张广计　郭智莲◎主　编　　褚万霞　吴静杰　齐　琼◎副主编

经济数学
——微积分
（上册）

清华大学出版社

经济数学
——微积分(上册)

张广计　郭智莲　主编
褚万霞　吴静杰　齐　琼　副主编

清华大学出版社

内 容 简 介

本书由从事经济、管理类专业数学教学的教师，根据自己多年的教学实践以及文科学生的思维特点编写而成，在继承众多优秀教材的基础上，又有新的探索。

全套书分为上册和下册。本书为上册，内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分和定积分。书后附有习题答案和书中数学家简介。

在不失数学严密性和系统性的前提下，本书尽量采用通俗易懂的语言和形象直观的思维方式进行编写，全书思路清晰，例题丰富，说理透彻，由浅入深，使学生易学易懂。为了扩大适用面，在保证教学基本要求的前提下，对学生能力训练的难度和高度都具有伸缩性，在例题和习题的选编上，既有充分的基础性训练，又有难度相当于考研数学的综合能力训练。本书可供高等院校经济、管理等文科专业的学生使用。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学——微积分(上册)/张广计，郭智莲主编．—北京：清华大学出版社，2013

ISBN 978-7-302-33798-0

Ⅰ．①经…　Ⅱ．①张…　②郭…　Ⅲ．①经济数学－高等学校－教材　②微积分－高等学校－教材
Ⅳ．①F224.0　②O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 211302 号

责任编辑：汪　莉
封面设计：刘　超
版式设计：文森时代
责任校对：赵丽杰
责任印制：宋　林

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
　　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市李旗庄少明印装厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　　**印　　张**：12.5　　**字　　数**：218 千字
版　　次：2013 年 8 月第 1 版　　**印　　次**：2013 年 8 月第1 次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：25.00 元

产品编号：055467-01

前　　言

本书参照教育部“经济类与管理类专业面向21世纪教学内容和课程体系改革课题”的精神，按照教育部颁布的财经类专业核心课程“经济数学基础”教学大纲，以及近年《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》有关微积分部分的规定编写而成，适合作为高等院校经济、管理等文科类本科及专科专业的《微积分》教材使用，也可作为硕士研究生入学考试的复习参考书。

目前，国内适用于文科专业微积分教材的编写尚在探索之中，编写一本较高质量的文科版微积分教材，是众多从事文科专业数学教学者的期盼。本书的编者都是长期从事经济、管理等文科专业数学教学的一线教师，他们在教学中试用过多种教材，发现各有所长，也各存其短，于是就萌生了编写一本更适合专业特点、更符合文科思维特点的教材的想法。经过反复磋商和积极准备，本书终于呈现在读者面前。本书有以下几个特点：

一、汲取和借鉴了众多优秀教材的长处，又结合教学实际和文科学生的思维特点，在不失数学系统性和科学性的前提下，尽可能采用通俗易懂的语言和形象直观的思维方式编写而成，化难为易，化繁为简，但“简”和“易”并不是降低高度和浅化深度。

二、在重视学生基本概念的掌握和基本技能训练的同时，更注重学生综合运用知识能力的培养，所以在例题和习题的选编上下了较大的工夫，既有基础性训练，又有相当于数学考研题难度的综合性训练，还配有适量的专业方面的应用题，旨在启迪思维，开阔视野，提高学生的数学素质和灵活运用知识解决实际问题的能力。

三、编者都曾担任过《概率与数理统计》这门课的教学任务，他们充分考虑到微积分在该课程中的应用，所以对广义积分等内容作了较为全面和充分的介绍，这是非数学专业教材普遍存在不足的地方。

四、为了便于自学，内容编写由浅入深，思路清晰，例题丰富，力求说理透彻易懂，使学生易于掌握。

书中的习题分为A、B两组，A组偏重基础训练，B组为单项选择或拓展思维训练，书

后附有习题答案。

本套书分为上册和下册。上册的第一章、第六章由张广计编写,第二章由郭智莲编写,第三章由齐琼编写,第四章和书中数学家简介由吴静杰编写,第五章由褚万霞编写。张广计、郭智莲担任主编,褚万霞、吴静杰、齐琼担任副主编。

本书的编写得到学院领导的大力支持,也融入了李进武、徐靓、王海燕、司小霞等老师的辛勤汗水和殷切期望,在此表示衷心感谢!

本书虽经细琢,但难免有疏漏和不妥之处,恳请读者批评指正。

编者

2013 年 6 月于西北政法大学

目　　录

第一章　函　数

第一节　区间与邻域

一、区间

设 a,b 为实数，$a<b$.

称集合 $\{x|a<x<b\}$ 为以 a,b 为端点的**开区间**，记作 (a,b).

称集合 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 为以 a,b 为端点的**闭区间**，记作 $[a,b]$.

而把集合 $\{x|a<x\leqslant b\}$ 与 $\{x|a\leqslant x<b\}$ 都称为以 a,b 为端点的**半开区间**，分别记作 $(a,b]$，$[a,b)$.

以上区间都为**有限区间**，区间长度为 $b-a$.

还有几种**无限区间**：

$(a,+\infty)=\{x|x>a\}$

$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$

$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$

$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$

$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$（全体实数的集合）

二、邻域

集合 $\{x||x-x_0|<\delta,\delta>0\}$ 在数轴上可以这样得到：以点 x_0 为圆心、δ 为半径画圆，在 x 轴上截得的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 就是该集合，如图 1-1 所示.

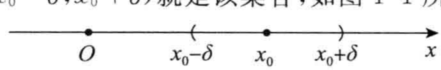

图 1-1

称该集合为以点 x_0 为中心、δ 为半径的**邻域**，或简称点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$. 例如，集合$\{x \mid |2x+1|<4\}=\left\{x \,\middle|\, \left|x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|<2\right\}=U\left(-\frac{1}{2},2\right)$，即点$-\frac{1}{2}$的 2 邻域.

如果只强调邻域的中心而忽略半径，则可把邻域称为点 x_0 的某一邻域，简记为$U(x_0)$.

有时需要把邻域的中心点去掉，即变成$\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$，称该集合为点 x_0 的去心(或空心)的 δ 邻域，记作 $U^0(x_0,\delta)$. 例如，$\{x \mid 0<|x-2|<3\}=U^0(2,3)=(-1,2)\cup(2,5)$.

通常把区间$(x_0-\delta,x_0)$和$(x_0,x_0+\delta)$分别称为点 x_0 的**左邻域**和**右邻域**.

第二节　函数概念

在某一问题中，若存在两个变量，相互依赖并遵循着一定的变化规律，则称这两个变量具有函数关系.

定义　设 x,y 是两个变量，D 是一个给定的非空实数集. 如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有一个确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$. 其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数的**定义域**，可记作 $D(f)$.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的取值称为函数 $f(x)$在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$或 $y(x_0)$，$y|_{x=x_0}$. 当 x 取遍 D 的各个数值时，对应的函数值的全体

$$\{y \mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数的**值域**，记作 $Z(f)$或 Z. 例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $D=[-1,1]$，值域为 $Z=[0,1]$.

函数的定义域通常这样确定：当函数是一个纯粹的数学表达式时，它的定义域就是自变量所能取的使表达式有意义的一切实数值. 例如，函数 $y=\frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}$的定义域是开区间$(0,1)$.

如果是为了解决某一实际问题而建立的函数，则函数的定义域依实际情况而定. 如球体的体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$，$r\in(0,+\infty)$.

由函数的定义可知，自变量在定义域内任取一值时，对应的函数值总是只有一个，这种函数也称为**单值函数**. 但在实际问题中，也会遇到**多值函数**的情形. 例如，由单位圆的方程 $x^2+y^2=1$ 确定的 y 和 x 之间的函数关系就是多值函数，如 $x=0$ 时，$y=\pm 1$.

以后如果没有特别说明，函数都默认为是单值函数.

对于函数 $y=f(x)$ 的每对值 (x,y)，在平面直角坐标系上确定一个点. 当 x 取遍定义域 D 上的每一个值时，就得到点 (x,y) 的一个集合

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

这个点集 C 称为函数 $y=f(x)$ 的**图形**.

例 1-1　以 $[x]$ 记为不超过 x 的最大整数，求函数 $y=[x]$ 在 $x=0,\pm\sqrt{2}$ 时的值，并画出函数的图形.

解　$[0]=0,[\sqrt{2}]=1,[-\sqrt{2}]=-2$.

图形如图 1-2 所示.

例 1-1 中的函数也称为取整函数.

例 1-2　用 $\max\{a,b\}$ 表示 a,b 两个值中最大的一个，如 $\max\{3,\pi\}=\pi$，$\max\{3,3\}=3$. 画出函数 $y=\max\{x,x^2\}$ 的图形，并求其定义域和值域.

解　当 $x\geqslant x^2$ 时，即 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y=x$；当 $x<x^2$ 时，即 $x<0$ 或 $x>1$ 时，$y=x^2$. 即

$$y=\begin{cases}x, & x\in[0,1]\\ x^2, & \text{其他}\end{cases}$$

图形如图 1-3 所示. 其定义域为 $\mathbf{R}$，由图形可直观看出值域为 $[0,+\infty)$.

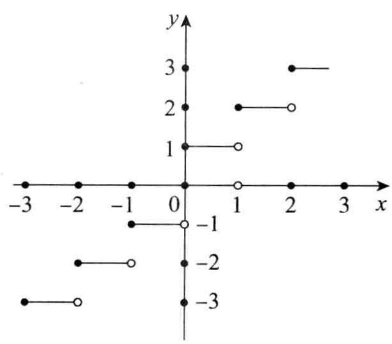

图 1-2

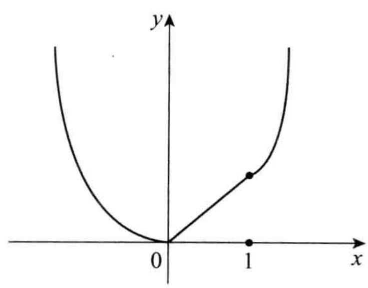

图 1-3

从例 1-2 中看到，有时一个函数要用几个式子表示. 这种在自变量的不同取值范围

内,对应法则用不同式子来表示的函数,通常称为**分段函数**. 如 $y=|x|$,$y=|x+1|+|x-1|$,$y=\min\{x,x^2\}$(取最小值函数)均为分段函数.

函数的对应关系可以用不同的方式来表达,如函数 $y=x^2$,$y=\sin\dfrac{1}{x}$,$A=\pi r^2$ 等都是因变量用自变量的一个数学表达式直接表示出来的,这些函数称为**显函数**. 而有些函数,其对应规则是用一个方程 $F(x,y)=0$ 来间接表示的,如 $x^2+y^2=r^2$,$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$,$y=\tan(x+y)$等,这些函数称为**隐函数**.

有的隐函数可以化成显函数(隐函数的显化),但有的隐函数显化比较困难,甚至是不可能的. 在实际问题中,许多复杂的函数关系都是隐式关系(隐函数),可以用专门的方法来研究隐函数的性质.

第三节　函数的几个简单性质

一、函数的奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$,则必有 $-x\in D$). 如果对于任意 $x\in D$,

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$为**偶函数**. 如果对于任意 $x\in D$,

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

例 1-3　已知某一函数既是偶函数又是奇函数,求该函数.

解　设该函数为 $f(x)$,$x\in D$. 则由定义可知,对任意 $x\in D$,恒有 $f(-x)=f(x)$,$f(-x)=-f(x)$. 即恒有 $f(x)=-f(x)$,$2f(x)=0$,$f(x)=0$. 所以该函数恒为零.

例 1-4　判断 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x-1, & x>0\end{cases}$ 的奇偶性.

解 $f(-x)=\begin{cases}-x+1, & -x<0\\ 0, & -x=0\\ -x-1, & -x>0\end{cases}$

$=\begin{cases}-(x-1), & x>0\\ 0, & x=0\\ -(x+1), & x<0\end{cases}$

$=\begin{cases}-(x+1), & x<0\\ 0, & x=0\\ -(x-1), & x>0\end{cases}$

$=-f(x)$.

所以 $f(x)$为奇函数.

也有既非奇也非偶的函数.例如,$y=x^3+1$,$y=\ln[(2-x)(1+x)]$等.

二、函数的周期性

设函数 $f(x)$的定义域为 D,如果存在一个非零的数 T,使得对于任意 $x\in D$ 有 $x\pm T\in D$.且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$为**周期函数**,T 称为 $f(x)$的周期.

而通常说周期函数的周期是指最小正周期.

例如,函数 $\sin x$,$\cos x$ 的周期为 2π;$\tan x$ 的周期为 π.

设函数的周期为 $T(T>0)$,则这个函数在定义域内任意两个长度均为 T 的相邻区间上都具有相同的图形.

三、函数的单调性

设函数 $f(x)$在某一区间 I 上有定义.如果对于区间 I 上任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$在区间 I 上**单调增加**或**单调递增**;

当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$在区间 I 上**单调减少**或**单调递减**.

若 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$在区间 I 上**单调不减**;

若 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$在区间 I 上**单调不增**.

单调增加函数的图形沿 x 轴正向逐渐上升(见图 1-4),单调减少函数的图形沿 x 轴

正向逐渐下降(见图 1-5).

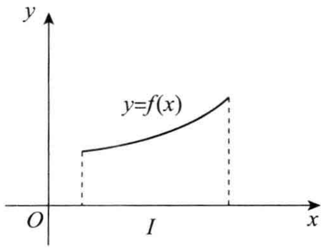

图 1-4

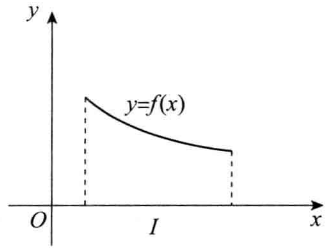

图 1-5

例 1-5 设 $f(x)$分别在区间$(a,c]$,$[c,b)$上单调增加(减少). 证明:$f(x)$在区间(a,b)内也单调增加(减少).

证 先证明单调增加的情形.

设 $x_1,x_2\in(a,b)$,$x_1<x_2$.

当 $x_1\in(a,c]$,$x_2\in[c,b)$时,有 $f(x_1)\leqslant f(c)\leqslant f(x_2)$,且等号不能同时成立,所以 $f(x_1)<f(x_2)$.

当 $x_1,x_2\in(a,c]$或 $x_1,x_2\in[c,b)$时,显然有 $f(x_1)<f(x_2)$. 得证.

对于单调减少的情形,同理可证.

例 1-6 设 $f(x)$在$(-a,a)(a>0)$内为奇函数,$f(x)$在$[0,a)$上单调增加(减少). 证明:$f(x)$在$(-a,a)$内也单调增加(减少).

证 先证明单调增加的情形.

设 $x_1<x_2\leqslant 0$,则$-x_1>-x_2\geqslant 0$,从而 $f(-x_1)>f(-x_2)$,$-f(-x_1)<-f(-x_2)$.

而 $f(x_1)=-f(-x_1)$,$f(x_2)=-f(-x_2)$. 所以 $f(x_1)<f(x_2)$,即 $f(x)$在$(-a,0]$上单调增加. 由例 1-5 可知,$f(x)$在区间$(-a,a)$内也单调增加.

对于单调减少的情形,同理可证.

四、函数的有界性

设非空数集 D 是函数 $f(x)$的定义域或定义域的一个子集. 如果存在常数 K_1,使得

$$f(x)\leqslant K_1$$

对任意 $x\in D$ 恒成立,则称 $f(x)$在 D 上**有上界**,而 K_1 称为 $f(x)$在 D 上的一个上界值. 如果存在常数 K_2,使得

$$f(x) \geqslant K_2$$

对任意 $x \in D$ 恒成立，则称 $f(x)$ 在 D 上**有下界**，而 K_2 称为 $f(x)$ 在 D 上的一个下界值. 如果存在正常数 M，使得

$$|f(x)| \leqslant M$$

对任意 $x \in D$ 恒成立，则称 $f(x)$ 在 D 上**有界**. 如果这样的 M 不存在，就称 $f(x)$ 在 D 上**无界**. 也即对于任何正数 M，总存在一个值 $x_1 \in D$，使 $|f(x_1)| > M$，那么 $f(x)$ 在 D 上无界.

容易得出结论：函数 $f(x)$ 在 D 上有界的充要条件是 $f(x)$ 在 D 上既有上界又有下界.

例如，$y = x^2$ 在 $\mathbf{R}$ 上有下界，0 是它的一个下界（显然任何一个负数也是它的下界，这说明界值不唯一），但它没有上界，所以 $y = x^2$ 在 $\mathbf{R}$ 上无界.

显然，当 $f(x)$ 在 D 上存在最大值（或最小值）时，$f(x)$ 在 D 上有上界（或下界）；反之不成立.

例如，$y = \mathrm{e}^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上有下界，但没有最小值；$y = \arctan x$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界，但没有最大值和最小值.

例 1-7 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在数集 D 上均有界，证明：$f(x) \pm g(x)$ 在 D 上也有界.

证 由已知可知，存在正常数 M_1，M_2，使得对于任意 $x \in D$，恒有

$$|f(x)| \leqslant M_1, \ |g(x)| \leqslant M_2$$

而 $|f(x) \pm g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant M_1 + M_2$. 故得证.

例 1-8 证明函数 $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ 是有界函数.

证 因为 $1 + x^2 \geqslant 2|x|$，所以 $\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$. 得证.

第四节 反 函 数

在函数 $y = f(x)$ 中，由 x 的值来确定 y 的值，或由 x 的变化来研究 y 的变化规律. 但有时需要反过来，由 y 的值来确定 x 的值（如已知 $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$，求 α），或由 y 的变化来研究 x 的变化规律，这就是反函数概念.

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，值域为 $\mathbf{Z}$. 如果对每一个 $y \in \mathbf{Z}$ 有一个确定且满足 $y = f(x)$ 的 $x \in D$ 与之对应，则在 $\mathbf{Z}$ 上建立了一个新的函数，即 x 关于 y 的一个函数，把这

个函数称为函数 $y=f(x)$的**反函数**,记作 $x=f^{-1}(y)$. 此时,y 是自变量,x 是因变量.

习惯上用 x 表示自变量,y 表示因变量,因此把 $x=f^{-1}(y)$改写为 $y=f^{-1}(x)$.

显然 $y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$互为反函数. $f^{-1}(x)$的定义域是 $f(x)$的值域,$f^{-1}(x)$的值域是 $f(x)$的定义域,它们的图形关于直线 $y=x$ 对称.

由反函数的定义可推得:函数 $y=f(x)$在某一数集 $X(X\subset D(f))$上存在反函数的充要条件是 x 与 y 之间的对应关系 f 是一一对应的.

所谓 f 是一一对应的是指:若 $x_1\neq x_2$,$x_1,x_2\in X$,则有 $f(x_1)\neq f(x_2)$.

因为单调函数在其单调区间上的对应关系是一一对应的,所以一般选择在单调区间上建立反函数.

例如,三角函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\tan x$,$y=\cot x$ 分别在其单调区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,$[0,\pi]$,$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,$(0,\pi)$上建立了各自的反函数:

$$y=\arcsin x, x\in[-1,1], y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right];$$

$$y=\arccos x, x\in[-1,1], y\in[0,\pi];$$

$$y=\arctan x, x\in\mathbf{R}, y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right);$$

$$y=\operatorname{arccot} x, x\in\mathbf{R}, y\in(0,\pi).$$

例 1-9 设函数 $f(x)$在区间 I 上单调,证明其反函数也单调,且单调性相同(即同增同减).

证 先证明单调增加的情形.

设 $f(x)$的值域为 $\mathbf{Z}$,则 $\mathbf{Z}$ 为反函数 $x=f^{-1}(y)$的定义域. 设 $y_1,y_2\in\mathbf{Z}$,$y_1\neq y_2$,$x_1=f^{-1}(y_1)$,$x_2=f^{-1}(y_2)$. 显然,$x_1,x_2\in I$,$x_1\neq x_2$,$y_1=f(x_1)$,$y_2=f(x_2)$.

因为 $f(x)$单调增加,所以

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0,\text{即}\frac{y_2-y_1}{f^{-1}(y_2)-f^{-1}(y_1)}>0$$

所以 $x=f^{-1}(y)$单调增加,得证.

对于单调减少的情形,同理可证.

从例 1-9 可看到,反函数的讨论如果与原来的函数密切相关,则不需调换反函数的两个变量,即写成 $x=f^{-1}(y)$,这样更容易讨论.

例 1-10　求 $y=\begin{cases} x^2, & x\geqslant 0 \\ \arctan x, & x<0 \end{cases}$ 的反函数.

解　因为函数是单调的,所以存在反函数.

当 $x\in[0,+\infty)$时,y 的值域为$[0,+\infty)$;当 $x\in(-\infty,0)$时,y 的值域为$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,所以反函数为

$$x=\begin{cases} \sqrt{y}, & y\geqslant 0 \\ \tan y, & -\frac{\pi}{2}<y<0 \end{cases}.$$

再将其改写成习惯形式

$$y=\begin{cases} \sqrt{x}, & x\geqslant 0 \\ \tan x, & -\frac{\pi}{2}<x<0 \end{cases}.$$

第五节　复合函数

把函数 $y=\sin\frac{1}{x}$拆分成这样的形式:$y=\sin u, u=\frac{1}{x}$,这时称函数 $y=\sin\frac{1}{x}$是由函数 $y=\sin u$ 和 $u=\frac{1}{x}$复合而成的复合函数.

一般地,设函数 $y=f(u)$的定义域为 D,函数 $u=\varphi(x)$的值域为 $\mathbf{Z}$,若 $D\cap\mathbf{Z}$ 非空,则称 $y=f[\varphi(x)]$为**复合函数**.其中 x 为自变量,y 为因变量,u 称为中间变量.

当然,不是任何两个函数都能复合成一个复合函数.例如,$y=\arcsin u$ 与 $u=x+\frac{1}{x}$就不能复合成一个复合函数.因为$\left|x+\frac{1}{x}\right|\geqslant 2$,$u$ 的取值范围不能使 $y=\arcsin u$ 有意义.

复合函数也可以由两个以上函数复合而成.例如,$y=\ln u, u=\sin v, v=2x$ 可复合成函数 $y=\ln\sin 2x$,其中 u,v 为中间变量.

复合函数可以拆分成几个简单函数,然后通过简单函数来研究复合函数的某些性质.

例 1-11　求函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x(2-x)}}$的最大值和最小值.

解 函数的定义域为[0,2].把函数拆分为 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^u$,$u=\sqrt{v}$,$v=x(2-x)$,$x\in[0,2]$.由函数 $v=x(2-x)$的图形(见图 1-6)可直观地得到 v 的取值范围为[0,1].因 $u=\sqrt{v}$ 单调增加,所以可推得 u 的取值范围为[0,1].再由 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^u$ 的单调性(单调减少),可推出 $\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1$.

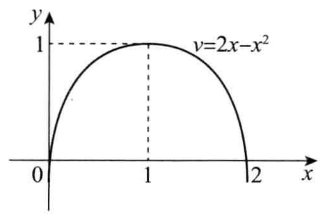

图 1-6

所以当 $x=0$ 或 2 时,y 取最大值 1;当 $x=1$ 时,y 取最小值 $\frac{1}{2}$.

例 1-12 已知函数 $f(u)$的定义域为$(-1,1)$,求复合函数 $f(e^x-2e^{-x})$的定义域.

解 复合函数的定义域可由不等式 $-1<e^x-2e^{-x}<1$ 解出.该不等式可化为

$$\begin{cases} e^{2x}-e^x-2<0 \\ e^{2x}+e^x-2>0 \end{cases},即\begin{cases} (e^x-2)(e^x+1)<0 \\ (e^x-1)(e^x+2)>0 \end{cases}.$$

解得 $\begin{cases} -1<e^x<2 \\ e^x>1 \text{ 或 } e^x<-2 \end{cases}$,即 $1<e^x<2$,$0<x<\ln 2$.

所以该复合函数的定义域为$(0,\ln 2)$.

第六节 初等函数

下列函数称为**基本初等函数**.

常函数(常数)$y=c$

幂函数 $y=x^\alpha$(α 可为任意实数)

指数函数 $y=a^x$($a>0,a\neq 1$)