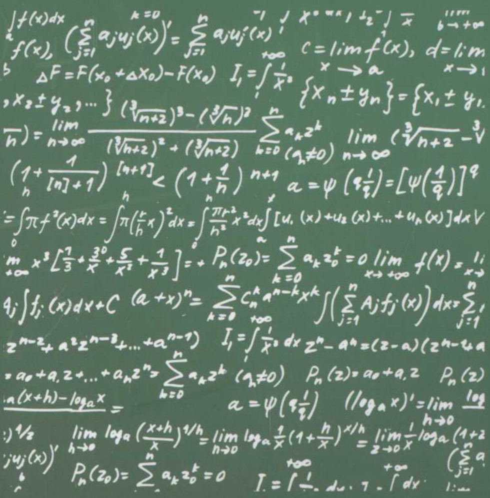
高等数学同步辅导

（下册）

马志宏　穆志民　主编



南開大學出版社

高等数学同步辅导

（下册）

马志宏　穆志民　主编

南开大学出版社
天　津

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步辅导. 下册 / 马志宏,穆志民主编. —天津:南开大学出版社,2013.7

ISBN 978-7-310-04192-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①马…②穆… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 109349 号

南开大学出版社出版发行

出版人:孙克强

地址:天津市南开区卫津路 94 号 邮政编码:300071

营销部电话:(022)23508339 23500755

营销部传真:(022)23508542 邮购部电话:(022)23502200

*

河北昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司印刷

全国各地新华书店经销

*

2013 年 7 月第 1 版 2013 年 7 月第 1 次印刷

210×148 毫米 32 开本 9.75 印张 281 千字

定价:19.00 元

如遇图书印装质量问题,请与本社营销部联系调换,电话:(022)23507125

内容简介

本书是深入学习高等数学的辅导书，分上、下两册，下册共六章，包括多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程与差分方程、微积分在经济中的应用. 各章每一节开始都有重要概念、定理及公式，概括本节的知识内容，然后是答疑解惑、典型题型及解题分析、考研真题解析，每章最后给出自测题，供读者练习.

本书对学习高等数学的同学是一本很好的同步辅导教材，同时也可作为报考研究生的理想复习资料及高等数学任课教师的教学参考书.

前　言

高等数学是理工科、农科、经济管理等专业最主要的基础理论课之一，掌握好高等数学的基本知识、基本理论、基本运算和分析方法，不仅对同学们学好后继课程是必要的，而且对同学们今后的提高和发展都有深远的影响.

本书是通过对每一节疑难问题的解答、典型题型的分析、考研真题的解析等方式提供辅导的，内容按节编写，每节结构如下：

重要概念、定理及公式　对本节必须掌握的概念、性质、定理和公式进行了归纳，供计算、证明时查阅.

答疑解惑　剖析教与学中的难点问题.内容及方法涉及基本概念、基本理论的深入理解、解题思路的启发诱导、解题方法中常见错误的剖析等.

典型题型及解题分析　对本节的典型题型进行分类解析，并对每种题型的解题思路（步骤）、技巧进行了归纳总结.

考研真题解析　精选与本节内容有关的考研真题，试题涵盖了最新至 2013 年的各类典型题型，并作了详尽解答，供考研的学生使用.

自测题　每章最后配置了适量难易程度适中的练习题及参考答案，供读者自测对本章内容掌握的程度.

本书在编写过程中注重数学思维与数学方法的论述，以求思想观点、方法上的融会贯通，并对每种题型的解题思路（步骤）、技巧进行了归纳总结，有些题给出了多种解法，对容易出错的地方还作了详尽的注解，并以“注”的形式加以强调，这是本书的特色.

本书是编者在深入研究教学大纲和研究生数学考试大纲之后撰写而成的，它不仅是广大学生学习数学的指导书、教师教学的参考书，而且也是报考硕士研究生的一本广度与深度较为合适的复习用书，适合理工、农林、经济类学生使用.

本书分上、下两册出版，上册内容包括函数的极限与连续、导数与

微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数;下册内容包括多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程与差分方程,最后一章介绍了微积分在经济中的应用。上册第一章由孙丽洁编写,第二章由刘琦编写,第三、四、五章由赵翠萍编写,第六、七章由徐利艳编写,上册由赵翠萍统稿;下册第八、九、十一、十三章由马志宏编写,第十、十二章由穆志民编写,下册由马志宏统稿。上、下册各章都经过反复讨论、修改后定稿。

编写本书时,参阅了许多书籍,引用了许多经典的例子和解题思路,恕不一一指明出处,在此一并向有关作者致谢.

限于编者水平,书中难免存在错误和不妥之处,欢迎广大读者提出批评和指正.

编　者

2013 年 1 月于天津农学院

目　录

第八章　多元函数微分法及其应用

第一节　多元函数的基本概念

重要概念、定理及公式

一、定义

1. 平面点集

$$E=\{(x,y)\,|\,(x,y)\text{具有性质 }P\}.$$

2. 邻域

点 P_0 的 δ 邻域，记作 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\{P\,|\,|PP_0|<\delta\}$$
$$=\{(x,y)\,|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

点 P_0 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(P_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P\,|\,0<|PP_0|<\delta\}.$$

二、点和点集之间的关系

设任意点 P 与任意一点集 E，则

(1)内点：$\exists U(P)$，使得 $U(P)\subset E$.

(2)外点：$\exists U(P)$，使得 $U(P)\cap E=\varnothing$.

(3)边界点：$\forall U(P)$，$\exists x_1,x_2\in U(P)$，$x_1\in E$，$x_2\notin E$.

(4)聚点：$\forall \mathring{U}(P)$，$\exists x\in \mathring{U}(P)$，$x\in E$.

三、几种重要的平面点集

(1)开集：点集 E 的点都是 E 的内点.

(2)闭集：点集 E 的余集 E^C 为开集.

(3)连通集：点集 E 内任何两点，都可用折线连结起来，且该折线

上的点都属于 E.

(4)区域(或开区域):连通的开集.

(5)闭区域:开区域连同它的边界.

(6)有界集:$\exists r>0$,使得 $E\subset U(O,r)$,其中 O 是坐标原点,则称 E 为有界集.

(7)无界集:不是有界集的集合.

四、n 维空间

$$\begin{aligned}R^n&=R\times R\times\cdots\times R\\&=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in R,i=1,2,\cdots,n\}.\end{aligned}$$

在 R^n 中定义线性运算:

$\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in R^n,\lambda\in\mathbf{R}$,则

$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$,

$\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n)$.

定义了线性运算的集合 R^n 称为 n 维空间.

$\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}=||x-y||$,

$\rho(x,0)=||x||=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$.

五、二元函数的相关内容

1.二元函数的定义

设 D 是 R^2 的一个非空子集,称映射 $f:D\to R$ 为定义在 D 上的二元函数,记为

$$z=f(x,y),(x,y)\in D,$$

其中 D 称为定义域,x,y 称为自变量,z 称为因变量,值域 $f(D)=\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$.

2.二元函数的极限

设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D,$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点.如果存在常数 A,对于任意给定的正数 ε,总存在正数 δ,使得当 $P(x,y)\in D\cap\mathring{U}(P_0,\delta)$ 时,都有

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立,那么就称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限,

记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A.$$

3.二元函数的连续性

设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D,$P_0(x_0,y_0)$为 D 的聚点,且 $P_0\in D$,如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$连续.

4.二元函数的间断点

设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D,$P_0(x_0,y_0)$为 D 的聚点,如果函数 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$不连续,则称 $P_0(x_0,y_0)$为函数 $f(x,y)$的间断点.

5.有界性与最大值、最小值定理

在有界闭区域 D 上的多元连续函数必定在 D 上有界,且能取得它的最大值和最小值.

6.介值定理

在有界闭区域 D 上的多元连续函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值.

答疑解惑

【问 1.1】一元函数与二元函数的关系是什么?

【答】二者的联系是本质相同,都是自变量与因变量的一种映射关系.

不同的是一元函数的自变量取自非空的实数子集,而二元函数的自变量取自非空的平面子集,即$(x,y)\in D\subset R^2$.

【问 1.2】如何证明二元函数的极限不存在?

【答】极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 成立是指自变量 $P(x,y)$以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$时,$f(x,y)$都是无限接近于 A.因此,如果当 $P(x,y)$以不同方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$时,$f(x,y)$趋于不同的值,就可以断定这个极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$不存在.

典型题型及解题分析

一、求二元函数的定义域

【例 1】求下列各函数的定义域.

(1)$z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$;　　(2)$z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

分析:二元函数的定义域指使函数表达式有意义的自变量(x,y)的值所组成的平面点集.

【解】(1)$D=\{(x,y)\mid x+y>0,x-y>0\}$,如图 8-1 的阴影部分所示.

(2)$D=\{(x,y)\mid y-x>0,x\geqslant0,1-x^2-y^2>0\}$

$=\{(x,y)\mid y-x>0,x\geqslant0,x^2+y^2<1\}$.

如图 8-2 所示阴影部分.

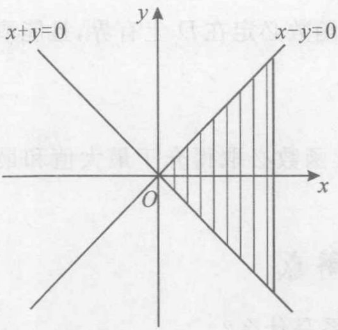


图 8-1

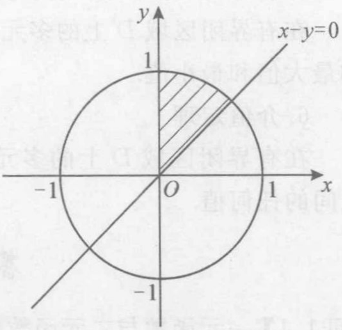


图 8-2

二、求二元函数的极限

【例 2】求下列极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)}\dfrac{\sin(xy)}{x}$　$(a\neq0)$;　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$;　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

分析:一元函数中,极限四则运算法则,两个重要极限、等价无穷小

代换、变量代换等求极限的方法均可以推广到二元函数中.

【解】(1)原式$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot y=a.$

(2)原式$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy+1-1}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(\sqrt{xy+1}+1)=2.$

(3)利用当 $x\to 0$ 时,$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,所以,

$$\text{原式}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{1}{2}.$$

(4)利用变量代换,令 $x=\rho\cos\theta$,$y=\rho\sin\theta$,得

$$\text{原式}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho(\sin\theta-\cos\theta)\rho\cos\theta}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\rho(\sin\theta-\cos\theta)\cos\theta=0.$$

【例 3】设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在.

分析:要证明二重极限不存在,只要令(x,y)按照一个特殊方式趋于(x_0,y_0)时,$f(x,y)$不趋于常数,或令(x,y)按照两个不同的特殊方式趋于(x_0,y_0)时,$f(x,y)$趋于两个不同的常数即可.

【证】当(x,y)沿直线 $y=kx$ 趋于$(0,0)$时,有

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\dfrac{x(kx)^2}{x^2+(kx)^4}=\lim\limits_{x\to 0}=\dfrac{k^2x^3}{x^2+k^4x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx}{1+k^4x^2}=0.$ 但当(x,y)沿曲线 $x=my^2(m\neq 0)$趋于$(0,0)$时,有

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=my^2}}\frac{my^2\cdot y^2}{(my^2)^2+y^4}=\lim_{y\to 0}\frac{my^4}{m^2y^4+y^4}=\lim_{y\to 0}\frac{m}{m^2+1}=\frac{m}{m^2+1},$$

此极限值随 m 的变化而变化,故它不是一个确定的常数.

因此,$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$不存在.

【例 4】(2006 年数学三)设 $f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\dfrac{\pi x}{y}}{\arctan x}$,$x>0$,$y>0$,求

(1)$g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$；

(2)$\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$.

分析：第(1)问求极限时注意将 x 作为常量求解，此问中含$\frac{\infty}{\infty}$，$0\cdot\infty$型未定式极限；第(2)问需利用第(1)问的结果，含$\infty-\infty$未定式极限.

【解】(1)$$g(x)=\lim_{y\to+\infty}f(x,y)=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{1+xy}-\frac{1-y\sin\frac{\pi x}{y}}{\arctan x}\right)$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{y}+x}-\frac{1-\frac{\sin\frac{\pi x}{y}}{\frac{1}{y}}}{\arctan x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}.$$

(2)$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x-x+\pi x^2}{x\arctan x}(\text{通分})$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x-x+\pi x^2}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1+2\pi x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{-x^2+2\pi x(1+x^2)}{1+x^2}}{2x}=\pi.$$

第二节　偏导数

重要概念、定理及公式

1. 偏导数

如果极限$\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$存在，则称此极限值为$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处对 x 的偏导数，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},z_x'(x_0,y_0),f_x'(x_0,y_0).$$

类似定义 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

2. 偏导函数

函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 x 的偏导函数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x},$$

对自变量 y 的偏导函数为

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

3. 偏导数的几何意义

$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 表示曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\y=y_0\end{cases}$ 在点 $M(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率.

同样，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 表示曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\x=x_0\end{cases}$ 在点 $M(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线 M_0T_y 对 y 轴的斜率.

4. 二元函数连续与偏导存在的关系

对于多元函数来说，即使各偏导数都存在，也不能保证函数在该点连续.

5. 高阶偏导数

设 $z=f(x,y)$ 具有偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$，则

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

称为二阶偏导数，其中 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 称为混合偏导数.

同样可得三阶、四阶……直至 n 阶偏导数. 二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数.

6. 定理

如果 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 连续，则有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

答疑解惑

【问 2.1】如何求偏导数?

【答】对于 $z=f(x,y)$,求$\frac{\partial z}{\partial x}$时只要把 y 暂时看作常量而对 x 求导数;求$\frac{\partial z}{\partial y}$时只要把$x$暂时看作常量而对$y$求导数,求高阶偏导方法不变.

典型题型及解题分析

一、求多元函数的一阶偏导数

【例 1】设 $z=f(x,y)=\sqrt{|xy|}$,求 $f_x'(0,0)$,$f_y'(0,0)$.

分析:此函数表达式中含有绝对值,故应按定义求解.

【解】因 $f_x'(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

故 $f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x\cdot 0|}-0}{\Delta x}=0.$

同理有 $f_y'(0,0)=0$.

【例 2】设 $z=x^{y^2}$,求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

分析:二元函数 $z=f(x,y)$求一阶偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$时,把 y 看作常量,按一元函数对 x 求导;求$\frac{\partial z}{\partial y}$时,把 x 看作常量,按一元函数对 y 求导.

【解】$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2x^{y^2-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^{y^2}\ln x\cdot 2y=2yx^{y^2}\ln x$.

【例 3】设 $z=(1+xy)^{1+y}$,求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

分析:求$\frac{\partial z}{\partial x}$,视 y 为常量,利用函数求导公式可得;求$\frac{\partial z}{\partial y}$时,视 x 为

常量,此时 z 属于幂指函数,需先将 z 化成指数复合函数再求导.

【解】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=(1+y)(1+xy)^{y}\cdot y=y(1+y)(1+xy)^{y}$,

$z=(1+xy)^{1+y}=\mathrm{e}^{(1+y)\ln(1+xy)}$;

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{(1+y)\ln(1+xy)}\left[\ln(1+xy)+(1+y)\frac{1}{1+xy}\cdot x\right]$$

$$=(1+xy)^{1+y}\left[\ln(1+xy)+\frac{x(1+y)}{1+xy}\right].$$

【例 4】设 $u=x^{y^z}$,求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

【解】求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 时,视 y^z 为常量,则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^z x^{y^z-1}$.

求 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 时,视 x 和 z 为常量,则 u 为指数复合函数,因此

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^{y^z}\ln x\cdot z\cdot y^{z-1}=x^{y^z}\cdot y^{z-1}\cdot z\cdot \ln x.$$

求 $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ 时,视 x 和 y 为常量,则 u 为指数复合函数,因此

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^{y^z}\ln x\cdot y^z\cdot \ln y=x^{y^z}\cdot y^z\cdot \ln x\cdot \ln y.$$

二、求多元函数的高阶偏导数

【例 5】设 $z=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

分析:求高阶偏导数,应先求一阶偏导,相同的方法继续求偏导.

【解】$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{y^2}}\frac{x^2+y^2-x^2}{x^2+y^2}=\frac{|y|}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}}\frac{-x\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y}{x^2+y^2}$$