

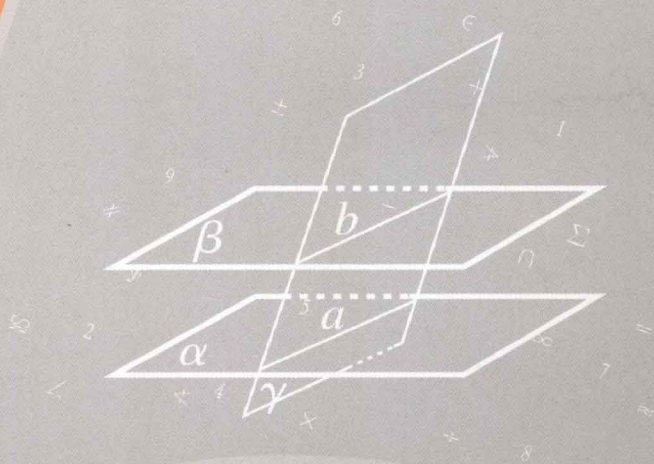


普通高等教育“十二五”规划教材
新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材

数学教学论

SHUXUE JIAOXUELUN

● 胡典顺 徐汉文 主编
梅全雄 主审



普通高等教育“十二五”规划教材
新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材

数学教学论

主 编	胡典顺	徐汉文	
副主编	李 渺	冯光庭	龙 鸣
主 审	梅全雄		

华中师范大学出版社

内 容 简 介

中国师范教育的目的是要培养大批优秀的教师,造就大批有思想、有理想、有作为的未来教育家。我国新一轮数学课程改革的实施对中小学数学教师提出了许多新的要求,本书正是在这一现实背景下编写的。

本书主要包括:数学的本质与数学观的演变、国内外数学课程改革的近况、中学数学学习理论、数学教学原则、数学能力、数学思维、数学思想方法、数学教学方式、中学数学教学设计、中学数学教学技能、中学数学解题研究、数学说课以及数学教育与论文写作等。

本书可以在师范大学和综合性大学使用,既可作为本科生的教材、研究生的参考读物,又可作为数学教师培训的教材,还可供中小学数学教师、教研员以及广大数学教育研究者参考阅读。

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

数学教学论/胡典顺,徐汉文 主编. —武汉:华中师范大学出版社,2012. 7
(普通高等教育“十二五”规划教材/新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材)

ISBN 978-7-5622-5645-8

I. ①数… II. ①胡… ②徐… III. ①数学教学—教学研究—高等学校—教材
IV. ①O1-4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 174710 号

数学教学论

© 胡典顺 徐汉文 主编

编辑室:第二编辑室

电 话:027—67867362

责任编辑:袁正科

责任校对:罗 艺

封面设计:胡 灿

出版发行:华中师范大学出版社

社 址:湖北省武汉市洪山区珞喻路 152 号

邮 编:430079

销售电话:027—67863426/67863280(发行部)

邮购电话:027—67861321

传 真:027—67863291

网 址:<http://www.ccnpublish.com>

电子信箱:hscbs@public.wh.hb.cn

印 刷:湖北新华印务有限公司

督 印:章光琼

开 本:787mm×1092mm 1/16

印 张:14.75

字 数:320 千字

版 次:2012 年 8 月第 1 版

印 次:2012 年 8 月第 1 次印刷

印 数:1—3000

定 价:29.80 元

欢迎上网查询、购书

敬告读者:欢迎举报盗版,请拨打举报电话 027—67861321。

前 言

著名的华裔数学家项武义教授在谈到中国数学教育的现状时说:“老师的程度和实力是决定整个国家实力的一个很重要的部分,而此事尚未成功。”中国数学教育的未来寄托在广大教师身上,他们的作为将决定这个事业的高度。师范教育就是要培养大批优秀的教师,造就大批有思想、有理想、有作为的未来教育家。我国新一轮数学课程改革的实施对中小学数学教师提出了许多新的要求。《数学教学论》是一门理论与实践相结合的课程,是普通高等师范院校数学与应用数学专业本科生的专业必修课,是培养中小学数学教师的主干课程。为了适应新世纪高等师范院校数学教育教学改革实践的需要,我们编写了《数学教学论》一书。本书可作为高等院校数学教育专业本科生、研究生教材,也可供中小学数学教师、教研员以及广大数学教育研究者参考。

本书是作者承担的湖北省高等学校教学研究项目——新课程理念下《数学教学论》的课程建设与教学模式研究和实践(项目编号:2008121)和华中师范大学教师教育课程《数学教学论》资源建设项目(项目编号:A2-15)的研究成果之一。在编写本书的过程中,我们根据多年从事《数学教学论》教学和研究的经验,在广泛吸收国内外数学教育教学最新理论研究成果和优秀实践经验的基础上,基于理论深化、案例分析、问题驱动以及研究性学习的探讨,力争使《数学教学论》知识通俗易懂,让学习者熟悉数学教育理论,掌握数学教学方法,提高数学教学能力,以及提高师范生运用数学教育理论解释数学教育现象和解决教学实践问题的能力。

本书共分十三章,主要内容包括:数学的本质与数学观的演变、国内外数学课程改革的近况、中学数学学习理论、数学教学原则、数学能力、数学思维、数学思想方法、数学教学方式、中学数学教学设计、中学数学教学技能、中学数学解题研究、数学说课以及数学教育研究与论文写作。

在编写本书的过程中,我们参阅了国内外大量研究成果和相关文献资料,有的在参考文献中已经列出,更多的在书中并没有列出,在此,我们向这些作者致以诚挚的谢意!本书得以顺利出版与华中师范大学数学与统计学学院领导的大力支持和华中师范大学出版社的鼎力相助是分不开的,尤其是华中师范大学出版社袁正科老师仔细审阅书稿,并提出

了许多宝贵的修改意见,为本书增添了不少亮色.能完成本书,我们还要向许多人致以真诚的谢意.本书初稿在多年的使用过程中,华中师范大学数学与统计学学院历届本科生和研究生提出了许多有建设性的意见.华中师范大学数学与统计学学院研究生胡小雪、何金红对全书进行了细致的校对,本书的完善离不开她们的支持.

由于我们水平有限,本书虽几经琢磨,校正再三,但错误或疏漏之处仍在所难免,敬请专家和广大读者批评指正.

为了方便老师们开展《数学教学论》课程的多媒体教学,我们愿意向老师们免费提供相关内容的电子稿和 PPT 课件,需要的老师请发邮件到邮箱:shulun04@yahoo.com.cn.

编者

2012 年 5 月

目 录

绪论	1
第一章 数学的本质与数学观的演变	6
第一节 数学是什么	6
第二节 人为什么要学数学	9
第三节 数学观的内涵与演变	14
复习参考题	20
研究性问题	20
第二章 国际数学教育的改革运动	21
第一节 20 世纪初的数学教育	21
第二节 新数学运动	22
第三节 近 20 年来中学数学教育与课程改革简介	25
第四节 《普通高中数学课程标准(实验)》简介	40
复习参考题	48
研究性问题	48
第三章 中学数学学习理论	49
第一节 古典理论	49
第二节 行为主义	49
第三节 认知心理学	52
第四节 皮亚杰的发生认识论	57
第五节 维果茨基的认知发展理论	58
第六节 建构主义	60
复习参考题	63
研究性问题	63
第四章 数学课程观及教学原则	64
第一节 数学课程观	64
第二节 教学原则概述	69
第三节 数学教学原则	72

第四节 四条教学原则简介	74
复习参考题	79
研究性问题	79
第五章 数学能力	80
第一节 数学能力的含义与结构	80
第二节 数学能力的类型	83
复习参考题	92
研究性问题	92
第六章 数学思维	93
第一节 数学思维及其特征	93
第二节 数学思维的分类	95
第三节 中学数学思维的一般方法	98
第四节 数学思维品质	107
复习参考题	111
研究性问题	111
第七章 数学思想方法	112
第一节 什么是数学思想方法	112
第二节 数学思想方法的教学途径	113
第三节 例说数学思想方法的教学	118
复习参考题	121
研究性问题	121
第八章 数学教学方式	122
第一节 常规数学教学方式及其改进	122
第二节 数学合作学习	123
第三节 数学发现学习及其促进	126
第四节 数学对话教学	131
复习参考题	141
研究性问题	141
第九章 中学数学教学设计	142
第一节 数学教学设计概述	142
第二节 数学教学设计的步骤	146
第三节 案例展示	152
复习参考题	160

研究性问题	160
第十章 中学数学教学技能	161
第一节 课题导入技能	161
第二节 讲授的技能	164
第三节 课堂提问	167
第四节 教学的结束	174
复习参考题	176
研究性问题	176
第十一章 中学数学解题研究	177
第一节 追求自然想法	177
第二节 减少解题废招	182
第三节 寻求一般结论	183
第四节 渗透思想方法	185
第五节 注意解题反思	193
第六节 换个角度思考	198
复习参考题	202
研究性问题	202
第十二章 数学说课	203
第一节 说课与备课的关系	203
第二节 说课与讲课的关系	204
第三节 说课中要注意的问题	205
第四节 说课内容	206
第五节 案例展示	209
复习参考题	214
研究性问题	214
第十三章 数学教育与论文写作	215
第一节 做研究型的数学教师	215
第二节 数学教育研究的方法	216
第三节 数学教育论文写作	221
复习参考题	223
研究性问题	223
参考文献	224

绪论

一、课程演变

我国最早的数学教育理论的相关学科称为“数学教授法”。在清末，京师大学堂开始设置“算学教授法”课程。1897年，清朝天津海关道盛宣怀创办南洋公学，内设师范院，开设“教授法”课程。之后，一些师范院校相继开设各科教授法。20世纪20年代前后，任职于南京高等师范学校的陶行知先生，提出改“教授法”为“教学法”的主张，虽被校方拒绝，但这一思想却逐渐深入人心，得到社会的承认。“数学教学法”的名称一直延续到20世纪50年代末。20世纪30年代至40年代，我国陆续出版了几本《数学教学法》，如1949年商务印书馆出版了刘开达编著的《中学数学教学法》。这些书多半是根据前人或国外关于教学法的研究，并结合教学实践进行修补而总结的经验，还没有形成成熟的教育理论。

新中国成立后，我国的《中学数学教学法》用的是苏联伯拉基斯的《数学教学法》，其内容主要介绍中学数学教学大纲的内容和体系，以及中学数学中的主要课题的教学法，这些内容虽然仍停留在经验上，但比起以往只学习普通的教学方法有所进步，变成了专门的中学数学教学法。20世纪70年代，随着国外已把数学教育作为单独的科学研究，我国的《数学教学法》或《数学教材教法》一直是高师院校数学系体现师范特色的一门专业基础课。1979年，北京师范大学等全国13所高等师范院校合作编写的《中学数学教材教法》（《总论》和《分论》）一套书，作为高等师范院校的数学教育理论学科的教材，是我国在数学教学论建设方面的重要标志。20世纪80年代，我国的数学教学论不仅与国际数学教育共同发展，而且无论是在数学教学活动还是在数学教育理论研究方面都形成了自己的特色。在数学教学法的基础上，开始出现数学教学的新理论。国务院学位委员会公布的高等学校“专业目录”中，在“教育学”这个门类下设立了“教材教法研究”一科，使学科教育研究的学术地位得到确认。1983年“教材教法”更名为“学科教学论”，从此学科教学论有了较大的发展。将“教材教法”改为“学科教学论”不只是名称上的不同，更是一次理论上的飞跃，因为教材教法只是教育学的一个部分，学科教学论则变成了教育科学中的一个重要分支学科。

1985年，苏联著名数学教育学家A·A·斯托利亚尔的《数学教育学》一书中译本由人民教育出版社出版发行。“数学教育学”的名字开始在我国流行。1989年，曹才翰和蔡金法编著的《数学教育学概论》问世，标志着数学教学法演变为数学教育学。1991年张奠宙等编著的《数学教育学》出版，该书结合我国数学教育的实际对数学教育领域内的

某些问题,提出了一些新视角,对数学教育学的研究有一定价值。1997年吴宪芳等编著的《数学教育学》由华中师范大学出版社出版,该书在国内数学教育界有一定影响。2003年,高等教育出版社出版的由张奠宙、李士琦、李俊编著的《数学教育学导论》是基础教育新课程教师教育系列丛书之一,该书用较新的观点阐述了中小学数学教育的若干专题,与当时正在实验的国家数学课程标准相适应。2004年张奠宙和宋乃庆主编的《数学教育概论》由高等教育出版社出版,该书由实践篇与理论篇两大板块组成,将内容分为若干专题。

另外,1992年由中国教育学会和天津师范大学主办的《数学教育学报》创刊,是数学教育研究的核心刊物,它的发行对数学教育理论研究与实践探索发挥了重要作用。近几年来,随着新一轮数学课程改革的进行,涌现了一大批优秀的研究成果,出版了一系列数学教育学著作,包括“数学课程论”、“数学学习论”、“数学思维论”、“数学方法论”、“数学教育评价”、“数学文化”、“数学教育哲学”等,其内容已远远超越数学教学论所涵盖的知识。

二、课程内容

数学教学论是研究数学教学过程中教和学的联系、相互作用及其统一的科学。具体地说,数学教学论是以一般教学论、学习论以及教育学和心理学的基本理论为基础,从数学教育的实际出发,分析数学教学过程的特点,揭示数学教学过程的规律,研究数学教学过程中的诸要素(教学方法、教学组织形式、教学条件等)及其相互关系,帮助教师端正教学思想和形成教学技能,并对数学教学的效果展开科学的评价。

A·A·斯托利亚尔把教学过程分解成下列要素:教学目的(为什么教?)、教学对象(教谁?)、教学内容(教什么?)、教法(如何教?)^①。既然数学教学论的研究对象是数学教学,那么其内容就必然离不开“为什么教”、“教什么”以及“如何教”等问题。

其一,为什么教。要理解为什么教,就必须了解数学的本质以及数学观的演变,具有适当的数学观和数学教育观,理解数学教育的目的等。有什么样的数学观和数学教育观就有什么样的数学教学观,因而作为未来的中小学数学教师,应该树立适当的数学观。教学目的是一切教学工作的出发点和归宿,是教学工作的灵魂,也是课程评价的重要依据。

其二,教什么。《数学教学论》要尽量避免理论知识较多,联系中小学实践知识较少,内容陈旧等现象。为适应新一轮数学课程改革的要求,《数学教学论》在“教什么”的问题上应该适应数学课程改革的潮流,适应中小学数学教学的需要。课程内容要理论性和实践性相结合,要有针对性、实践性和时代性。

其三,如何教。“如何教”涉及教学方法问题,即按照怎样的教学规律,采用什么教学方法来教的问题。《数学教学论》课程重在培养师范生的数学观念、数学能力以及数学教学技能等。让师范生能深刻地领会数学教育的价值,了解数学思维的结构与特性,了解数学

^① [苏] A·A·斯托利亚尔:《数学教育学》,人民教育出版社,1985年,第10页。

能力的含义与培养,了解传授知识的方法和技巧,尽快完成由学生向教师角色的转换。

三、为什么要学习这门课

有人认为,数学教师是讲数学的,只要具备一定的数学知识就能够上好数学课,何必学习数学教学论?还有人认为,从小就学习数学,还不知道怎样上数学课?果真如此吗?

今天,师范院校毕业生“独占”教师职位的历史已经结束。所有具备一定的数学知识,又有数学教学能力,且愿意从事数学教育的人,都可以通过教师资格考试获得教师资格证书。近年来,随着教师职业地位的提高以及就业压力的增大,一些综合性大学数学系的毕业生相继进入中小学教师行业,他们已经成为师范生就业不可忽视的竞争对手。那么,师范院校的教育优势在哪里?高师院校数学系培养的学生有何特长?师范生拿什么与综合性大学的毕业生竞争?这些问题都值得我们深思。

20世纪80年代中期,在西方教师专业化运动中,美国学者舒尔曼(Shulman)针对当时美国教师教育研究中存在的学科知识与教育学知识分离的现象,提出“缺失的范式”(Missing Paradigm),给出“学科教学知识”(Pedagogical Content Knowledge,简称PCK)的概念。对数学学科而言,PCK在数学教育中的具体体现就是“数学学科教学知识”,即MPCK(Mathematics Pedagogical Content Knowledge)。这表明,对教师专业的发展来说,要成为一名优秀的数学教师,不仅需要完备的数学知识,还需要具备针对特定内容的教学知识。对数学教与学来说,教师不仅要掌握丰富的数学学科知识和熟练的教学技巧,更需要具备将学科知识有效地传递给学生的知识^①。

高师数学教育的培养目标是为国家教育事业的发展培养一流的师资。师范毕业生必须具备教师教育专业素养:乐教——具有坚定的职业信念、良好的师德、高度的责任感和团队合作精神;懂教——树立正确的教育思想观念,掌握教育教学方面的基本知识和基本理念,了解基础教育改革的实践状况;会教——具备过硬的教学基本技能,具备应用现代教育技术组织、设计课堂教学活动的的能力,具有一定的教学研究能力。《普通高中数学课程标准(实验)》的实施对中小学数学教师提出了新的挑战。从课程理念来看,提出了一种全新的数学课程理念;从课程目标来看,提出了“知识与技能,过程与方法,情感、态度与价值观”的三维课程目标。在关注知识与技能的同时,更加关注过程与方法、情感态度与价值观;从课程内容来看,基础教育新数学课程与原课程相比有重大变化;从学习方式来看,动手实践、自主探索与合作交流是学生学习数学的重要方式;从课堂教学来看,学生是数学学习的主人,教师是数学学习的组织者、引导者与合作者,教师的角色发生了重大转换;从评价方式来看,提倡评价目标的多维性、评价方法的多样性和评价主体的多元性,变单一的静态评价为动静结合的过程性评价^②。

今天中小学数学教师必须具备现代教育的思想和方法,具有适当的数学观及数学教

① 胡典顺:《MPCK视角下的解题案例分析》,《数学通讯》,2011年第12期。

② 胡典顺:《新政策背景下高师数学教育课程改革探究》,《数学教育学报》,2008年第6期。

育观,树立以人为本的现代教学理念,形成正确的教学质量观,符合时代特征的学生观,以及能够熟练地运用现代教育技术等。很难想象,一个不懂得教学理论和教学方法的教师,他会根据学生的认知水平进行“换位思考”吗?他会充分发挥学生学习的主体作用使课堂教学生动活泼吗?他会使数学教科书中的各种知识由“冰冷的美丽”到“火热的思考”吗?等等。因而,人们认为,合格的数学教育专业毕业生的知识结构是:具备一定深度的数学学科知识和教育学、心理学、教学法、教育技术等知识,并使这些知识融合成一个有机的整体。

从促进教师的专业发展出发,香港中文大学黄毅英教授构建了 MPCK 的结构模型(图 1)。他认为数学教师开展常规教学应具备 3 类知识:数学学科知识(Mathematics Knowledge,简称 MK),一般教学法知识(Pedagogical Knowledge,简称 PK),有关数学学习的知识(Content Knowledge,简称 CK)^①。在实际教学中,教师往往需要综合运用这 3 类知识,才能把科学形态的数学知识有效地转化为教育形态的数学知识。一般的,MPCK 是 3 个基本集合 MK、PK、CK 的公共部分。在通常情况下,随着教学经验的积累,MK、PK、CK 往往会增大,而且它们的交集部分会越来越大,形成的 MPCK 就会越来越丰富。

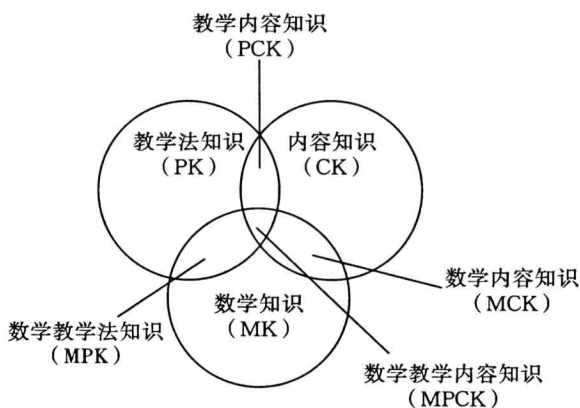


图 1 MPCK 一般结构图

长期以来,在应试教育的背景下,不少教师把学生训练成考试机器。数学教学就是应付考试,不尊重学生的个性,不讲教学艺术,照本宣科满堂灌,题海战术满天飞。这种教学方法既耗费师生精力和时间,又难以让师生体验到数学的乐趣。以至于在数学教育中,我们不得不面对这样的现实:对大多数学生来说,数学学习是一个失败的经历,数学是一种苦味的回忆^②。针对应试教育存在的种种弊端,从 20 世纪 90 年代开始,我国就提出素质教育的主张,强调基础教育要由应试教育向素质教育转变,学校教育应该是面向全体学生,全面提高学生的思想道德、文化科学、劳动技能和身体心理素质,促

^① 黄毅英、许世红:《数学教学内容知识——结构特征与研发举例》,《数学教育学报》,2009 年第 1 期。

^② 胡典顺:《基于数学意义的数学教学改革研究》,华中师范大学出版社,2011 年,第 240 页。

进学生生动活泼地发展。

由于数学教学论的基本内容来源于数学教学实践,其中许多观点、方法都是活跃在教学第一线的数学教师通过教学实践总结出来的,数学教学论的相关理论又汲取了教育学、心理学的研究成果,并且把它们与数学教学的具体内容及过程结合起来,使之更具针对性和适用性。通过数学教学论的学习,可以提高数学教学效率,让学生形成恰当的数学观,充分认识数学的文化价值,用数学的方法思考问题等。由此可见,数学教学论是一门不可或缺的高等师范院校数学教育专业的必修课,学习这门课程是非常必要的。

四、如何学好这门课

华中师范大学本科毕业生人才培养质量调查表明,学生认为数学与应用数学专业最有价值的课程之一是数学教学论。那么,如何学好这门课呢?笔者根据多年从事数学教学论教学的经验认为,要学好本课程,对于学生来说,应该注意以下几个方面:其一,培养自己对本课程的兴趣,兴趣是最好的老师;其二,丰富自己的理论知识,广泛阅读相关论著;其三,结合实践思考教育教学的问题,特别是要关注数学教育的热点问题;其四,加强数学专业知识的学习,尤其是与中学数学有关的专业知识,要做到数学教育能“上通数学,下达课堂”;最后,要做到理论联系实际,丰富自己的教学经验,可以从以下方面入手:了解中小学数学教材,研讨教学案例,进行微格教学,讲课说课实践,观摩或观看名师教学,进行评价与反思,成立兴趣小组等。

第一章 数学的本质与数学观的演变

《普通高中数学课程标准(实验)》明确提出“强调本质，注意适度形式化”，指出在数学教学中，要“进一步理解数学的本质”。事实上，要真正理解数学的本质，首先必须回答“数学是什么？”这个问题看似是纯理论问题，而对于数学教育来说却是很实际、很重要的问题。对“数学是什么？”不同的回答对应不同的立足点，表明不同的数学观。数学教师的数学观直接影响他们教什么、怎样教。数学观与数学教育活动密切相关，有什么样的数学观，就有什么样的数学教育观。对“数学是什么？”的回答，甚至影响到数学教育中师生之间的关系。

第一节 数学是什么

一、哲学认识

数学存在于理念世界。柏拉图主义认为，数学研究的对象尽管是抽象的，却也是客观存在的。数学对象包括数和由数组成的算式，它是一种独立的、不依赖于人类思维的客观存在。在数学实践中，许多杰出的数学家都赞同柏拉图主义的数学观，认为数学是独立于人类思维活动的客观存在，数学对象如自然数、点、线、面都是客观存在的东西。

数学对象是抽象的存在。亚里士多德通过批判柏拉图的数学哲学观点，建立了自己的数学哲学理论。他认为理念不应该离开感觉而独立存在，理念即在事物之中。在他看来，公理不具有先验的性质，而是观察事物而得到的，是人们的一般性认识。数学对象是抽象的存在，数不是事物的本体而是属性。亚里士多德的观点标志着人类在抽象与具体、一般与个别的关系问题上的认识大大前进了一步。

数学是综合判断。在康德看来，我们的一切知识都从经验开始，这是没有任何值得怀疑的。康德认为人的先天感性直观形式有两种：时间和空间。数学是人总结经验创造出来的，但是人要靠先天的直观才能把它创造出来。数学是思维创造的抽象实体。对于数学命题，康德强调了其综合性。康德区分了“分析的知识”与“综合的知识”，尽管他关于分析与综合判断的区别表述得非常晦涩。

数学是一种约定。约定主义认为数学思维是一种发明过程，数学的公理、符号、对象、结论的正确性，无非是人们之间的一种约定。因而数学是可以没有任何实际意义的内容。数学真理的必然性是指命题在定义下的必然性。从历史上看，约定主义在数学哲

学中是由非欧几何和抽象代数所激发的。但是，为什么由约定而产生的结论与现实世界是如此的相符？为什么数学的应用是如此的广泛？约定主义不能给出一个令人信服的解释。

数学是逻辑。以罗素和弗雷格为代表的逻辑主义认为，数学就是逻辑。罗素和怀特海合著的《数学原理》的主要目的是说明整个纯粹数学是从逻辑的前提推演出来的。弗雷格在《算术基础》中主张把算术的基础归结为逻辑。对于数学与逻辑的关系，罗素进行了深刻的论述，他甚至试图证明它们是等同的。

数学是直觉构造。德国数学家克罗内克主张在直觉的基础上，用构造的方法建立的数学才是可靠的，否则是不能接受的。以布劳威尔为代表的直觉主义认为，数学是独立于物质世界的直觉构造，数学的对象，必须能像自然数那样明示地以有限步骤构造出来，才可以认为是存在的。由于他们主张一种“构造性数学”，所以直觉主义也被称为构造主义。

数学是形式符号。形式主义旨在通过把数学化归为形式符号的操作而不是逻辑，来为数学提供一个新的基础，试图把数学转化为无意义的游戏而保证其基础的安全。以希尔伯特为首的数学家们相信可以应用形式的公理化治愈由于悖论的出现而得以暴露的数学疾病。然而，哥德尔不完全性定理证明希尔伯特的计划必然失败——任何包含初等算术的形式系统都无法证明其自身的相容性。

二、一些隐喻

数学是一种方法。数学能使人们的思维方式严格化，养成有步骤地进行推理的习惯。人们通过学习数学，能获得逻辑推理的方法，由此他们就可以把知识进行推广和发展。M·克莱因指出：“从更本质的方面来说，数学主要是一种方法。它具体体现在数学的各个分支中，如关于实数的代数、欧几里得几何或任意的非欧几何。通过探讨这些分支的共同结构，我们对这种方法的显著特征将会有有一个清楚的了解。”^①数学也是一种解决问题的方法。我们经常用字母、数字及其他数学符号建立起来的等式或不等式以及图表、图像、框图等描述客观事物的特征及其内在联系，这种数学结构表达式就是数学模型。其实，欧几里得几何本身就是一种数学模型，数学正是通过欧几里得几何而获得最严格与最纯粹的科学的声誉的。一些人把数学作为一种工具得到有趣的结果，这里数学就是用来进行数值计算和构造模型的。当数学模型由于预见性强而取得成功时，就使得即使人们在不那么满意的情况下，也会不断受到诱惑要去应用数学模型。

数学是一种思维。它牢固地扎根于人类智慧之中，即使是原始民族，也会在某种程度上表现出这种数学思维的能力。原始部落的人能立刻说出一大群羊中少了一只时，他们所依赖的是集合间元素对应的方法。列维·布留尔在其名著《原始思维》中指出：“在原始人的思维中，从两方面看来数都是在不同程度上不分化的东西。在实际应用中，它还或多或少与被计算的东西联系着。在集体表象中，数及其名称还如此紧密地与被想象

^① [美]M·克莱因：《西方文化中的数学》，张祖贵译，复旦大学出版社，2004年，第453页。

的总和的神秘属性互渗着，以至与其说它们是算术的单位，还真不如说它们是神秘的实在。”^①随着人类文明的发展，数学表现出了人类思维的本质和特征，并体现在任何国家与民族的文明中。任何一种完善的形式化思维，都不能忽略数学思维。人们常常说“数学是思维的体操”，这种说法是很恰当的。数学除了提供定理和理论外，还提供了有特色的思维方式，包括建立模式、抽象化、最优化、逻辑分析、推断，以及运用符号等，这是普遍适用并且强有力的思考方式。通过数学思维的训练，能够增强思维能力，提高抽象能力和逻辑推理能力。数学使思维产生活力，并使思维不受偏见、轻信与迷信的影响和干扰。

数学是一种艺术。自古希腊以来的若干世纪里，数学一直是一门艺术，数学工作必须满足审美需求。将数学视为艺术可以从两个方面来说明，一是数学的创作方式与艺术类似；二是数学成果的作用也与艺术类似。英国数学家哈代宣称，“如果数学有什么存在权利的话，那就是只是作为艺术而存在”。如果数学家把外部世界置之脑后，就好比是懂得如何把色彩与形态和谐地结合起来但却没有模特儿的画家，他的创造力很快就会枯竭。数学还是创造性的艺术，因为数学家创造了美好的新概念，他们像艺术家一样地生活，一样地工作，一样地思索。数学是一门通过发展概念和技巧以使人们更为轻快地前进从而避免靠蛮力计算的艺术。丑陋的数学在数学世界中无立足之地。数学完美的结构，以及在证明和得出结论的过程中，运用必不可少的想象和直觉给创造者提供了美学上的享受。对称、简洁，以及精确地适应达到目的的手段有其特有的完美性，这是一门创造性的艺术。

数学是一种创造。集合论创始人康托一语道破，数学的本质在于自由。爱因斯坦确信，数学是人类思想的产物。他认为几何公理丝毫没有任何直觉的或经验的内容，是人的思想的创造。但是，自由必须伴随着责任，即对数学的严肃目的负责。可以说，数学不是任意地被创造的，而是在已经存在着的数学对象的活动中以及从科学和日常生活的需要中产生出来的，数学的自由只能在严格的、必然的限度内发展。非欧几何的创立也表明了这一点。非欧几何的创立，意味着自古希腊以来，以数学为代表的绝对真理观的终结。希腊人试图从几条自明的真理出发和仅仅使用演绎的证明方法来保证数学的真实性被证明是徒劳的。但是，作为一种补偿，数学却又获得了逻辑创造和演绎推理的极大自由。尽管对许多富有思想的数学家来说，数学不是一个真理体系这一事实实在难以接受。

数学是一种文化。数学是一种文化传统，数学活动就其性质来说是社会性的。怀尔德(R. L. Wilder)把数学文化看成一种不断进化的物种。过去数学对人类文明的影响一般来说都是看不见的，数学是暗藏的文化。然而，今天数学从幕后到台前，从间接为社会服务到直接为社会创造价值。在现实生活中，这样的例子比比皆是。其实，数学历来是人类文化的一个重要组成部分，数学代表人类心灵的最高成就之一。数学作为一个充满活力的、繁荣的文化分支，在过去和现在都大大地促进了人类思想的解放。齐民友教

① [法]列维·布留尔：《原始思维》，丁由译，商务印书馆，2007年，第202页。

授有一个非常著名的论断：“一种没有相当发达的数学的文化是注定要衰落的，一个不掌握数学作为一种文化的民族也是注定要衰落的。”“没有现代的数学就不会有现代文化，没有现代数学的文化是注定要衰落的。”^①事实上，数学的发展已经表明，数学不仅是一种文化，而且是各种文化当中最为高雅、最为重要的文化之一^②。

第二节 人为什么要学数学

人为什么要学数学？其实很多人并不清楚，甚至存在许多认识误区。有学生认为，“数学除了买东西的时候有点用，考试的时候有点用，没有多大的实际用途”。还有学生认为，“学数学是为了高考，没有高考就没有人会学这些没有用的东西”。其实，数学是一个意义的领域。

一、数学意义——科学的立场

（一）时代的特征

数学一直是形成人类文化的主要力量，通过数学这面镜子可以了解一个时代的特征。例如，由于古希腊数学家强调严密的推理，他们关心的并不是这些成果的实用性，而是教育人们去进行抽象的推理，激发人们对理想和美的追求。所以，古希腊创造了后世很难超越的优美文学，理性化的哲学以及理想化的建筑与雕刻。中国古代数学崇尚实用，但最大的缺点是缺少严格求证的思想。这也就不难理解为什么古代中国缺乏理性思维了，不难解释“李约瑟难题”——近代自然科学为何不发生在中国？其实，问题的症结在数学。因为，“数学和各种科学假说的数学化已经成为近代科学的脊梁骨”^③。一个时代的特征与这个时代的数学活动密切相关。17世纪以来，由于微积分的创立，借助微积分工具在寻求自然规律方面所取得的成功远远超出了天文学的领域。19世纪，由于把微积分这个工具改进为严格的分析体系，使数学物理强有力的理论成为可能，这些理论最终导致了量子力学、相对论的诞生，使人们对物质和空间的基本性质有更深入的了解。20世纪50年代，数学的发展创造了计算机，数学从科学的幕后走向台前，数字化深入到了人类几乎所有的活动，人类历史进入了一个崭新的信息时代。

（二）美妙的乐章

数学是一座险峻的高山，其险峻背后隐藏着美丽的风景。数学能像音乐一样，给人以巨大的心灵震撼。罗素在自传中这样写道：“我11岁时，我开始学习欧几里得几何学，哥哥做我的老师，这是我生活中的一件大事，就像初恋一样令人陶醉。我从来没有想象到世界上还有如此美妙的东西。”^④众所周知，高斯把数学置于科学之巅，希尔伯特

① 齐民友：《数学与文化》，湖南教育出版社，1990年，第12～13页。

② 胡典顺：《数学究竟是什么》，《数学教育学报》，2011年第1期。

③ [英]李约瑟：《中国科学技术史》（第三卷数学），科学出版社，1978年，第1页。

④ [英]罗素：《罗素自传》（第一卷），胡作玄、赵慧琪译，商务印书馆，2002年，第32页。