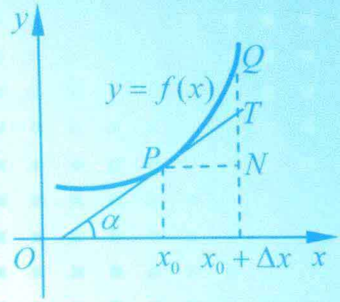
高等学校“十二五”规划教材

微积分

（上册）

主编 王树勋 田 壤



西北工業大學出版社

高等学校“十二五”规划教材

微　积　分

（上　册）

主　编　王树勋　田　壤

副主编　李　哲　高　云　赵春婕

西北工業大學出版社

【内容简介】 本书是根据"经济管理类本科数学基础课程教学基本要求"编写的.本书结构严谨、深度适当、贴近教学实际,便于教与学.全书分为上、下两册,共十章.上册内容包括一元函数的极限与连续、一元函数微分学及其应用、一元函数积分学,下册内容包括微分方程与差分方程、多元函数微分学、二重积分和曲线积分、无穷级数等.每节都配有适当的习题,并附有习题参考答案以及一些常用数学公式和常用的曲线.

本书是一本适合经济管理类各专业的高等数学教材,也可供报考经济学和管理类专业硕士研究生的考生选用或参考.

图书在版编目(CIP)数据

微积分:全2册/王树勋,田壤主编.—西安:西北工业大学出版社,2013.9
ISBN 978-7-5612-3813-4

Ⅰ.①微… Ⅱ.①王… ②田… Ⅲ.①微积分—高等学校—教材 Ⅳ.①O127

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第208079号

出版发行:西北工业大学出版社
通讯地址:西安市友谊西路127号 邮编:710072
电 话:(029)88493844 88491757
网 址:www.nwpup.com
印 刷 者:兴平市博闻印务有限公司
开 本:727 mm×960mm 1/16
印 张:25
字 数:474千字
版 次:2013年9月第1版 2013年9月第1次印刷
定 价:48.30元(上、下册)

前　言

众所周知，数学在自然科学和经济活动中有着不可替代的作用，随着我国科学技术和经济建设的发展与进步，数学的理论和方法越来越广泛地应用到自然科学、社会科学和工程技术的各个领域，因此，高等学校不仅对理工类各专业，而且对经济管理、文史类等各专业人才的数学素养要求也越来越高. 微积分是经济管理和文史类大学生的重要的必修基础课程之一，这门课程的思想和方法是人类文明史上理性智慧的结晶，它不仅提供了解决实际问题的有力数学工具，同时还给大学生提供了一种思维训练，帮助学生提高作为复合型、创造型、应用型人才必需的文化素质和修养.

为适应高等教育面向二十一世纪教学内容和课程体系改革的总目标，培养具有创新能力的高素质人才，我们在对多年微积分的教学内容和教学体系进行长期研究和实践的基础上，结合长期的教学实践和教学体会，在充分研讨的基础上，编写了本书，并力求体现以下特点：

(1)本书渗透了现代数学观点，着力培养和提高学生应用数学解决实际问题的能力，尤其是解决经济问题的能力.

(2)对定理和概念的叙述力求严谨精练易懂，突出通过实际例子引出概念，突出概念定理的几何解释，便于读者理解和掌握.

(3)在符合教学大纲的基础上，对传统内容作了适当的取舍，淡化运算技巧，突出基本概念基本方法的介绍，尽可能多地介绍微积分在经济中的应用.

(4)书中部分章节加有“*”号，教师可根据实际教学时数选讲或供学生自学.

本书内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程与差分方程、多元函数微分学、二重积分与曲线积分、无穷级数等内容，每节都配有适当的习题，并附有一些常用的数学公式、常用的曲线以及习题参考答案或提示.

全书由王树勋、田壤制定编写方针、确定教材体系、安排框架结构和习题搭配. 王树勋编写了第三章和第十章并绘制了全书插图，田壤编写了第五章、第六

章和第七章,李哲编写了第八章和第九章,高云编写了第一章和第二章,赵春婕编写了第四章.全书由王树勋、田壤负责统稿定稿.

本书的出版得到了西北工业大学出版社的大力支持,尤其是蒋民昌策划编辑为本书的出版付出了大量的心血,在此表示衷心的感谢.同时本书的出版也得到了陕西理工学院领导和同志们的大力支持,在此一并表示衷心感谢.

由于水平有限,书中仍可能存在疏漏之处,敬请广大读者批评指正.

编　者

2013 年 7 月

目　　录

（上　册）

第一章　函　　数

客观世界中有许许多多的变量，它们之间不是孤立的，而是相互联系的，函数就是对现实世界中各种变量之间相互关系的一种数学抽象，是现代数学的基本概念之一. 微积分是研究变量的数学，其主要研究对象就是函数，基本方法是极限的方法. 本章将在中学所学知识的基础上进一步阐述函数的概念，然后介绍其简单性态、反函数、复合函数、初等函数、极坐标与参数方程，最后给出在经济学和生物学中的一些简单函数.

第一节　函　　数

一、基本概念

1. 常量与变量

在观察自然现象、研究某些实际问题或从事生产的过程中，总会遇到许多量，如面积、体积、长度、时间、温度、压力等. 这些量一般分为两类，即常量与变量. 如果一个量在某变化过程中始终保持不变，总取一个值，则称这种量为**常量**(constant)，常量通常用字母 $a,b,c,\cdots$ 表示. 如果一个量在某变化过程中是不断变化的，即在该变化过程中可以取不同的数值，则称这种量为**变量**(variable)，变量通常用字母 $x,y,z,t,\cdots$ 表示.

常量与变量都是对某一过程而言的. 例如，重力加速度，在地球近表来说可看做是常量，在大范围来说则是变量. 但常量可看做是变量的特殊情形. 例如掷同一铅球数次，发现铅球的质量、体积为常量，而投掷距离、上抛角度、用力大小均为变量. 常量与变量是相对而言的，同一量在不同场合下，可能是常量，也可能是变量，如在一天或一年中观察某小孩的身高；从小范围和大范围而言，重力加速度可是常量和变量，然而，一旦环境确定了，同一量不能既为常量又为变量，二者必居其一.

2. 区间

区间(interval)是微积分中常用的实数集. 关于区间有以下几种类型：

设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为**开区间**(open interval)，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$$

其中,a 和 b 称为开区间的端点(end point),这里 $a \notin (a,b)$,$b \notin (a,b)$.

数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为**闭区间**(closed interval),记作 $[a,b]$,类似地,有半开区间

$$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$$
$$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$$

以上这些区间均称为**有限区间**(finite interval),数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 另外,还有所谓的**无限区间**(infinite interval). 引入记号 $+\infty$(读作:正无穷大)及 $-\infty$(读作:负无穷大),并定义:

$$(a,+\infty) = \{x \mid a < x, x \in \mathbf{R}\}$$
$$[a,+\infty) = \{x \mid a \leqslant x, x \in \mathbf{R}\}$$
$$(-\infty,b) = \{x \mid x < b, x \in \mathbf{R}\}$$
$$(-\infty,b] = \{x \mid x \leqslant b, x \in \mathbf{R}\}$$
$$(-\infty,+\infty) = \{x \mid x \in \mathbf{R}\}$$

众所周知,实数和数轴上的点是一一对应的,以后将点“x”和实数“x”作为同义语. 因此区间也可以在数轴上表示,而区间长度的几何直观即为两端点间的距离. 区间在数轴上可用图 1-1 表示.

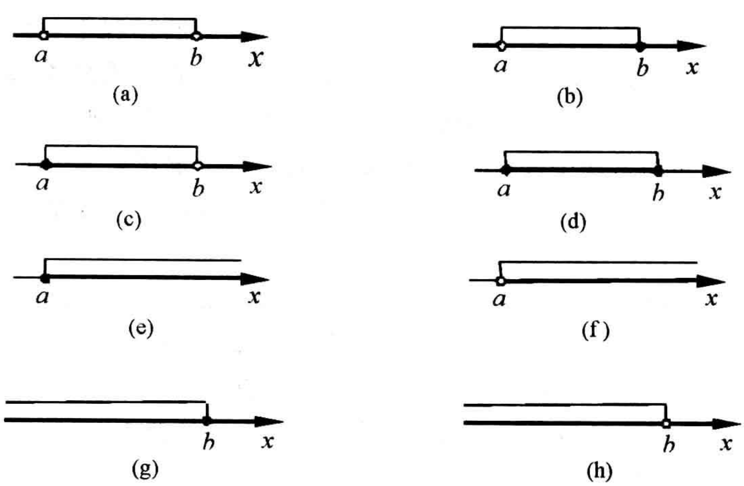


图 1-1

以后在不需要明辨区间是否包含端点以及是有限区间还是无限区间时,简称它为“区间”,常用 I 表示.

现在介绍一个较为特殊且常用的区间——邻域.

3. 邻域

称实数集 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域(neighborhood),记作 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$$

点 a 称为**邻域的中心**(centre of a neighborhood),δ 称为**邻域的半径**(radius of a neighborhood)(见图 1-2).

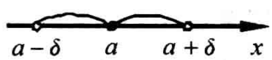
有时用到的邻域要把中心去掉.在 $U(a,\delta)$ 中去掉中心点 a 后,称为点 a 的去心邻域,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

这里 $0<|x-a|$ 表示 $x\neq a$,亦即

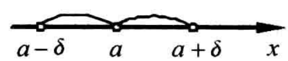
$$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$$

如图 1-2(b)所示.今后在不关心邻域的半径时,点 a 的邻域可简记作 $U(a)$.



$U(a,\delta)$

(a)



$\mathring{U}(a,\delta)$

(b)

图 1-2

4. 逻辑符号

(1)量词 $\forall$."$\forall$"表示"对于任意的""任取""对任意一个"或"对每一个",它是英文 Any 的第一个字母的倒写.例如"$\forall a>0$"表示"对于任意的正数 a",或"任取正数 a".

(2)量词 $\exists$."$\exists$"表示"存在""有一个"或"能够找到".它是英文 Exist 的第一个字母的反写.例如"$\forall M>0,\exists x\in[a,+\infty)$,使得 $x>M$"的含义是:"对于任意的正数 M,在区间$[a,+\infty)$中存在 x,使得 $x>M$".

二、函数的概念

生活中,在同一现象所碰到的各种变量中,通常并不都是独立变化的,它们之间存在着依赖关系.考察下面的两个具体例子:

例 1　自由落体的运动规律为

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

这里 s 表示下降距离,t 表示时间,g 是重力加速度.这个公式指出了物体自由降落过程中,距离 s 和时间 t 的依赖关系.

例 2　已知某商品的销售量与销售价格有

$$P=8-\frac{Q}{2}$$

其中，Q 为商品的销售量，P 为商品的单位价格，即这个关系给出了该商品的销售量 Q 与单位价格 P 的依赖关系.

在以上的依赖关系中，总可以看做其中一个变量随着另一个变量的变化而变化，如下降距离 s 随着时间 t 变化，单位价格 P 随着销售量 Q 变化，第一个变量称为因变量，第二个变量称为自变量，则因变量随着自变量变化，且自变量每取一个值，因变量都有唯一的值与之对应，即得到函数的定义：

定义 1 设 D 是一非空实数集，若对 D 中的每一个 x，在确定的对应关系 f 下，都存在唯一的实数 y 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的一个函数(function). 记为

$$y=f(x), x\in D$$

其中，x 称为**自变量**(argument)，其取值范围 D 称为函数 f 的**定义域**(domain)，记为 $D(f)$，即 $D(f)=D$，y 称为**因变量**(dependent variable)，当 x 取遍定义域中的每一个值时，所对应的 $y=f(x)$ 的集合称为函数 f 的**值域**(range)，记为 W，即

$$W=\{y \mid y=f(x), x\in D(f)\}$$

在函数的定义中需要注意以下几点：

(1) D 中每一个点 x_0，在对应关系 f 下，都有唯一的 y_0 与之对应，即 $y_0=f(x_0)$，称 $f(x_0)$ 为函数 f 在点 x_0 处的函数值. 因变量与自变量的这种对应关系通常称为函数关系.

(2) 函数 f 反映的是自变量 x 与因变量 y 之间的一种对应关系，因此也常称为对应法则 f. 它的表示法常用的有 3 种：列表法、图示法和公式法(也称解析式法).

所谓列表法就是将自变量 x 与因变量 y 的对应数据列成表格，它们之间的函数关系从表格里一目了然. 例如三角函数表、对数函数表等. 很多生产部门常采用图示法来表示函数关系，例如，气象站用仪表记录下的气温曲线来表示气温随时间的变化关系；工厂中用温度-压力曲线来表示温度和压力之间的函数关系等. 理论研究中常用解析式法，即用具体的数学表达式表示函数关系的方法，这种方法读者已经在中学接触很多了，这里不再赘述.

平面点集 $C=\{(x,y) \mid y=f(x), x\in D(f)\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形(见图 1-3).

(3) 构成函数需要两个要素，即定义域和对应法则，可以看出值域是随着定义域和对应法则的确定而确定的. 因此，两个函数只要定义域和对应法则相同就认为是同一函数或说两函数相等.

例如，$f(x)\equiv 1, x\in(-\infty,+\infty)$ 和 $h(x)=\sin^2 x+\cos^2 x, x\in(-\infty,+\infty)$ 表面形式不同，实际上是相等的；而 $f(x)\equiv 1, x\in(-\infty,+\infty)$ 和 $g(x)=\dfrac{x}{x}, x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 是两个不同的函数，因为两个函数的定义域不同.

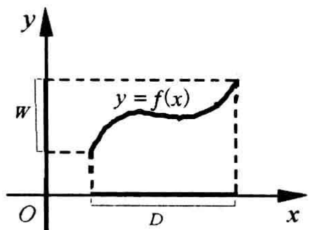


图 1-3

函数的定义域就是自变量所能取得的那些数构成的集合. 在实际问题中应根据问题的实际意义确定，如例 1 自由落体的运动规律

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

确定了 s 与 t 的一个函数关系，其中 t 表示的变化范围是从物体开始下落的时刻（设 $t=0$）到物体到达地面的时刻（设 $t=T$），故该函数的定义域 $D(f)=[0,T]$. 如果讨论的仅仅是函数关系，则往往取使得函数的表达式有意义的自变量的一切实数所组成的集合作为该函数的定义域，这种定义域又称为函数的**自然定义域**(natural domain). 例如，如果不考虑实际意义，那么例 1 中函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，又如函数 $y=\sqrt{1-|x|}+\lg(2x-1)$ 的定义域是由使右端两项都有意义的那些 x 所构成的数集，因此 $D(f)=[-1,1]\cap\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)=\left(\dfrac{1}{2},1\right]$. 若函数的定义域构成区间，则函数的定义域常称为定义区间.

例 3 求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}$ 的定义域.

解 要使函数 y 有意义，必须使

$$16-x^2\geqslant 0 \text{ 且} \sqrt{16-x^2}\neq 0$$

成立，即 $16-x^2>0$，解得

$$-4<x<4$$

故函数的定义域为 $(-4,4)$.

例 4 求函数 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}+\ln(x-2)$ 的定义域.

解 要使函数 y 有意义，必须使

$$\begin{cases}-1\leqslant\dfrac{x-1}{2}\leqslant 1\\ x-2>0\end{cases}$$

成立，即

$$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 3\\ x>2\end{cases}$$

解此不等式组,得 $2 < x \leqslant 3$,故函数的定义域为 $(2,3]$.

例 5 比较函数 $f(x)=2\lg x$,$g(x)=\lg x^2$ 是否相同,并说明原因.

解 因为函数 $f(x)=2\lg x$ 的定义域是 $(0,+\infty)$,所以函数 $f(x)=2\lg x$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数关系. 因为 $g(x)=\lg x^2$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,所以函数 $g(x)=\lg x^2$ 是定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的函数关系. 由于定义域不同,两个函数是不同的.

例 6 比较函数 $f(x)=x$,$g(x)=\sqrt{x^2}$ 是否相同,并说明原因.

解 函数 $f(x)$,$g(x)$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$,但是函数 $f(x)=x$,$g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$,当 $x\geqslant 0$ 时,函数 $f(x)=g(x)=x$,而当 $x<0$ 时,函数 $f(x)=x$,$g(x)=-x$,两个函数的对应法则不同,因此这两个函数是不同的.

在函数的定义中,并不要求在整个定义域上只能用一个表达式表示对应法则,在很多问题中常常会遇到这种情况,就是在定义域的不同部分用不同的表达式来表示对应法则,这种函数称为**分段函数**(piecewise function). 下面举一些分段函数的例子.

例 7 在电子技术中经常遇到三角波,它的波形表达式为

$$u=u(t)=\begin{cases} t, & 0\leqslant t\leqslant 1 \\ 2-t, & 1<t\leqslant 2 \end{cases}$$

它是一个分段函数,不能认为是两个函数(见图 1-4).

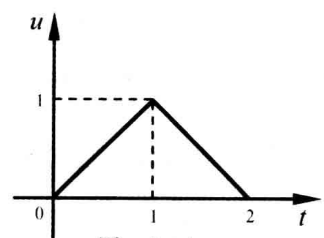


图 1-4

例 8 **符号函数**(sign function)(见图 1-5).

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

例 9 **取整函数** (greatest integer function) $y=[x]$ $(x\in \mathbf{R})$,其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数(见图 1-6).

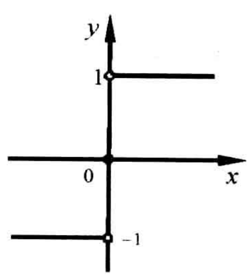


图 1-5

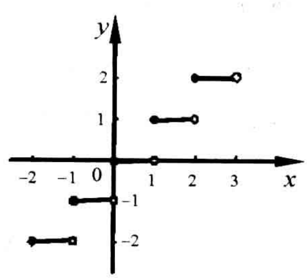


图 1-6

例 10　当旅客携带行李乘火车旅行时，行李质量不超过 20 kg 时不收费，若超过 20 kg，每超过 1 kg 收运费 k 元. 试建立运费 y 与行李质量 x 的函数关系式.

解　因为当 $0 \leqslant x \leqslant 20$ 时，运费 $y=0$；而当 $x > 20$ 时，此时只有超过部分 $x-20$ 按每千克收取运费 k 元，即

$$y=k(x-20)$$

所以运费 y 与行李重量 x 的函数关系式为

$$y=\begin{cases}0, & 0 \leqslant x \leqslant 20 \\ k(x-20), & x > 20\end{cases}$$

例 11　设

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1 < x \leqslant 0 \\ x^2, & 0 < x \leqslant 1 \\ 3-x, & 1 < x \leqslant 2\end{cases}$$

(1) 作出函数的图形.

(2) 写出函数的定义域并求出 $f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f\left(\frac{3}{2}\right)$.

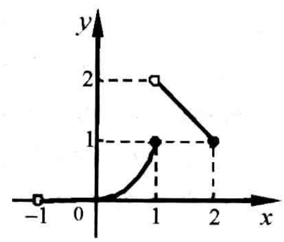


图　1-7

解　(1) 该分段函数的图形如图 1-7 所示.

(2) 函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-1,2]$.

当 $x \in (0,1]$ 时，$f(x)=x^2$；当 $x \in (1,2]$ 时，$f(x)=3-x$. 则

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}, \quad f\left(\frac{3}{2}\right)=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

习　题　1-1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\arccos\frac{x+1}{2}$；　　(2) $y=\sqrt{3-x^2}$；

(3) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}$；　　(4) $y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；

(5) $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$；　　(6) $y=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$；

(7) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\frac{1}{x}$；　　(8) $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$；

(9) $y=\frac{1}{\sqrt{x+2}}+\sqrt{x(x-1)}$；　　(10) $y=\frac{1}{x^2-1}+\arcsin x+\sqrt{x}$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & -4\leqslant x<0\\ 2, & 0\leqslant x<2\\ 4-x, & 2\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$，作出函数的图形，并求 $f(-2)$，$f(0)$，$f(1)$，$f(3.95)$ 的值.

3. 一球的半径为 r，作外切于球的圆锥，试将其体积 V 表示为高 h 的函数，并说明其定义域.

4. 一个无盖的长方体木箱，容积为 $4\ \mathrm{m}^3$，底为正方形，试把木箱的表面积 S 表示为底边长 x 的函数.

5. 设函数 $y=f(x)$ 的图形由方程 $x^2+y^2=1$ 及 $x^2-4x+y+3=0$ 在上半平面($y\geqslant 0$) 的图形所构成，试写出 $f(x)$ 的解析表达式.

6. 根据我国个人所得税法规定(2011 年 9 月)：个人工资、薪金所得应纳个人所得税，应纳税所得额的计算方法为：以每月收入额(扣除五险一金)减去费用 3 500 元的余额为应纳税所得额，其税率表见表 1-1(为简便，只列一部分).

表 1-1

级数	全月纳税所得额	税率/(%)
1	1 500 元以下	3
2	1 500～4 500 元	10
3	4 500～9 000 元	15
4	9 000～35 000 元	20

若某人的月工资、薪金所得为 x 元，请列出他应纳的税款 y 与 x 之间的关系.

第二节　函数的简单性态

一、有界性

设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，若存在正数 M，使得对一切 $x\in X$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界(bounded). 若对无论多么大的正数 M，在 X 上至少存在一点 x_0，使得

$$|f(x_0)|>M$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界(unbounded).

如果函数 $f(x)$ 在其自然定义域内有界，则称函数 $f(x)$ 是**有界函数**(bounded function).

例 1　试证：

(1) 函数 $f(x)=\sin x$ 是有界函数.

(2) 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在(0,1)内无界.

证明　(1) 取 $M=1$，对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$，恒有 $|\sin x|\leqslant M$，即函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界函数.

(2) 对无论多么大的 $M>1$，在(0,1)内总存在有使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|>M$ 的 x，事实上，只要取 $x<\dfrac{1}{M}$，就恒有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|>M$，故函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在(0,1)内无界.

注　(1) 讨论函数的有界性必须注意自变量的变化范围.

(2) 对于定义在 X 上的函数 $f(x)$，如果存在常数 M，使得对于一切 $x\in X$，恒有 $f(x)\leqslant M$ 成立，则称常数 M 是函数 $f(x)$ 的一个上界；如果存在常数 m，使得对于一切 $x\in X$，恒有 $f(x)\geqslant m$ 成立，则称常数 m 是函数 $f(x)$ 的一个下界.这样函数在 X 上有界就等价于函数在 X 上既有上界又有下界.

二、单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于任意的 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)(\text{或 } f(x_1)>f(x_2))$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**(monotone increasing)(或**单调减少**(monotone decreasing)).

注　函数在区间 I 上单调增加或单调减少统称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调.

例 2　试证明函数 $y=x^3$ 是单调增加的.

证明　函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，对于任意的 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$，由于

$$x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)=$$
$$\frac{1}{2}(x_2-x_1)[(x_2+x_1)^2+x_1^2+x_2^2]>0$$

故函数 $y=x^3$ 在其定义域上是单调增加的.

例 3　试证函数 $f(x)=3^{x-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

证明　设 x_1,x_2 是 $(0,+\infty)$ 内任意两点，且 $x_1<x_2$，于是有

$$x_1-x_2<0$$

因为 $\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}=\dfrac{3^{x_1-1}}{3^{x_2-1}}=3^{x_1-x_2}<1$，且 $f(x)>0$，所以

$$f(x_1)<f(x_2)$$

故函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

并非所有函数都是单调的，如函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，而在 $(-\infty,+\infty)$ 内是非单调函数.

三、奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对一切 $x\in D$，恒有

$$f(-x)=f(x)$$

则称函数 $f(x)$ 为 D 上的**偶函数**(even function)；若恒有

$$f(-x)=-f(x)$$

则称函数 $f(x)$ 为 D 上的**奇函数**(odd function). 否则，称函数 $f(x)$ 在 D 上为非奇非偶函数.

设函数 $f(x)$ 是奇函数，(x_1,y_1) 是曲线 $y=f(x)$ 上任一点，则

$$f(-x_1)=-f(x_1)=-y_1$$

即 $(-x_1,-y_1)$ 也在这条曲线上，又 (x_1,y_1) 和 $(-x_1,-y_1)$ 关于原点对称，故函数的图形关于原点对称. 类似可知，偶函数的图形关于 y 轴对称.

例 4 研究下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x+a^{-x})$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$；

(2) $g(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；

(3) $h(x)=\sin x+\cos x$；

(4) $R(x)=\ln x$.

解 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域是对称区间 $(-\infty,+\infty)$，又

$$f(-x)=\frac{1}{2}[a^{-x}+a^{-(-x)}]=f(x)$$

故函数 $f(x)$ 是偶函数.

(2) 函数 $g(x)$ 的定义域是对称区间 $(-\infty,+\infty)$，又

$$g(-x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=$$

$$-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-g(x)$$

故函数 $g(x)$ 是奇函数.

(3) 函数 $h(x)$ 的定义域是对称区间 $(-\infty,+\infty)$，但

$$h\left(-\frac{\pi}{4}\right)=0,\qquad h\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$$