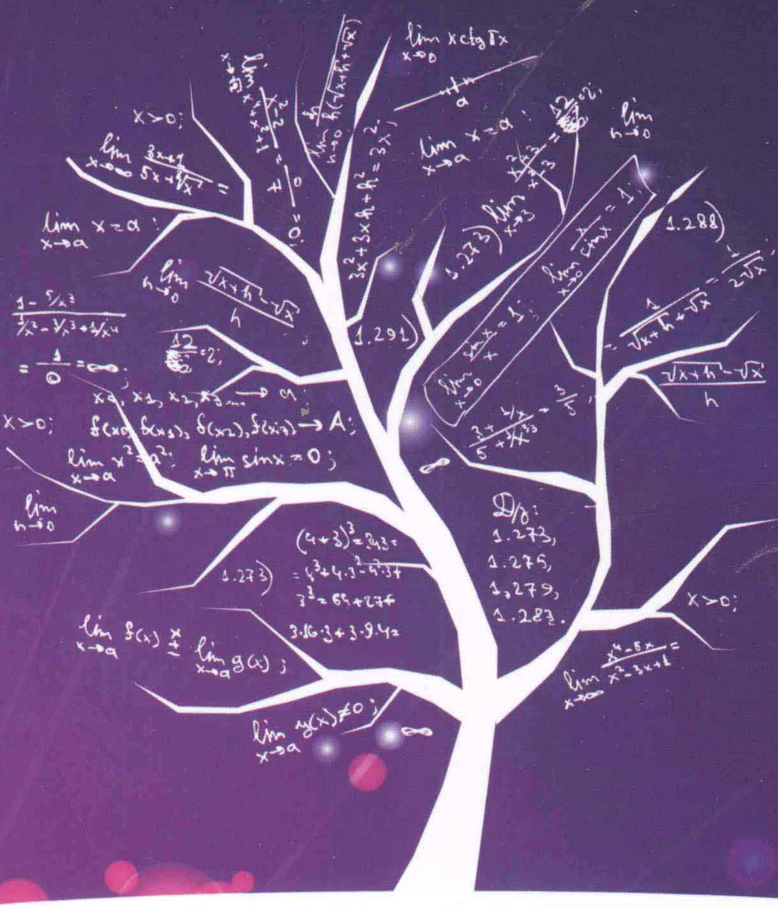
"十二五"国家重点图书出版规划项目

工程技术中的现代数学

宋克欧　姚鸿勋　宋晓阳　编　著



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

“十二五”国家重点图书出版规划项目

工程技术中的现代数学

宋克欧　姚鸿勋　宋晓阳　编著

哈爾濱工業大學出版社

内 容 简 介

本书是作者在工科本科生和研究生教学基础上，经过多年教学实践和反复修改写成的。高技术本质上是一种数学技术，集合(空间)和映射触及了数学本质，本书以此为主线展开讨论，分为6章。第1章绪论。第2章实数集合及其映射，论述了实数集合的数学结构及可测函数的勒贝格积分。第3章 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 及映射，论述了 $\mathbf{R}^n$ 的数学结构及各种情况下的映射，以及它在工程技术中的重要作用。第4章和第5章分别为抽象空间和抽象空间映射，介绍了各类可积函数空间和可和数列空间，论述了有界线性算子和有界线性泛函的基本内容，并详细分析了实际应用中最常用的傅里叶算子、卷积算子、相关算子和小波变换。第6章概率基础及随机向量，简明而系统地讨论了随机变量、随机向量和正规方程，可作为本书思维方法的一个具体应用。

本书以类比、说明和形象解释为主，结合工程技术基础知识乃至社会生活常识进行论述，旨在深化理解数学定义、模型背后的物理意义和逻辑本质，使现代数学基本知识更通俗易懂，深入浅出，便于工科专业高年级本科生、研究生以及青年科技工作者阅读、理解和运用。

图书在版编目(CIP)数据

工程技术中的现代数学/宋克欧等编著.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2014.1

ISBN 978-7-5603-4528-4

Ⅰ.①工… Ⅱ.①宋… Ⅲ.①工程数学-研究 Ⅳ.①TB11

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第300151号

策划编辑 王桂芝
责任编辑 王桂芝 何波玲
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张14.5 字数329千字
版 次 2014年1月第1版 2014年1月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-4528-4
定 价 32.00元

前　言

数学教育，特别是理工科各专业数学教育的重要性是不言而喻的，它占据学校教育的时间最长。更重要的是，科技工作者要终生和数学打交道，现在大家正逐渐认识到“被如此称颂的高技术本质上是一种数学技术”。就科学家和科技工作者最需要的科学修养而言，“第一是数学，第二是数学，第三还是数学”。

数学学习对绝大多数人来说是困难的，甚至是艰苦的磨炼。这是因为，人习惯于通过感性去认识和处理事物，这种天然适应的进化本能，直接是生存使然。然而，数学是人类的心智活动，它远离大自然赋予的生存本能，数学是通过抽象思维和推理后天获得的足以令人自豪的能力。所以，困难是自然的，几乎人人如此。整个数学大厦完全是通过思维活动建立起来的。既然我们是人，就不必气馁，我们完全有能力掌握自己需要的那一部分数学，只要有顽强的毅力、浓厚的兴趣和恰当的方法。

现代科学技术的突飞猛进与现代数学的发展是相伴而行的。十分抽象而陌生的现代数学理论、方法和概念在各学科专业中频频出现，并获得了有效的应用；颇具哲学风采的现代数学思想、观点、精神和方法正从深层次上成为创新的原动力；现代数学不但是解决各类实际问题的工具和手段，更重要的是认识问题、描述问题、理解问题、创造性甚至是革命性地解决问题的思维方式和习惯。人们常常以兴奋、敬畏、还多少有些无奈的心态认识到这一点。

中小学，直到大学本科，非数学专业数学教育的内容基本上属于经典数学的范畴。由于内容多、时间少，学生思维能力成长、工作经验和生活阅历的积累需要一个过程，这使他们难于接受现代数学。即使研究生阶段加强了现代数学教育，也因为种种原因，特别是学生长期养成的善于探究应试技巧和局部细节、不善于理解概念和宏观把握所学数学内容的全局的思维习惯，致使教学效果不佳，产生迷茫畏惧的心态和边学边忘的现象。许多学生、青年教师和青年科技工作者抱怨无法读懂现代科技书籍、论文和资料，工作和学习效率低下，需要较长时间才能对所从事的专业入门。这种状态甚至使他们的身心受到损害。

上述数学教育以至工程技术教育的困难和窘境，无论是国内还是国外，无论是名牌院校还是普通院校，一律存在，只不过程度不同而已。要求改革数学教育的愿望强烈，呼声很高；有关改革的研究和实践已有多年，积累了很多经验和教训；相关的优秀教材和研究报告也已很多。由于理工科数学教育改革是整个数学教育改革的一部分，可算是一项复杂的系统工程，不能一蹴而就，所以局面并未明显改观。本书的目的是想参与这项艰难工作，力求作出一些贡献。

本书面向理工科非数学专业高年级本科生、研究生和青年科技工作者，只要有学习现代数学的愿望，曾经认真地学习过工科专业的基础数学(尽管成绩不佳)，就能读懂本书，当然有些地方不能一读就懂，整本书也不能像读小说和故事那样成为一种娱乐和休闲。数学知识是不能以毫无痛苦的娱乐方式理解和传授的。

本书放弃了公理、定义、引理、定理、证明推导和演绎的写作模式，采用了语言叙述和公式说明的讲授式方式，重在诠释数学世界中的概念、运算的本质、道理和意义。用直观形象的定性说明和类比方法替代严谨推理和完备证明，这不是数学理论的坍塌，而是数学发展最富想象力和创造思维的中间过程，是以生动感性理解为基奠，进而驾驭成熟理性数学王国的必要阶段。因此，面对非数学专业科技工作者的数学偏重于方法和应用，所学所用往往是早已成熟的数学，本书摈弃了公理、定义、定理、证明推导方式的一般数学书的传统介绍方式，侧重面向科技人员的思维习惯，以归纳类比和直感思维为主，阐释所需的基础数学。

本书语言直白浅显，尽量把抽象的数学名词和概念与科技工作者通用的基础和常识结合起来，以语言叙述方式加以说明、解释和比喻。全书少有逻辑推导，有些似乎是推导的地方实际上是表达方式的罗列。但是，本书不回避也无法回避公式，因为公式是数学表达的语言和通用方式，比自然语言的表达简洁、严谨而优美。一个简洁而优美的公式往往在默默地讲述一个普通而深刻的道理。公式是我们不可分离的好朋友。

本书内容尽量精炼、通用、贴近实际，讲解尽量深刻、形象，用基础知识甚至常识加以比喻。现代数学体系庞大，难于涉猎，本书只是一本入门教材和读物，选择的内容仅限于科技领域中应用最广的抽象向量空间及其映射。具体是：实数 $\mathbf{R}$ 及其映射，n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 及其映射，函数空间、数列空间及其映射。这些内容是科学技术领域的通用基础，掌握它们会使基础数学、专业数学、专业基础和专业技术原理融会贯通起来，可在工作和学习中化解许多困难，取得立竿见影的效果，并为进一步学习现代数学打下必备的基础，架起通向现代数学的桥梁，可使科技工作者构筑起自己的基础知识框架。

本书是通过近十年的研究生教学逐渐形成的，教学效果令人满意，听课人越来越多，以研一硕士为主，也有不少博士研究生和青年教师参加。由于听课的主体是刚刚入学的硕士，他们的学识水平相当于高年级本科生，所以，如果在本科高年级设课，想必对学生的数学修养和专业学习有所帮助。本书尽量使用教学式语言叙述，尽可能借助常识性的直观形象和比喻，揭示问题的实质，很适合自学者阅读，既可作教材，也可作参考书。通过教学实践，学生们反映：学习面向工科的现代数学和泛函分析时感觉顺利得多；复习和回忆过去学过的数学时有了高层次的全局性理解；对自己所学的专业技术基础能够清晰地掌握宏观脉络和技术细节；阅读专业书籍和专业论文比以前顺利得多。学生们真正体会到现代数学贯通数学全局的简明性和紧凑性，以及专业技术理论实质上是数学原理，也体会到基本概念和基本原理比技巧细节更重要。

感谢花栅教授，作为师长和同事，他一直对本书的写作给予热情的关心和鼓励。感谢王科俊教授，正是他的具体帮助和支持，才能以本书作为教材长期设课。感谢黄凤岗教授和李雪耀教授，多年的共事和合作充实了本书的内容。感谢历年选课的学生和青年教师，他们求知的热情和愿望是本书写作的一种动力，他们提出的各种问题和意见强化了本书的针对性，并促成了本书的写作风格。

感谢哈尔滨工业大学计算机学院研究生赵思成、姜小磊、许鹏飞、姜雪松、韩婷婷、王雅思以及张严浩、卢修生、冯新杰、唐迅、郑影、张凌亚、肖哲、于洪洋、谢文龙、高珊、杨致远、李浩然。他们不辞辛劳，在繁忙的学习期间，为本书作了电子排版。

以本书为教材，在哈尔滨工程大学自动化学院和计算机科学技术学院以及哈尔滨工业大学计算机学院，为研究生设课，并多次在大连716所、大庆教育学院及沈阳军区某部授课，使本书获得了充分的教学实践，对在教学过程中给予支持和协助的所有同事深表谢意。

本书作者从事工科专业教学和科研多年，一直怀有这样一个计划：从工程技术角度出发，总结多年的工作经验和体会，写出一本叙述方式与传统不同、与工程技术密切结合的现代数学入门教材，献给工科专业的青年朋友。由于作者并非数学工作者，书虽写成，难免有不妥之处，诚望读者批评指正。

作者

2013年6月

目　　录

第1章　绪　论

工程技术是科学发展、社会生活和生产活动的产物。学习或从事现代科学技术，不仅需要掌握技术方法、技术规范、应用效益等时效性强的技术层面，而且要通晓技术基础和原理，发展潜力和前景等深层知识。只有这样才能与时俱进、紧跟技术发展，进而有所发现、有所创新。也就是，我们不仅需要工程技术的培养和训练，更需要科学教育和哲学教育，而对后者的忽视与缺失，常使前者受到极大限制和影响。这不但妨碍高层次人才的脱颖而出，也使广大科技工作者饱受"知识爆炸""科技腾飞"的困扰。

科学教育，特别是自然科学教育，是素质教育的基础，而数学教育，特别是现代数学教育，是这个基础的核心之一。本章从现代科学体系出发，引申到现代数学，解释了阅读本书必备的基本概念，突显出数学，特别是现代数学在科学技术中的重要地位，从宏观角度展现科技工作者必须涉入的数学世界。

1.1　现代科学体系结构

科学是关于自然、社会和思维的知识体系，是社会实践的总结，并在社会实践中得到检验和发展。在古代，各种科学知识都包罗在同一的哲学中。随着生产的发展，社会的进步，知识不断丰富，各种知识从统一的哲学中分化出来，形成各种独立学科。随着对宇宙各方面研究的不断深入和细化，出现了更多的科学分支，并且在每种学科内容以及各学科之间出现日益增多的边缘科学和综合科学。这种不断深入细化和相互渗透又使各学科紧密联系在一起，实现了高度的整体化和统一化。所谓"隔行如隔山"和"隔行不隔理"，正是对科学发展中这种矛盾统一辩证关系的理解。追求统一的"理"，是科学发展永无止境的目标。宇宙的演化是永无止境的，反映这种演化的科学也就永无止境。科学与宗教不同，科学实事求是，承认自己并不完美，不能天衣无缝地反映和描述宇宙的演化，所以，科学体系是一个不完备的开集。现代科学特别强调和提倡科学思想、科学精神、科学态度和科学方法。因为这不但是社会进步的动力，而且也是人们掌握知识和技能、提高素质、具有竞争力、适应社会飞速发展的必备条件。

在科学发展过程中，数学自始至终起关键作用。科学，特别是自然科学，仅仅利用自然语言，不能精确完整地表达科学内容和理论，只有数学内容和语言，才能精确完整地表达科学内容和理论，才能构建精确完整的科学体系。数学，特别是现代数学，早已渗透和应用于各学科和工程技术，各学科的数学化趋势正在发展。甚至一向较少应用数学的社会科学（如经济学）和生命科学，也越来越依靠数学。作为科学实际应用的工程技术，更离不开数学。现代高技术本质上是一种数学技术，特别是现代数学技术，这早已为科技工作者和工科学生"领教"和体会过了。

钱学森同志1988年把现代科学划分为11大门类：自然科学、社会科学、数学科学、思

维科学、系统科学、人体科学、行为科学、地理科学、军事科学、文艺科学和建筑科学。数学科学被单独提出，与自然科学并列，而不包含其中。数学科学与系统科学具有横断性，被称为横断科学。这是因为它们不仅仅与自然科学，而且与其他学科交织在一起，正在向一切学科与社会部门渗透。

在现代科学体系研究中，钱学森提出了“三层次一桥梁”的科学体系一般框架，如图1.1所示。按照这种模式他又提出了自然科学的体系结构，如图1.2所示。

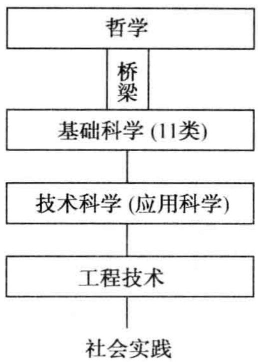


图1.1 科学体系一般结构

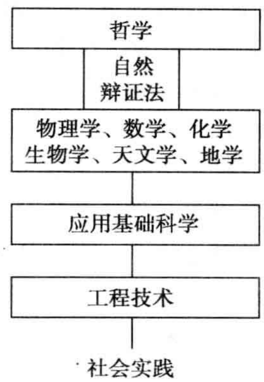


图1.2 自然科学体系结构

自然科学是伴随人类最早也最完整的科学体系。在科学教育中，自然科学教育是提高人们素质的基础教育，是现代教育的核心。毛泽东主席1941年在写给儿子的信中说：“趁着年纪尚轻，多向自然科学学习…… 目前以潜心多学习自然科学为主，社会科学辅之。将来可倒置过来…… 总之注意科学，只有科学是真学问。”在图1.2自然科学体系结构中：

(1) 在与图1.1基础科学相应的层次上包含物理学、数学、化学、生物学、天文学、地学(钱学森1977年的分类)。从严格的学科体系讲，自然科学体系基础科学只有物理学和数学两门，其他基础科学从物质世界本质和研究方法上都可归结为物理学和数学。宇宙演化早期只服从物理学定律和数学法则，太阳中物质的核聚变不属于化学，地球生成后才有地学，有了生命后才有生物学。自然科学体系中的基础科学所反映的自然规律与人类智慧无关，人们只能发现自然规律，不能“发明”自然规律。工程技术工作者所从事的工作一般属于自然科学体系结构中的工程技术层次或应用基础科学层次。

(2) 自然科学体系结构中的应用基础学科层次也称为技术科学层次，它是人们为解决人类社会各种实际问题，依据各门基础科学而产生的各种学问和工程技术中的各专业基础理论，如水力学、电工学、空气动力学、信息学等。对于工程技术人员来讲，只有充分掌握自然科学的基础理论，特别是数学，才能通晓所从事专业的学科本质；只有扎实掌握专业基础科学，才能提出具有创新意义的技术思想，甚至可能开发出新的应用技术学科。

(3) 自然科学体系结构中的工程技术层次是直接面向社会实践和市场的具体技术知识，如水利工程、电气工程、信息技术、自动化技术等。这是广大工程技术人员面向实际发挥聪明才智的广阔天地。特别具有挑战性的是，具体的工程技术知识时效性特别明显，随

着现代科学技术的迅猛发展，以及各学科之间的相互融合和渗透，同一技术的具体内容会与时俱进变得面目全非，所谓知识爆炸就体现在这里，要求科技工作者不断更新知识，充实自己的知识结构。然而，自然科学结构中的基础科学和应用基础科学具有相对稳定性，而且始终是工程技术的基础，特别是数学，它是各种技术原理的灵魂，所谓“现代高技术本质上是一种数学技术”就源于此。只有努力学习和掌握必备的现代数学基础和专业理论基础，才能以不变应万变。一旦做到这点，就会有运用自如、游刃有余的感觉。

(4) 自然科学的基础学科通过自然辩证法这一桥梁与哲学，特别是马克思主义哲学联系起来。哲学对科技工作者的基础工作和社会生活具有宏观的、方向性的、辩证思维的指导作用。

自然科学体系结构自顶向下逐层具有指导作用，任何人，哪怕是文盲、科盲，都或多或少具备各层次的知识。作为高素质的科技工作者，应按照自然科学体系结构形成自己的知识框架和网络，掌握必备的科学基础和实际技术，不断充实和更新自己的知识结构，与时俱进，成为具有极强适应能力的创新型人才。

1.2　自然世界、科学和数学世界及计算机世界

大千世界，宇宙万物，包括人类自身，形成纷繁复杂的模式，它们是独立于人类意识的客观事物，构成了客观的真实世界，即自然系统、社会系统和人工系统。真实世界依时间顺序不可逆转地、由简单到复杂地不断演化，永不停止。真实世界的各种事物相互联系，不能以孤立封闭的方式存在，任何事物都是多种因素的果，同时也是其他事物的因。人们敬畏并赞美真实世界的深奥与优美，永不停歇地探寻宇宙的奥秘，力图揭示大自然纷繁复杂表象背后隐藏着的神秘而简约的本质。

人类通过实践和思维，对真实世界不断产生各种认识，建立了各种科学描述模型和数学描述模型，总结出各种理论，并用这些模型和理论解释真实世界。任何模型(物理模型、数学逻辑模型、数学计算模型和理论模型) 和理论只能在一定精度情况下解释真实世界的某些方面。尽管如此，人类发展至今，已建立起庞大的科学体系，这是人类智慧的结晶，是人类心智的荣耀。这种科学体系在整个人类的头脑中形成了一个科学和数学世界。科学和数学世界是真实世界映射到人脑中的知识体系，是人类认识世界得到的解答和推理。不能指望科学与数学世界是对真实世界的完美映射，任何人类的知识和经验都只能在一定条件下(时间、空间和某些方面) 是正确的。

在科学世界里，存在着如图1.1所示的科学体系结构，此结构的各层次均和真实世界紧密联系。真实世界、科学和数学世界以及下面将叙及的计算机世界之间的关系如图1.3所示。

时至今日，人类积累的数学知识已构成了一个庞大的数学世界，从起始的公理、定义、定理出发，通过严密、抽象而自恰的逻辑推理，数学世界不断发展和扩大。在数学世界里，所有数学理论的演绎几乎完全周旋于抽象概念和它们相互关系的圈子中，与科学世界(主要是自然科学) 不同，理论正确与否不求助于实验，而是依靠逻辑推理和计算。不仅数学理论和概念是抽象的、思辨的，而且数学方法和推理证明也是抽象的、思辨的。在数学世

界中，一切概念的演绎"运行"，在逻辑上必须精确、严密，但任何数学系统都不能做到完备。我们必须习惯于"脱离"真实世界，而仅仅在数学世界中进行抽象的思辨和逻辑推理，必须像能够感受真实世界的具体事物那样，"感受"数学世界里的"实体"，也就是深刻地理解数学概念，感受数学世界本质的深刻和形式的优美。尽管如此，数学生命力的源泉在于它的概念和结论都直接或间接来自真实世界，并广泛应用于真实世界。在一切科学中、在各专业技术中、在全部生活实践中，数学都有广泛应用。所以，我们还要善于从数学世界"走出来"，面向真实世界，与具体的实际理论和应用技术结合起来才有意义，这对科技工作者尤其重要。然而，没有来自科学世界以及真实世界各方面的直接推动，仅从数学世界内部产生的抽象数学体系出发，依靠人类的心智和思辨，也能推动数学世界的发展，这种从数学世界自身产生的纯数学，甚至也会获得极有价值的应用。

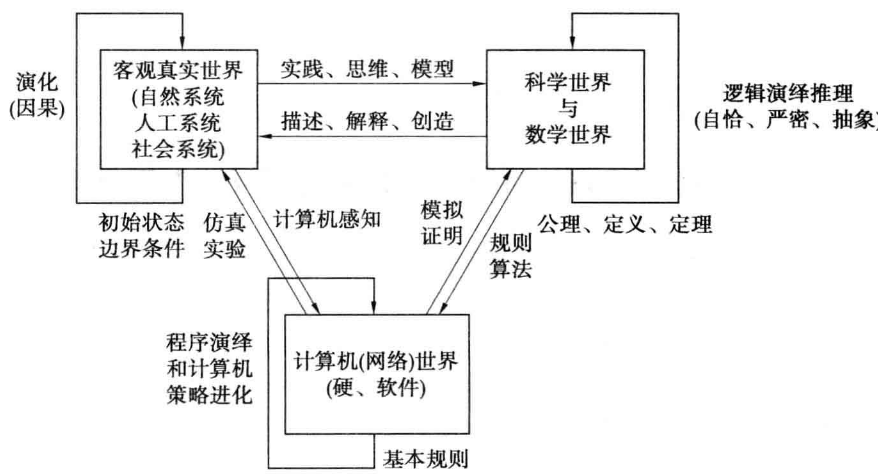


图 1.3　真实世界、科学与数学世界和计算机世界

20 世纪诞生了数字计算机和计算机科学与技术，它的出现和发展被认为是人类科技发展史上的新时代，它已经或正在改变人类社会的面貌，并且，它将改变科学疆界的划分。可以想象，100 年以前的科学家如果有了当代的计算机和计算手段，他们的智慧和成果会怎样影响他们那个时代和我们这个时代的科学技术；也可以想象，如果没有当代的计算机和计算机科学技术，科技工作者会在什么样的理论水平和技术水平上开展研究，社会生活和生产活动会在什么条件下进行，效率会如何低下。有了计算机和计算机科学技术，真实世界通过科学世界和数学世界的描述，再利用计算机科学技术，以算法和规则(程序)的形式，被映射成计算机世界，也称为数字世界、网络世界、硅世界或虚拟世界。计算机不仅仅是一种计算工具，它具有更重要更新奇的功能，它不但是一种计算器，而且是一种处理器和推理器，具有和人类思维相似的智能(尽管是人工的、形式上的、非自然的和有争议的)。虽然计算机还远不能把真实世界映射成对称的虚拟世界，但是，只要能把科学世界和数学世界的内容规则化(程序化)，并编码输入计算机世界，就可以在计算机世界中独立运行和演化，产生自己的系统和实体，俨然与真实世界对应。如计算机宇宙、计算机生物、计算机城市等。

通过上面对三个世界互相关联的展示(图 1.3)，可以看出，我们必须以某种方式使三

个世界和谐起来。对科技工作者而言，基础科学理论(特别是数学)、专业基础理论技术和实际技能是何等重要，这当中最通用、最基础、也最重要的当属数学能力和计算机应用能力。

1.3　初等数学、高等数学和现代数学

从数学发展史上对数学进行划分，可分为初等数学、高等数学和现代数学三个阶段。

从人类开始计数到 17 世纪初为初等数学阶段。初等数学是常量数学，主要研究常量间的代数运算和简单孤立几何形体的对应关系，形成了代数和几何两大类。中小学所学的数学大致对应初等数学。

高等数学阶段从 17 世纪初到 19 世纪末，以解析几何建立为起点，以微积分建立为里程碑，取得了足以令人自我赞叹的成就。高等数学是变量数学，主要研究变量、曲线和曲面之间的各种函数关系。这一阶段数与形已紧密联系起来，曲线和曲面可以用函数和方程表示，以微积分为基础的分析数学开始发展，形成了代数、几何和分析三大领域。高等工程院校所学的数学大致属于高等数学范畴，虽然偏重于方法和应用，但也是科技人员必备的基本数学修养、基础和常识。

现代数学阶段从 19 世纪末开始到现在，以集合论的建立为起点，以公理化体系和结构观点来统观数学，形成了现代数学的显著特征。现代数学主要研究一般的、更为抽象的集合，各种抽象空间和几何流形，并用集合和映射的概念统一起来。现代数学改变了以往(经典)数学中代数、几何和分析各自形成独立体系的状态，把三者研究方法统一起来，作为现代数学基础的泛函分析就充分体现了这一点。由于高等工科院校数学教育性质和内容的限制，以及学生知识积累和认识水平的提高需要一定的反复过程，现代数学教育往往来不及纳入教学。但是，现代数学已渗透到科学技术的各分支和各部门，即使非数学专业的科技工作者，也经常接触现代数学的名词和概念，这就要求他们必须领会现代数学的基本内容、思想、方法和应用，教学双方遇到了极大的困难，这是一个严峻的挑战。

现代数学这一术语已很流行，但其概念和范畴并不统一，不能从时间观念上理解成“现代的数学”就是现代数学，也不能说繁、难的数学就是现代数学，而是指“高深、漂亮、优美、深刻、广博”的数学学科。现代数学具有高度抽象性、统一性、全局性、横断性、简明性、紧凑性、泛函性、非线性、不确定性、复杂性和高维数等特性，这也是现代科学特点在数学世界的体现。

从数学方法上看，现代数学十分注重公理化、形式化方法，以尽可能少的、相容、独立、完备的原始概念和不需证明的公理为基础，用逻辑推理来建立演绎的数学系统。欧式几何是最古老、最典型、最广为接受和应用的公理化数学系统。以欧式几何为特例的非欧几何完全是由公理化方法发展起来的数学分支。一些经典数学也用公理化方法完成了公理化过程。为了把众多的数学分支统一起来，又出现了以结构的观点构建统一的数学大厦的努力，并取得了令人瞩目的成果。总之，现代数学已超越了经典数学的界线，形成了研究对象和研究领域极广的数学体系和分支。

1.4 基本术语

现代数学是一个极为庞大的数学体系,没有人能成为精通各分支的通才,也不可能罗列出适合于每个人的现代数学基本术语。下面是阅读本书前必须了解的一些术语和概念,在以后各章节,除了直接使用这些术语外,仍然有一些重复和说明,用以加深读者的理解。

1. 集合

从现代数学的思想和观点来看,数学发展到今天,终于显现出它的实质,即"集合是现代数学的基础""集合是数学的基本研究对象",读者也可以从本书的内容体会到这点。

对于集合,还没有严格的公理化定义,只有并不统一的描述性定义,但这并不影响集合论和现代数学的发展。一般认为:由有限或无限多个互不相同且具有某种确定性质的元素构成的整体称为集合。各种有共性的数学对象都可以构成集合,例如实数集合、复数集合、各类函数集合、数列集合等。集合论是关于所有集合的普适理论,它把各类数学对象的共性抽象出来,剔除各数学对象的具体特性,用只有抽象定义的符号代表集合元素展开研究,从而使集合论成为对现代数学具有普遍意义的基础。

在集合论的讨论中,对实数集合(数轴)的深入认识具有十分重要的意义和作用。因为集合论触动了数学的本质,使我们可以从宏观整体上把握数学,而集合论的很多基本概念和理论可以在经常接触的、较易理解的实数集合中体现出来(尽管人们对实数的认识还远未达到成熟完善的程度)。所以,为了理解集合论的基本内容,应对实数集合(数轴)有一个基本的了解,并与其他基本的数学对象进行类比,才能"感觉"到现代数学的神韵,才能掌握经常应用的现代数学的基本概念。实数集合理论是集合理论的范例,是现代数学的基础,也是经典数学和一切工程技术的基础。实数集合理论、一般集合理论、现代数学直至现代科学技术,构成了人类的知识大厦,科技工作者必须在这个大厦中构筑必备的知识框架,使自己的认识和技能从自然王国进入必然王国。

2. 抽象空间

"空间"一词也是现代数学中最常用的术语,与集合概念几乎同义,根据场合和习惯经常混用。

直线是一维欧式空间,平面是二维欧式空间,我们生活其中的三维物理空间也是三维数学空间。像直线(数轴)可以认为是一维实数坐标点集一样,二维、三维空间可视为二维、三维实数坐标点的集合。每个坐标点都对应一个发自坐标原点的向量,因此空间中的点和向量一一对应,是等价的,也可以说空间是向量的集合。我们知道,一元函数定义域在直线上,二元函数定义域在平面上,三元函数定义域在三维空间中。对于更高的 n 元函数($n>3$)的自变量,则可以认为是"n 维空间"的坐标点(向量)。这样,n 维空间就成了一种抽象空间,它是一种数学空间,而非物理空间。

n 维欧式空间(记为 $\mathbf{R}^n$,$n \geqslant 1$)中的向量可进行加法运算(向量合成),也可以与数进行乘法运算(向量伸缩),还可以具有其他一些性质,如有零向量、任何向量都有反向量,向

量合成结果仍保持在 n 维空间中(封闭性)。我们知道,n 元函数 $f(x)(x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n)$ 也可以进行加法运算和数乘运算,$f(x)+g(x)$,$af(x)$(a 是实数或者复数)仍然是 n 元函数,而且有零函数,任何函数 $f(x)$ 都有 $-f(x)$ 与之对应使 $f(x)+(-f(x))=0$。于是,可以类推,这些函数集合构成"函数空间",每个函数都是函数空间的"抽象点"或"抽象向量"。同样,许多其他数学对象也可以构成类似的"抽象空间",例如,数列空间、算子空间、泛函空间、矩阵空间、随机变量空间、随机向量空间等。我们需要研究一般的抽象空间的性质,并具体地研究经常应用的各类抽象空间。

空间一词泛指一般集合,它也没有严格的公理化定义。但是具体到某个空间,如线性空间,则要有严格的公理化定义,即为一种特定的集合。之所以在现代数学中常常使用空间一词,是因为通过几何类比,把数学对象复杂的数量关系和处理方法,用形象化的空间形式加以描述,使抽象的、复杂的问题直观化、简明化,但不回避抽象。"空间"一词似应看成"借用",它完全是数学世界中的概念,不是真实存在的空间。

抽象空间种类极多,已形成庞大谱系,本书各章节仅涉及最基本的最常用的抽象空间。它们与工程技术结合紧密,可以使我们形成抽象空间思维习惯,养成良好的数学思想方法,甚至提升我们的哲学素养和世界观。

3. 系统

系统是科技领域里经常使用的术语,在社会生活中也经常出现,已成为一个通俗名词。然而,对系统的研究却形成了系统科学这一现代科学的一大门类(见 1.1 节)。系统科学属于横断科学,即各类科学技术都与系统概念相关。与集合一样,系统也没有严格的公理化定义,只存在描述性定义。钱学森有过一个简明的概括:系统是指依一定秩序相互联系着的一组事物。由此可见,系统概念的数学意义就是集合,但它不限于数学领域,也包括社会、科技各领域的事物。系统论撇开各领域事物的特殊性性质,把研究对象看成系统要素,仅从系统意义上、整体性上进行研究。系统思想的突出特点是强调整体性,强调整体认识和把握,强调事物的互相制约、组织结构和综合功能。中医理论就是极富系统思想的医学理论。

数学是从数量关系和空间形式研究真实世界的学问。现代数学以集合论为基础,从数学对象遵从的原始公理和关系结构出发,对数学对象作系统性和整体性研究。因此,现代数学渗透着鲜明的系统思想。数学方法和系统方法相通,都是广泛适用的横断科学方法。本书介绍的内容就具有上述特点,例如我们提到某类函数,总是进行整体性研究,只有具体应用时才把整体研究的内容具体化。希望读者能从宏观上、整体上体会什么是现代数学,从而受到科学思想、科学精神、科学态度和科学方法的熏陶。

4. 关系结构

任何事物都不能孤立存在,事物之间的联系就构成了关系,这种关系使事物以某种结构组成系统。关系是任何系统的生机和活力,关系具有丰富深刻的科学内涵、数学内涵和哲学内涵。例如,简单的建筑构件以不同的关系结构可以构造出千差万别的建筑;简单的笔画可以不同的结构组成众多汉字。关系结构也是艺术和美学的判据,深刻而简洁的机理一定具有优美的结构形式。如前所述,简单地说,现代数学是一种运用集合理论,以公

理化方法和结构化观点建立起来的逻辑系统。任何系统的关系结构越丰富、越深刻(抽象)、越复杂(非线性),则系统越高级。数学,特别是现代数学显然是高级系统,它所使用的语言和概念如此抽象和陌生,如此远离人们日常生活和本能的直感,以致使人感到无法理解,造成人们在数学世界里思维和运算的困难。然而,现代数学的理性、威力和优美是现代人才必须"感觉"到的。

序关系、运算关系和映射是最基本的关系。各种复杂关系无穷无尽,各种关系会形成各种结构。序结构、拓扑结构、代数结构以及测度结构是现代数学的基本结构,基本结构的各种复合形成复杂、深刻、丰富的数学结构。具有某种关系结构的数学对象集合就是某个特定的抽象数学空间,就是某个特定的数学系统,就是一种现代数学的研究对象。没有关系结构的集合是没有意义的。本书就是以最基本的数学结构和映射关系为主线展开的。

5. 映射

映射是数学中最基本、最普遍的一个概念,它是函数概念的推广。两个非空集合,如果存在某个法则,可使一个集合中的元素变换成另一个集合中的元素,就称这个法则为第一个集合向第二个集合的一个映射。在数学和应用领域中,有时映射也称变换,它们侧重点似有不同,但基本同义,我们不必深究它们的差异。上面对映射的说明也是描述性的,并非严格定义。在真实世界中事物的演化方式,反映在数学世界里,常常成为逻辑演绎和映射。

应该注意,映射是两个事物之间的一种关系,而关系是更宽泛、更难描述的概念,可以代表数学世界中尚难表达的演化。

我们熟悉的函数就是一种映射,映射可视为"广义的函数",函数通常强调表达式或函数式特征(如图形、波形),而且多指实数或复数之间的映射,一般不用于抽象空间(集合)之间。我们在经典数学中熟知了大量的函数,对它们的性质、运算和应用已有相当的研究,这不但是一种基本的数学素养、是进行科技工作的基础,也是学习现代数学必备的基础。

现代数学中常常使用算子这个术语。其实算子就是代表映射的数学符号,它常代表抽象空间之间(也含抽象空间自身)的映射。简单地说,抽象空间是"数学对象 + 数学结构",而算子代表把它变换(映射)成另一种"数学对象 + 数学结构"的过程。读者应该解除对算子的神秘感。实际上算子(Operator,操作器、操作者之意)是一种作用、规则、运算、关系、关联、控制、操作等(算子的英文。映射常用某个符号代表,例如,函数 $f(x)$ 的 f 就是一个算子,表示对自变量 x 做某种变换;$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ 的符号 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 表示对函数做微分运算,是可微函数空间向可积函数空间的一种映射;$\int f(x)\mathrm{d}x$ 中的 $\int\cdot\mathrm{d}x$ 可视为积分算子;而诸如 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\exp[-\mathrm{j}2\pi ux]\mathrm{d}x$ 这样的映射(傅里叶变换),常用一个特定的符号表示(常用 $F,\mathscr{F}$)。

一种特殊的算子称为泛函,它是从抽象空间(如函数空间)向实数空间或复数空间的映射。现代数学具有泛函性,即映射和泛函都可看成"广义的函数""泛函数",是经典函数