经济管理类数学基础

线性代数学习辅导

付小芹 殷先军 主编

清华大学出版社

经济管理类数学基础

线性代数学习辅导

付小芹 殷先军 主编

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是殷先军、付小芹主编的经济管理类数学基础系列教材《线性代数》的配套辅导书.

为帮助读者系统地学习和掌握线性代数的主要内容和基本方法，本书针对教材中每章内容，均编配5部分内容，即基本要求、内容提要、例题选讲、习题解答、自测题. 在教材例题和习题的基础上，特别精选了典型例题和自测题，以帮助读者归纳总结基本题型，掌握常用的解题方法和技巧.

本书不仅是教材的配套辅导书，也可用作高等学校在校生或夜大、函授学员的辅导书，以及任课教师的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习辅导/付小芹，殷先军主编. --北京：清华大学出版社，2014
(经济管理类数学基础)
ISBN 978-7-302-35425-3

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①付… ②殷… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 023133 号

责任编辑：陈 明
封面设计：常雪影
责任校对：王淑云
责任印制：宋 林

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编：100084
社 总 机：010-62770175 邮 购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京国马印刷厂
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×230mm 印 张：11.25 字 数：240 千字
版 次：2014 年 3 月第 1 版 印 次：2014 年 3 月第 1 次印刷
印 数：1～3000
定 价：19.00 元

产品编号：052110-01

丛书序

随着我国经济与管理学科的迅速发展，数学作为经济与管理学科的重要基础课受到越来越广泛的关注和重视. 数学课的教学目的在于培养学生的抽象思维能力、逻辑思维能力、科学的定量分析能力等基本数学素质，特别是培养学生在研究经济理论和经济管理的实践中综合运用数学思想方法去分析问题和解决问题的能力. 数学课的教学质量，直接影响后续专业课的教学和相关专业学生的培养质量.

经济管理类数学基础系列课程主要有微积分、线性代数、概率论与数理统计三门课程. 长期以来，中央财经大学应用数学学院一直非常重视这些基础课程的建设与改革. 学院曾于1998年组织骨干教师编写出版了这三门课程的教材. 该教材被评为中央财经大学重点系列教材，自出版发行以来，深受广大教师及学生的好评，还在一定程度上满足了兄弟院校教学的需要.

近年来，随着我校教育教学改革的不断深入，我们进一步对数学课的教学内容、教学手段等方面进行了一系列改革，力求使之更加适应新形势下财经应用型创新人才培养的要求. 依据新的培养目标和培养方案，参考2009年教育部最新颁布的研究生入学数学考试大纲，我们重新修订了这三门课的教学大纲，组织教学小组积极探索提高公共数学课教学质量的途径、方法和有效手段. 经过几年的努力，我们在课程建设方面取得了一定的成绩. 目前，三门经济管理类数学课程均已成为校级精品课，其中微积分于2008年被评为北京市精品课程.

2010年5月，教育部为贯彻落实《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》，扎实有序地推进教育改革，决定在全国范围分区域、有步骤地开展改革试点工作. 中央财经大学的“财经应用型创新人才培养模式改革”成为首批国家教育体制改革试点项目. 基于此，我们在课程建设中进一步突出了学生创新意识和创新能力的培养，成立教学改革课题组，开展“数学课程与教材一体化建设的研究”.

在上述工作的基础上，我们编写了这套“经济管理类数学基础”系列教材，包括《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》，以及配套的习题课教材和电子教案. 教材内容涵盖了教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会最新制定的“经济管理类本科数学基础教学基本要求”，并且满足经济类、管理类各专业对数学越来越高的要求. 在我们原有教材的基础上，该系列教材凝聚了作者近年来在大学数学教学改革方面的一些新成果，借鉴了近几年国内外一批优秀教材的有益经验. 教材在内容上注重基本概念、基本理论和基本技

能的讲解，突出理论联系实际，努力体现实用性．根据经济管理类专业学生的实际情况，尽量以直观的、通俗的方法重点阐述数学方法的思想、应用背景及其在金融、保险、统计等领域应用中应该注意的问题．选择与当今社会经济生活和现代科技密切相关的实例，避免那种远离实际而只讲数学的抽象定义、定理、证明的模式，尽量突出数学建模的思想和方法．通过加强对经济学、管理学具体问题的数学表述和数学理论问题的经济学含义解释，使得数学的能力培养功能与应用功能有机结合，培养学生在经济学中的数学思维方式和数学应用能力，实现经济、管理类数学基础教育的“培养素质、提高能力特别是专业素质”的目标．我们希望系列教材与精品课程互为依托，进一步促进课程与专业建设水平全面提高．

在本系列教材的编写和出版过程中，得到中央财经大学教务处、应用数学学院以及清华大学出版社的大力支持，在此一并致谢．

尽管作者都有良好的愿望和多年的教学经验，但由于受经验和水平的限制，加之时间仓促，书中难免存在作者未发现的错漏，恳请使用本书的读者不吝指正，以便进一步完善．

编　者

2012年5月

前言

本书是殷先军、付小芹主编的经济管理类数学基础系列教材《线性代数》的配套辅导书.

线性代数的特点是：概念多、符号多、运算法则多；内容纵横交错，前后联系紧密，相互渗透；抽象性和逻辑性较强. 这些都给学生的学习带来一定困难. 本书旨在帮助学生理解和掌握线性代数课程的基本内容和方法，同时也考虑到学生考研的需要，希望能为广大学生提供一本合适的辅导书.

全书以教材内容为主线，围绕教材中基本概念、理论和方法，精心选取例题和自测题. 每章编配的内容具有以下特点：

一、基本要求——明确了学生对本章知识的掌握范围和程度，同时也为任课教师提供了授课重点.

二、内容提要——对教材中重要的知识点进行了归纳总结，便于学生掌握教材的主要内容. 同时对教材中的重点、难点和容易混淆的概念进行了注解.

三、例题选讲——按知识点归纳为若干重要题型，总结常用的方法与技巧. 精选的例题或者是澄清基本概念、基本运算，或者是指出学生学习时常犯的错误，或者介绍常用思路，或者给出一题多解. 通过这些例题希望能帮助学生开阔思路，活跃思维，举一反三，触类旁通. 该部分针对教材内容进行了适度拓展，是教材内容的有益补充.

四、习题解答——对教材中全部习题给出了详细解答或提示，以帮助学生解决在学习时遇到的困难，同时也为独立使用本书的学生提供了内容丰富的习题集.

五、自测题——根据每章的基本要求和重点、难点，精选了适量的习题，并附有参考答案，以对学生的学习效果进行检验和评估.

本书第 1、2、6 章和第 5 章部分内容由付小芹副教授编写，第 3、4 章和第 5 章剩余内容由殷先军教授编写.

由于编者水平有限，书中错误和不妥之处在所难免，恳请广大读者和同行批评指正.

编　者

2013 年 12 月

目录

第1章

行列式

基本要求

1. 了解行列式的概念,会用对角线法则计算二阶和三阶行列式.

2. 了解行列式的性质,熟练掌握用行列式的性质计算行列式.

3. 了解余子式和代数余子式的概念,掌握用行列式按行(列)展开定理计算行列式.

4. 了解克莱姆法则,会用克莱姆(Cramer)法则求解 n 元线性方程组.

内容提要

一、行列式的概念

1. 排列与逆序数

(1) n 级排列　由 $1,2,\cdots,n$ 组成的 n 个不同数字的全排列,称为一个 n 级排列,记作 $j_1j_2\cdots j_n$.

(2) 逆序　在一个 n 级排列中,如果有较大数排在较小数的前面,则称这两个数构成一个逆序;一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中逆序的总数,称为这个排列的逆序数,记作 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$. 如果排列的逆序数是奇数称为奇排列,是偶数则称为偶排列.

(3) 对换　在一个排列 $j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n$ 中,互换两个数 j_s 和 j_t 的位置,其余数位置不变,称为一次对换. 一次对换改变排列的奇偶性.

n 级排列共有 $n!$ 个,其中奇排列与偶排列各占一半.

2. n 阶行列式的定义

(1) 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(2) 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

(3) n 阶行列式由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 n 行、n 列的数表

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 它表示 $n!$ 项的代数和,每一项都是取自行列式中不同行不同列的 n 个元素的乘积,各项的符号是:当这一项中各元素的行标构成自然排列时,若列标构成的排列为偶排列则取正号,若列标构成的排列为奇排列则取负号. 所以 n 阶行列式中的一般项可写成

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是一个 n 级排列,当 $j_1j_2\cdots j_n$ 取遍所有的 n 级排列时,则得到 n 阶行列式所表示的代数和中的所有项. 因此 n 阶行列式

$$D = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列求和.

n 阶行列式的一般项还可写成

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \text{ 或 } (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 及 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 n 级排列.

二、行列式的性质

性质 1 行列式转置,其值不变,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

性质 2 互换行列式的某两行(列)的位置,行列式的值变号.

推论 1 若行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于零.

性质 3 行列式中某一行(列)的公因子,可以提到行列式符号的前面.

推论 2 行列式的某一行(列)中所有元素都乘以数 k 等于用数 k 乘以此行列式.

推论 3 若行列式的某一行(列)中所有元素全为零,则此行列式等于零.

推论 4 若行列式的某两行(列)的对应元素成比例,则此行列式等于零.

性质 4 若行列式的某一行(列)中所有元素都是两个元素的和,则此行列式等于两个行列式的和. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 5 将行列式的某一行(列)所有元素乘以数 k 加到另一行(列)的对应元素上,行列式的值不变.

三、行列式按行(列)展开定理

1. 有关概念

(1) 代数余子式 在 n 阶行列式 D_n 中,划掉元素 a_{ij} 所在的行与列中的所有元素,余下的元素按原来的顺序构成的 $n-1$ 阶行列式,称为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij};称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式,记作 A_{ij}.

(2) k 阶子式 在一个 n 阶行列式 D 中任取 k 行 k 列 $(1\leqslant k\leqslant n)$,由这些行和列交叉点处的元素按原来顺序构成的 k 阶行列式 M,称为行列式 D 的一个 k 阶子式.在 D 中划掉这 k 行 k 列后余下的元素按原来顺序构成的 $n-k$ 阶行列式 M',称为 k 阶子式 M 的余子式.若行列式 D 的 k 阶子式 M 在 D 中所在的行、列下标分别为 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 及 $j_1,j_2,\cdots,j_n$,则称 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_n)+(j_1+j_2+\cdots+j_n)}M'$ 为 k 阶子式 M 的代数余子式.记为 A.

2. 行列式按行(列)展开

定理 1 n 阶行列式 D 等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和.

推论 n 阶行列式 D 的任意一行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零.

综合定理及推论,得

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=\begin{cases} D, & i=s \\ 0, & i\neq s \end{cases}$$

或

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=\begin{cases} D, & j=t \\ 0, & j\neq t \end{cases}$$

***3. 行列式按 k 行(列)展开(拉普拉斯(Laplace)展开)**

在 n 阶行列式 D 中,若任意取定 k 行 $(1\leqslant k\leqslant n)$,则由这 k 行元素组成的所有 k 阶子式与其对应的代数余子式乘积之和等于行列式 D.即

$$D=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_tA_t,\quad t=\mathrm{C}_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

四、克莱姆法则

定理 2 若 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$，则该方程组有唯一解

$$x_j=\frac{D_j}{D},\ j=1,2,\cdots,n$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式 D 的第 j 列各元素换为该方程组右端常数项，其余元素不变而得到的行列式.

对于上述 n 元线性方程组，当系数行列式 $D=0$ 时，该方程组可能有解也可能无解，此时不能用克莱姆法则.

对于 n 元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

一定有解，因为 $x_1=0,x_2=0,\cdots,x_n=0$ 就是一个解，此解称为零解.

推论 n 元齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是其系数行列式 $D=0$.

五、重要结论

1. 上(下)三角形行列式的值等于主对角线上所有元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

2. 关于次对角线的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

3. 可利用行列式的性质或拉普拉斯展开定理证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} & c_{m1} & \cdots & c_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mm} \end{vmatrix}$$

4. 范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} (x_i - x_j)$$

例题选讲

一、行列式的概念

1. 计算逆序数

思路1　按排列的次序分别算出每个数后面比它小的数的个数，然后求和；

思路2　按排列的次序分别算出每个数前面比它大的数的个数，然后求和.

例1.1　求下列排列的逆序数.

(1) 347812596；(2) $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$.

解　(1) 用思路1，得$\tau(347812596)=2+2+4+4+0+0+0+1+0=13$.

用思路2，得$\tau(347812596)=0+0+0+0+4+4+2+0+3=13$.

(2) 该排列中前n个数之间不构成逆序，后n个数之间也不构成逆序，只是前n个数与后n个数之间才构成逆序，用思路1，易得

$$\tau(13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)) = 0+1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

2. 利用行列式定义的计算题

例 1.2 在 7 阶行列式中，$a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7j}a_{22}a_{31}$ 取“－”号，确定下标 i 与 j 的值.

解 方法 1 由于 $a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7j}a_{22}a_{31}=a_{1i}a_{22}a_{31}a_{47}a_{55}a_{63}a_{7j}$，而 $i21753j$ 是一个 7 级排列，故 i,j 只能取 4，6.

若 $i=4,j=6$ 时，则 $\tau(4217536)=8$ 为偶排列，与已知不符，故 $i=6,j=4$.

方法 2 因为行排列的逆序数为 $\tau(4615723)=11$，所以列排列的逆序数 $\tau(73i5j21)$ 应为偶数.

而若 $i=4,j=6$，则 $\tau(7345621)=15$ 为奇数，与已知不符，故 $i=6,j=4$.

例 1.3 计算行列式 $\begin{vmatrix} 4x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 的展开式中 x^4 与 x^3 的系数.

解 根据行列式定义，只有 4 个元素 $a_{11},a_{22},a_{33},a_{44}$ 相乘才能得出 x^4 项，故 x^4 的系数为 4；含 x^3 的项只有 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=(-1)^{\tau(2134)}x\cdot 1\cdot x\cdot x$，故 x^3 的系数为－1.

例 1.4 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

分析 一般行列式无法用行列式定义计算. 但这里的行列式有较多的零元素，一般项中会有很多项为零，我们只需求得乘积不为零的项，所以可以考虑用定义计算.

解 根据行列式定义，D 的一般项 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，只有当 $j_1=n-1,j_2=n-2,\cdots,j_{n-1}=1,j_n=n$ 时，才不为 0，故

$$D=(-1)^{\tau((n-1)(n-2)\cdots 21n)}a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{nn}=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$$

二、行列式的计算

对于二阶和三阶行列式，可以用对角线法则计算. 但对于高阶行列式，一般需要根据所求行列式的特点去寻找计算方法. 行列式的计算方法很多，主要有：

1. 直接根据行列式定义计算，这时需要行列式中含有足够多的零元素，使不为零的一般项只有很少几项，否则计算过程会较为繁琐.

2. 利用行列式性质将行列式化为三角形或某些特殊形式来计算，这是最常用的方法.

3. 降阶法——利用按行(列)展开定理，化行列式为较低阶行列式计算.

4. 递推法——利用行列式性质，把一个 n 阶行列式表示为具有相同结构的较低阶行列式的线性关系式，再根据此关系式递推得所求 n 阶行列式.

5. 利用数学归纳法计算或证明行列式.

以上方法中，前三种方法是基本方法，应重点掌握.

例 1.5 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -7 & 6 \end{vmatrix}$$

解 本题为数字行列式，没有明显特点，一般用行列式性质化为三角形行列式计算.

$$D\xlongequal[r_4-4r_1]{\substack{r_2+3r_1\\r_3-2r_1}}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 7 & -15 & -3 \\ 0 & -4 & 9 & 0 \\ 0 & -7 & 13 & 2 \end{vmatrix}\xlongequal[r_2+2r_3]{r_4+r_2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-4r_2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}\xlongequal[r_4+2r_3]{r_3\div(-3)}-3\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{vmatrix}=-27$$

本题也可用行列式性质结合展开定理计算.

例 1.6 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x-\lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & x-\lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda & \lambda & \cdots & x-\lambda \end{vmatrix}$$

分析 本题特点是每一行(或列)各元素之和相等，均为 $x+(n-2)\lambda$. 常用办法是将后面各列(或行)都加到第 1 列(或行)，使第 1 列(或行)有公因子可以提到行列式符号外面. 这样为下一步利用性质 5 提供方便.

解 将第 $2,3,\cdots,n$ 列加到第 1 列后，第 1 列各元素均为 $x+(n-2)\lambda$；再将第 1 列的公因子提出，第 1 列各元素均变为 1；最后将第 1 行乘以 (-1) 加到其他各行上去，则行列式变成上三角形，即

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-2)\lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ x+(n-2)\lambda & x-\lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-2)\lambda & \lambda & \cdots & x-\lambda \end{vmatrix}=[x+(n-2)\lambda]\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \cdots & \lambda \\ 1 & x-\lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda & \cdots & x-\lambda \end{vmatrix}$$

$$
=[x+(n-2)\lambda]\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \cdots & \lambda \\ 0 & x-2\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-2\lambda \end{vmatrix}=[x+(n-2)\lambda](x-2\lambda)^{n-1}
$$

例 1.7 计算行列式

$$
D=\begin{vmatrix} a_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ b_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix},\quad a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n
$$

分析 本题特点是第 1 行、第 1 列及主对角线元素以外，其余元素全为零. 这类行列式通常可化为三角形行列式计算.

解 分别将第 $i+1$ 列乘以 $\left(-\dfrac{b_i}{a_i}\right)(i=1,2,\cdots,n)$ 都加到第 1 列，得

$$
D=\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{b_ic_i}{a_i} & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i}\right)
$$

例 1.8 证明

$$
\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n
$$

分析 本题左端行列式（记为 D_n）中有较多的零，且规律性很强，容易找出 D_n 与 D_{n-1} 的关系式，故可用递推法.

证 方法 1 递推法. 将左端行列式按第 1 列展开，得

$$
D_n=xD_{n-1}+a_n
$$

递推得

$$
D_{n-1}=xD_{n-2}+a_{n-1}, xD_{n-1}=x^2D_{n-2}+xa_{n-1}
$$

$$
D_{n-2}=xD_{n-3}+a_{n-2}, x^2D_{n-2}=x^3D_{n-3}+x^2a_{n-2}
$$

……

$$D_2 = \begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^2 + a_1 x + a_2, x^{n-2} D_2 = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2}$$

综合以上各式，得 $D_n = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$.

方法 2　数学归纳法. 当 $n=2$ 时，$D_2 = x^2 + a_1 x + a_2$，结论成立；

假设 $n-1$ 阶行列式，结论成立，即 $D_{n-1} = x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-2} x + a_{n-1}$；

现证 n 阶行列式，结论也成立. 将左端 n 阶行列式按第 1 列展开，并利用假设条件，得

$$\begin{aligned} D_n &= xD_{n-1} + a_n = x(x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-2} x + a_{n-1}) + a_n \\ &= x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \end{aligned}$$

故原结论成立.

注　(1) 本题中使用递推法时，为了不破坏行列式原有的结构规律，应当按第 1 列展开.

(2) 本题也可用行列式性质结合展开定理计算.

例 1.9　计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解　方法 1　递推并利用对称性. 依次将第 $i+1$ 行乘以 (-1) 加到第 i 行上 $(i=1, 2, \cdots, n-1)$，则有

$$D_n = \begin{vmatrix} x+a & a-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x+a & a-x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x+a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & x+a & a-x \\ -a & -a & -a & & -a & x \end{vmatrix} \text{（按第 1 列展开）}$$

$$= (x+a) D_{n-1} + (-a)(-1)^{n+1}(a-x)^{n-1} = (x+a) D_{n-1} - a(x-a)^{n-1}$$

再利用行列式关于主对角线的对称性，有

$$D_n = (x-a) D_{n-1} + a(x+a)^{n-1}$$

联立上面两式，得 $D_n = \frac{1}{2}[(x+a)^n + (x-a)^n]$.

方法 2　拆项法. 将原行列式的第 1 列拆开，得