	39.00
金属塑性成形力学原理	32.00
金属塑性成形力学	26.00
塑性力学基础	20.00
土力学地基基础	36.00
材料物理基础	42.00
冶金物理化学教程(第2版)	45.00
冶金物理化学	39.00
材料成型的物理冶金学基础	26.00
大学物理	36.00

目　录

1　连续介质运动

1.1　基本方程

1.1.1　质量守恒

先推证一个有用的公式。设物质体积为 $V(t)$、界面为 $S(t)$、物理量为 $A(\boldsymbol{r},t)$，物质在 $V(t)$ 上的总量为 $\int_V A(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}V$，于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)} A(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}V = \int_V \left[\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla\cdot(A\boldsymbol{v})\right]\mathrm{d}V \qquad (1.1)$$

事实上，分析 $V(t)$ 的变化，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)} A(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}V = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_{V+\Delta V} A(\boldsymbol{r},t+\Delta t)\mathrm{d}V - \int_V A(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}V\right]$$

式中第一项 $\frac{1}{\Delta t}$ 可移进积分号内，取极限为 A 对时间 t 的导数；第二项是体积 ΔV 中 A 的贡献，体积的变化应为 $t+\Delta t$ 时刻界面 $S(t+\Delta t)$ 与 t 时刻界面 $S(t)$ 之差，面元 $\mathrm{d}S$ 的外法线为 $\boldsymbol{n}$，$\mathrm{d}S$ 处发生的区域变化为 $\mathrm{d}V = v_n \Delta t \mathrm{d}S$ 且 $v_n = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}$，对整个曲面积分应是 Δt 内该物质体积的变化 ΔV，命 $\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \mathrm{d}\boldsymbol{S}$，

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta V} A(\boldsymbol{r},t+\Delta t)\mathrm{d}V = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\oint_S A v_n \Delta t \mathrm{d}S = \oint_S A\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

应用高斯公式，

$$\oint_S A\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \nabla\cdot(A\boldsymbol{v})\mathrm{d}V$$

两项相加就得到式(1.1)。

现讨论质量守恒问题。设 M 为物质质量，根据物质不灭原理，有

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad (1.2)$$

用 V 表示连续介质占据的体积、ρ 为其密度，对于 $M=\int_V \rho \mathrm{d}V$，依式(1.1)，

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \mathrm{d}V=\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{v})\right]\mathrm{d}V=0$$

由 V 的任意性知

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{v})=0 \tag{1.3}$$

或

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho\right)+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$$

或

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0 \tag{1.4}$$

称式(1.3)为连续性方程。利用式(1.1)、式(1.4)可以推出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho A\,\mathrm{d}V=\int_V \rho\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V \tag{1.5}$$

1.1.2 运动方程

设 $\boldsymbol{f}$ 为单位质量力、$\boldsymbol{\sigma}$ 为应力张量，故体积为 V 的连续介质所受质量力的合力 $\int_V \boldsymbol{f}\rho \mathrm{d}V$，通过界面 S 所受表面力的总和为 $\oint_S \boldsymbol{\sigma}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$，而连续介质的总动量为 $\int_V \boldsymbol{v}\rho \mathrm{d}V$，依牛顿第二定律，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \boldsymbol{v}\rho \mathrm{d}V=\int_V \boldsymbol{f}\rho \mathrm{d}V+\oint_S \boldsymbol{\sigma}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.6}$$

左端利用式(1.5)，右端第二项利用高斯定理，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \boldsymbol{v}\rho \mathrm{d}V=\int_V \rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V$$

$$\oint_S \boldsymbol{\sigma}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}V$$

式(1.6)写成

$$\int_V \left[\rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} - \rho \boldsymbol{f} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}\right] \mathrm{d}V = 0$$

从 V 的任意性推出连续介质运动方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{1.7}$$

或

$$\rho \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \quad (i = 1,2,3)$$

关于动能问题。今以 $\boldsymbol{v}$ 点积式(1.7),

$$\rho \boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}}{\mathrm{d}t} = \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f} + \boldsymbol{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \tag{1.8}$$

而

$$\rho \boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

又定义张量缩并运算 $A : B = A_{ij} B_{ji}$,由此知

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial}{\partial x_k}(v_i \sigma_{ik}) = \boldsymbol{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \boldsymbol{v} \tag{1.9}$$

利用 $\boldsymbol{\sigma}$ 的对称性可以证明

$$\boldsymbol{\sigma} : \nabla \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{e} + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varphi}$$

式中 $\boldsymbol{e}$ 为应变张量且 $\boldsymbol{\varphi}$ 是反对称性的,从而 $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varphi} = 0$,表明连续介质刚性转动时应力作功为零,即

$$\boldsymbol{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \nabla \cdot (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{e}$$

这样得到动能定理的微分形式

$$\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f} + \nabla \cdot (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{e} \tag{1.10}$$

当质量力有势时 $\boldsymbol{f} = -\nabla \varepsilon$,其中 ε 为单位质量在外场中的势能,它依赖于时间 $\varepsilon = \varepsilon(\boldsymbol{r}, t)$,结果

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f} = -\boldsymbol{v} \cdot \nabla \varepsilon = -\left(\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right) \tag{1.11}$$

式(1.10)变成

$$\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}v^2 + \varepsilon\right) = \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{e} \tag{1.12}$$

对确定体积 V 的连续介质，通过对式(1.10)在 V 上积分，并使用高斯定理得到动能定理的积分形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \frac{1}{2}\rho v^2 \mathrm{d}V = \int_V \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}\mathrm{d}V + \oint_S \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} - \int_V \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{e}\mathrm{d}V \quad (1.13)$$

式(1.13)左端是体积为 V 的连续介质总动能变化率；右端第一项是单位时间内质量力作功的总和，第二项是单位时间内 S 表面表面力作功的总和；最后一项是单位时间内因为形变内应力作功的总和，它是机械能、热能之间的转化项。由于形变，应力所作功为正时是机械能转变为热能，系统动能相应减少，因此该项前取负号，系统的机械能不守恒。

下面讨论角动量问题。体积为 V、界面为 S 的连续介质，对某定点角动量的变化率应当等于质量力以及来自界面外的表面力力矩之和。质量元 $\rho\mathrm{d}V$ 的角动量为 $\mathrm{d}\boldsymbol{J}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\rho\mathrm{d}V$，$\rho\mathrm{d}V$ 受到质量力力矩为 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}\rho\mathrm{d}V$，$S$ 表面面元 $\mathrm{d}S$ 上的表面力力矩为 $\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S})$，则物体 V 的角动量定理为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\rho\mathrm{d}V = \int_V \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}\rho\mathrm{d}V + \oint_S \boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}) \quad (1.14)$$

应用式(1.5)、高斯定理并考虑 V 的任意性，产生

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f} + \frac{1}{\rho}\nabla\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\sigma}) \quad (1.15)$$

通过式(1.15)、式(1.7)可以自然地导出应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的对称性。

1.1.3 热力学约束

根据热力学第一定律，

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \quad (1.16)$$

对于体积为 V、表面为 S 的连续介质，取比内能为 e_0、比动能为 $\frac{1}{2}v^2$，又单位质量力为 $\boldsymbol{f}$、热源密度为 h、热流强度为 $\boldsymbol{q}$、应力张量为 $\boldsymbol{\sigma}$，所以物体的总能量变化是

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\left(\frac{1}{2}v^2+e_0\right)\rho\mathrm{d}V$$

外力作机械功为

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\int_V \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\rho\mathrm{d}V+\oint_S\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

单位时间热源放出的总热量是 $\int_V h\rho\mathrm{d}V$，单位时间通过界面 S 流入的热量是 $-\oint_S\boldsymbol{q}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$；于是单位时间增加的热量是

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\int_V h\rho\mathrm{d}V-\oint_S\boldsymbol{q}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

代入式(1.16)得到积分形式的能量方程

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\left(\frac{1}{2}v^2+e_0\right)\rho\mathrm{d}V\\ &=\int_V(h+\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v})\rho\mathrm{d}V+\oint_S(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{v}-\boldsymbol{q})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\end{aligned}\qquad(1.17)$$

利用式(1.5)得到微分形式的能量方程

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}v^2+e_0\right)=\rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}+\rho h+\nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{v})-\nabla\cdot\boldsymbol{q}\qquad(1.18)$$

再依动能定理得到微分形式的内能公式

$$\rho\frac{\mathrm{d}e_0}{\mathrm{d}t}=\rho h-\nabla\cdot\boldsymbol{q}+\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{e}$$

能量方程建立了连续介质在运动变形过程中机械能、热能的相互转化与守恒关系，同样连续介质发生的任何运动也受到热力学第二定律的约束。

1.2 本构关系

在 1.1 节中建立了连续介质的基本方程，即质量守恒、动量守恒、能量守恒，

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0\qquad(1.19)$$

$$\rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \rho \boldsymbol{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{1.20}$$

$$\rho \frac{\mathrm{d}e_0}{\mathrm{d}t} = \rho h - \nabla \cdot \boldsymbol{q} + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{e} \tag{1.21}$$

因为本构关系与坐标系的选择无关，本构关系具有时间、空间平移不变性和空间旋转不变性，所以本构方程必定为张量形式。

1.2.1 理想弹性体

理想弹性体就是小变形的各向同性的线性形变的连续介质，其形变可逆。于是单位体积的形变势能为

$$W(e_{ij}) = \frac{1}{2}\lambda e_{ii}^2 + \mu e_{ij}^2 \tag{1.22}$$

式(1.22)为等温形变理想弹性体形变能的一般表达式；λ、μ 为弹性常数(拉梅系数)，由实验确定。理想弹性体的应力应变关系为

$$\sigma_{ij} = \lambda e \sigma_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (i,j = 1,2,3) \tag{1.23}$$

式中

$$e = \nabla \cdot \boldsymbol{u} \quad (\boldsymbol{u}\text{ 为位移})$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

对理想流体，无黏滞阻力，切应力为零，则

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (p\text{ 为压强}) \tag{1.24}$$

最普通的各向异性连续介质的形变能为

$$W = \frac{1}{2}C_{ijkl}e_{ij}e_{kl} \tag{1.25}$$

其应力应变关系为

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}e_{kl} \tag{1.26}$$

$C_{ijkl} = C_{klij}$ 称为弹性模量张量。

1.2.2 黏滞弹性体

弱黏滞弹性体有内摩擦，为此应增加黏滞应力 σ_{ij}'，即