矩阵论（第2版）

方保镕　周继东　李医民　编著

清华大学出版社

矩阵论（第2版）

方保镕 周继东 李医民 编著

清华大学出版社

北 京

内容简介

本书比较全面、系统地介绍了矩阵的基本理论、方法及其应用. 全书分上、下两篇，上篇为基础篇，下篇为应用篇，共8章，分别介绍了矩阵的几何理论(包括线性空间与线性算子，内积空间与等积变换)，λ矩阵与若尔当标准形，矩阵的分解，赋范线性空间与矩阵范数，矩阵微积分及其应用，广义逆矩阵及其应用，几类特殊矩阵与特殊积(如非负矩阵与正矩阵、循环矩阵与素矩阵、随机矩阵和双随机矩阵、单调矩阵、M矩阵与H矩阵、T矩阵与汉克尔矩阵以及克罗内克积、阿达马积与反积等)，前7章每章均配有一定数量的习题. 附录中还给出了15套模拟自测试题. 所有习题和自测题(约1300题)的详细解答，即将由清华大学出版社另行出版.

本书可作为理工科大学各专业研究生的学位课程教材，也可作为理工科和师范类院校高年级本科生的选修课教材，并可供有关专业的教师和工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

矩阵论/方保镕，周继东，李医民编著. --2版. --北京：清华大学出版社，2013
ISBN 978-7-302-33269-5

Ⅰ. ①矩…　Ⅱ. ①方…　②周…　③李…　Ⅲ. ①矩阵论　Ⅳ. ①O151.21

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第165785号

责任编辑：石　磊　赵从棉
封面设计：傅瑞学
责任校对：赵丽敏
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
　　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京密云胶印厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　张**：25.75　　**字　　数**：623千字
版　　次：2004年11月第1版　2013年12月第2版　　**印　　次**：2013年12月第1次印刷
印　　数：1～2500
定　　价：45.00元

产品编号：048940-01

FOREWORD 前言

随着科学技术的迅速发展，古典的线性代数知识已不能满足现代科技的需要，矩阵的理论和方法业已成为现代科技领域必不可少的工具．诸如数值分析、优化理论、微分方程、概率统计、控制论、力学、电子学、网络等学科领域都与矩阵理论有着密切的联系，甚至在经济管理、金融、保险、社会科学等领域，矩阵理论和方法也有着十分重要的应用．可以毫不夸张地说，矩阵理论的发展极大地推动和丰富了其他众多学科的发展．工程中许多新的理论、方法和技术的诞生与发展就是矩阵理论的创造性应用与推广的结果．当今电子计算机及计算技术的迅速发展更为矩阵理论的应用开辟了更广阔的前景．因此，学习和掌握矩阵的基本理论和方法，对于工科研究生来说是必不可少的．从 20 世纪 80 年代，全国的工科院校已普遍把“矩阵论”作为研究生的必修课．为此，1989 年我们根据国家教委制定的工科研究生学习“矩阵论”课程的基本要求编写了教材讲义，并于 1993 年和 2004 年分别由河海大学出版社和清华大学出版社先后正式出版，在部分高校讲授过多年．为使本书适应时代发展的要求，这次改版又对本书进行了充实更新，并对内容作了精心的处理．

本书内容分上、下两篇，上篇为基础篇，下篇为应用篇，共 8 章，比较全面、系统地介绍了矩阵的基本理论、方法及其应用．第 1 章介绍矩阵的几何理论，这部分内容既是线性代数知识的推广和深化，又是矩阵理论的基础，熟练掌握和深刻理解它们对后面内容的学习乃至将来正确处理实际问题有很大的作用．第 2 章至第 4 章主要介绍 λ 矩阵与若尔当标准形、矩阵的分解、赋范线性空间与矩阵范数．这些内容是矩阵理论研究、矩阵计算及应用中不可缺少的工具和手段．以上 4 章内容均为 1991 年国家教育委员会工科研究生数学课程教学指导小组对“矩阵论”课程所制定的基本要求，故本书把它们放入上篇作为基础篇，约为 2～3 学分（讲授 36～54 学时）．考虑到矩阵理论的完整性、系统性，又能反映其应用性，同时也为满足某些专业多学时教学的需要，本书的下篇为应用篇，安排有：第 5 章介绍矩阵微积分及其应用；第 6 章介绍广义逆矩阵及其应用；第 7 章介绍几类特殊矩阵与特殊积（诸如非负矩阵与正矩阵、素矩阵与循环矩阵、随机矩阵和双随机矩阵、单调矩阵、M 矩阵与 H 矩阵、T 矩阵与汉克尔矩阵，矩阵的克罗内克积、阿达马积与反（Fan）积）；第 8 章专门介绍了矩阵在其他方面的一些应用．本书前 7 章每章均配有一定数量的习题．附录中还给出了 15 套模拟自测试题．所有习题和自测题（约 1300 题）的详细解答，即将由清华大学出版社出版．目录中带 * 号的内容可用于选学或自学．

本书在编写过程中，力求做到：

1．理论严谨，重点突出，既重视几何理论，又兼顾应用背景或具体应用；

2. 结构合理,既有系统性,适合全面阅读(多学时),又具有可分性,便于选读(少学时);

3. 取材丰富,涵盖多种矩阵理论与运算法则;

4. 深入浅出,文字流畅。

阅读本书只需具备高等数学和线性代数的基本知识.

作者诚挚地感谢王能超教授,他仔细审阅了全部书稿,并提出了不少有益的建议.

本书可作为理工科大学各专业研究生的学位课程教材,也可作为理工科和师范类院校高年级本科生的选修课教材,并可供有关专业的教师和工程技术人员参考.

由于编著者水平有限,书中如有不妥乃至谬误之处,期望读者批评指正.

编著者

2013 年 5 月

CONTENTS

目录

上篇 基础篇

下篇 应用篇

上篇　基础篇

第1章 矩阵的几何理论

引言 矩阵是什么

简单来说，矩阵就是“由数字纵横排列的一个数学符号”. 但是，要想深刻了解矩阵的数学涵义，先要研究矩阵的几何理论. 实际上，矩阵是“线性系统中线性算子在基(偶)下的一种数量表示”. 因此，对抽象的线性算子的研究，就变成对具体的矩阵的研究. 在这里，用得比较多的两个概念便是线性空间与线性算子. 线性空间是对集合的元素在线性运算方面所表现的共性加以概括而形成的数学概念，而线性算子则是用来研究线性空间之间关系的主要工具. 本章 1.1 节阐述线性空间上的线性算子及其矩阵；1.2 节介绍内积空间上常用的线性算子(正交变换与酉变换)及其矩阵；1.3 节扼要介绍埃尔米特变换及其矩阵. 所有论述是在假定读者已经具备线性代数初步知识的基础上进行的，这里所讨论的内容既是已有线性代数知识的深化，也是本书的基础.

1.1 线性空间上的线性算子与矩阵

1.1.1 线性空间

1. 数环与数域

每一个数学概念都有其适用范围，线性空间的概念与在什么范围内取数有直接的关系，为了准确地叙述和理解线性空间这个数学概念，首先引入数域的概念.

定义 1.1.1 设 Z 为非空数集且其中任何两个相同或互异的数之和、差与积仍属于 Z(即数集关于加、减、乘法运算封闭)，则称 Z 是一个**数环**.

只含一个 0 的数集 $Z=\{0\}$ 显然是个数环.

根据数环的定义有：

(1) 任何数环 Z 必含有 0. 因为若 $a\in Z$，则 $a-a=0\in Z$；

(2) 若 $a\in Z$，则 $-a\in Z$. 因为 $0-a=-a\in Z$.

由此可知，$Z=\{0\}$ 是最小的数环.

定义 1.1.2 如果 P 是至少含有两个互异数的数环，并且其中任何两个数 a 与 b 之商($b\neq 0$)仍属于 P(换言之，数集关于四则运算都封闭)，则说 P 是一个**数域**.

根据数域的定义有：

(1) 任何数域 P 中必含有 0 与 1,因为 P 中至少有一个数 $a\neq 0$,而 $a/a=1\in P$.

(2) 若 $a\neq 0$,则 $1/a=a^{-1}\in P$.

全体整数(包括 0)组成一个数环.全体有理数组成一个数域,并且是最小的数域,因为数中至少含有 0 与 1,由 0 与 1 通过和、差、积运算形成整数环,再加上商运算即形成有理数域,记为$\mathbb{Q}$.

全体实数组成一个数域,叫做实数域,记为$\mathbb{R}$.

全体复数组成一个数域,叫做复数域,记为$\mathbb{C}$.

读者可以验证,形如 $a+b\sqrt{2}$(其中 a,b 为有理数)的数的全体也构成一个数域,并且它包含了有理数域.

2. 线性空间

线性空间是线性代数中 n 维向量空间概念的抽象和推广.为了便于理解这个抽象概念,我们先回顾 n 维向量空间中的向量在加法及数与向量的乘法方面的运算性质,然后再把具有同样运算性质的一切集合,抽象概括为线性空间.

在 n 维向量空间

$$K^n=\{\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in\mathbb{R}\quad 或\quad a_i\in\mathbb{C},i=1,2,\cdots,n\}$$

中,向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是有序数组,且对向量的加法及数与向量乘法是封闭的(指运算结果都仍是 K^n 中的向量),且满足如下 8 条性质(设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 都是 n 维向量,λ,μ 是常数)：

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$ (加法交换律);

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$ (加法结合律);

(3) $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$ (存在零向量 $\mathbf{0}$);

(4) $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$ (存在负向量$-\boldsymbol{\alpha}$);

(5) $\lambda(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta}$ (数因子分配律);

(6) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\alpha}$ (分配律);

(7) $\lambda(\mu\boldsymbol{\alpha})=(\lambda\mu)\boldsymbol{\alpha}$ (数因子结合律);

(8) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.

值得指出的是,要研究的集合已远远超出了 n 维向量空间 K^n 的范围,元素不一定是有序数组,但集合中元素的加法及数与元素的乘法运算,却具有 K^n 中相应的性质.我们先看如下几个熟悉的例子.

例 1.1.1 以实数为系数,次数不超过 n 的一元多项式的全体(包括 0),记作

$$P[x]_n=\{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\mid a_n,a_{n-1},\cdots,a_1,a_0\in\mathbb{R}\}.$$

按多项式相加及乘常数的规则,则 $P[x]_n$ 对这两种运算是封闭的,因为若 $f(x)\in P[x]_n,g(x)\in P[x]_n$,则 $f(x)+g(x)\in P[x]_n$；若 $k\in\mathbb{R}$,则 $kf(x)\in P[x]_n$,且易验证对 $P[x]_n$的这两种运算,也有如 K^n 中所述的 8 条性质.

例 1.1.2 常系数二阶齐次线性微分方程

$$y''-3y'+2y=0$$

的解的集合

$$Y=\{ae^{2x}+be^x\mid a,b\in\mathbb{R}\},$$

对于函数的加法及数与函数乘法两种运算也是封闭的，因为若 $y_1=a_1\mathrm{e}^{2x}+b_1\mathrm{e}^{x}\in Y$，$y_2=a_2\mathrm{e}^{2x}+b_2\mathrm{e}^{x}\in Y$，则 $y_1+y_2=(a_1+a_2)\mathrm{e}^{2x}+(b_1+b_2)\mathrm{e}^{x}\in Y$；当 $k\in\mathbb{R}$ 时，则 $ky_1=ka_1\mathrm{e}^{2x}+kb_1\mathrm{e}^{x}\in Y$，且满足如 K^n 中所述的 8 条性质.

例 1.1.3　在所有 n 阶实矩阵的集合 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中，如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}$；如果 $k\in\mathbb{R}$，则 $k\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 即集合对于这两种运算是封闭的，且也都满足如 K^n 中所述的 8 条性质.

此外，在数学、力学及其他学科中，还有如例 1.1.1～例 1.1.3 的大量这样的集合. 因此，有必要不考虑集合的具体内容的涵义来研究这类集合的公共性质，并把这类集合概括成一个数学名词，于是就有如下的线性空间的概念.

定义 1.1.3　设 V 是一个非空集合，P 是一个数域. 如果 V 满足如下两个条件：

1. 在 V 中定义一个封闭的加法运算，即当 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ 时，有惟一的和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in V$，并且加法运算满足 4 条性质：

(1) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$　（交换律）；

(2) $\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}$　（结合律）；

(3) 存在**零元素** $\boldsymbol{0}\in V$，对于 V 中任何一个元素 $\boldsymbol{x}$ 都有 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x}$；

(4) 存在**负元素**，即对任一元素 $\boldsymbol{x}\in V$，存在有一元素 $\boldsymbol{y}\in V$，使 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$，且称 $\boldsymbol{y}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的负元素，记为 $-\boldsymbol{x}$，于是有 $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$.

2. 在 V 中定义一个封闭的数乘运算（数与元素的乘法），即当 $\boldsymbol{x}\in V,\lambda\in P$ 时，有惟一的 $\lambda\boldsymbol{x}\in V$，且数乘运算满足 4 条性质：

(5) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{x}$　（分配律）；

(6) $\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\lambda\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}$　（数因子分配律）；

(7) $\lambda(\mu\boldsymbol{x})=(\lambda\mu)\boldsymbol{x}$　（结合律）；

(8) $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$.

其中 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ 表示 V 中的任意元素；λ,μ 是数域 P 中任意数；1 是数域 P 中的单位数.

这时，我们说 V 是数域 P 上的**线性空间**. 不管 V 的元素如何，当 P 为实数域 $\mathbb{R}$ 时，则称 V 为**实线性空间**；当 P 为复数域 $\mathbb{C}$ 时，就称 V 为**复线性空间**.

通常我们把 V 中满足 8 条性质且为封闭的加法及数乘两种运算，统称**线性运算**. 简言之，凡定义了线性运算的集合，就称线性空间. 因此，线性运算是线性空间的本质，它反映了集合中元素之间的某种代数结构. 当仅研究集合的代数结构时，便抽象出线性空间的概念.

下面列举一些线性空间的例子.

在 K^n 中，所有实 n 维向量的集合 $\mathbb{R}^n$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间；所有复 n 维向量的集合 $\mathbb{C}^n$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间. 作为特例，几何空间全体向量组成的集合 $\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}^3$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

例 1.1.1～例 1.1.3 中的集合，在其各自的加法及数乘运算的定义下，都构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 我们称例 1.1.3 所给的线性空间 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 为**矩阵空间**.

此外，检验集合是否构成线性空间，逐条检验运算是否为线性运算是至关重要的. 例如，次数等于 $n(n\geqslant 1)$ 的多项式的集合，关于通常的多项式加法与数乘运算是不能构成线性空间的. 因为两个 n 次多项式的和可能不是 n 次多项式，如当 $n>1$ 时，$f(x)=x^n+x$，$g(x)=-x^n+1$，则 $f(x)+g(x)=x+1$ 就不属于原来的集合，亦即对加法运算不封闭，故

不是线性空间. 还要注意,检验线性运算不能只检验对运算的封闭性,特别是当定义的加法及数乘运算不是通常意义下的运算时,则应仔细检验其余 8 条性质.

下面再举一个不是线性空间的例子.

例 1.1.4 平面上全体向量组成的集合,对于通常意义下的向量加法和如下定义的数乘

$$k \cdot \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0},$$

虽然对两种运算都封闭,但因 $1 \cdot \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$,不满足运算性质(8),即定义的运算不是线性运算,所以不是线性空间.

一般来说,同一个集合,若定义两种不同的线性运算,就构成不同的线性空间; 若定义的运算不是线性运算,也就不能构成线性空间. 所以,线性空间的概念是集合与运算二者的结合. 为了对线性空间的理解更具有一般性,请看下面的线性空间所表现的代数结构.

例 1.1.5 设$\mathbb{R}^+$为所有正实数组成的数集,其加法及数乘运算定义为(奇怪的加法与数乘)

$$a \oplus b = ab, \qquad a, b \in \mathbb{R}^+,$$
$$k \circ a = a^k, \quad k \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}^+.$$

证明$\mathbb{R}^+$是$\mathbb{R}$上的线性空间.

证明 实际上要验证 10 条:

对加法封闭: 设 $a, b \in \mathbb{R}^+$,则有 $a \oplus b = ab \in \mathbb{R}^+$;

对数乘封闭: 设 $k \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$,则有 $k \circ a = a^k \in \mathbb{R}^+$;

1. $a \oplus b = ab = ba = b \oplus a$;
2. $(a \oplus b) \oplus c = (ab) \oplus c = (ab)c = a(bc) = a \oplus (b \oplus c)$;
3. 1 是零元素,因为 $a \oplus 1 = a \cdot 1 = a$;
4. a 的负元素是 $1/a$,因为 $a \oplus 1/a = a \cdot 1/a = 1$;
5. $k \circ (a \oplus b) = k \circ (ab) = (ab)^k = a^k b^k = (k \circ a) \oplus (k \circ b)$;
6. $(\lambda + \mu) \circ a = a^{\lambda + \mu} = a^\lambda \oplus a^\mu = (\lambda \circ a) \oplus (\mu \circ a)$;
7. $\lambda \circ (\mu \circ a) = \lambda \circ a^\mu = (a^\mu)^\lambda = a^{\lambda\mu} = (\lambda\mu) \circ a$;
8. $1 \circ a = a^1 = a$.

因此,$\mathbb{R}^+$是实线性空间.

线性空间还是物理、力学中满足叠加原理的系统的数学模型,请看下例.

例 1.1.6 考察一根梁因受荷载而产生变形的问题(见图 1.1). 设所考察的情况都在弹性范围之内(我们不妨设应变与应力总是成比例的,而在实际应用时结论只适用于小应变的情况).

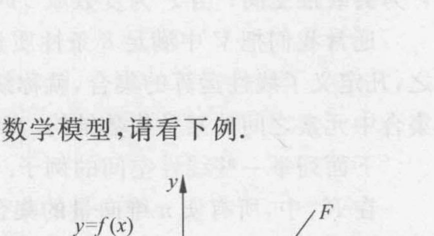

图 1.1 梁的挠度曲线

设支点没有位移,则挠度曲线是在区间$[-a, a]$上的连续函数,且有

$$f(-a) = 0, \; f(0) = 0, \; f(a) = 0.$$

考察所有这样的挠度曲线(函数形式)的集合:

$$D = \{ f \mid f \in C^2[-a, a], \; f(-a) = 0, \; f(0) = 0, \; f(a) = 0 \},$$

这里 $C^2[-a, a]$表示所有在区间$[-a, a]$上有二阶连续导数的函数的集合.

设荷载 F_1 产生挠度曲线 $y=f_1(x)$,F_2 产生挠度曲线 $y=f_2(x)$,由叠加原理知：F_1 与 F_2 同时作用,则产生的挠度曲线为 $y=f_1(x)+f_2(x)$,这正是函数的加法.

这种加法显然是封闭的,且满足线性空间定义前 4 条性质(0 就是恒等于零的函数——对应于零荷载；与 f 相反的元素就是 $-f$,它对应于反方向的荷载).

如果荷载 F_1 是 F_2 的 k 倍,即 $F_1=kF_2$,则

$$f_1(x)=kf_2(x),\quad 即\quad f_1=kf_2.$$

这正是常数与函数的乘法,它也是封闭的,且满足线性空间定义后 4 条性质,所以挠度曲线的集合 D 构成一个线性空间.

总之,在各种不同的领域都可以举出许多线性空间的例子.正因为线性空间是 n 维向量空间的抽象和推广,所以为了几何直观,有时我们又把线性空间叫做向量空间.但这里的向量不一定是有序数组,而是广义的向量,可以是以数学对象(如函数、矩阵等)为向量,也可以是以物理对象(如力、速度等)为向量.

3. 线性空间的基本性质

根据线性空间的定义,可以推证线性空间的下述性质：

性质 1　线性空间的零元素是惟一的.

事实上,如果 $\mathbf{0}_1,\mathbf{0}_2$ 是线性空间 V 中的两个零元素,则根据定义有

$$\mathbf{0}_1=\mathbf{0}_1+\mathbf{0}_2=\mathbf{0}_2+\mathbf{0}_1=\mathbf{0}_2.$$

性质 2　任一元素的负元素是惟一的.

事实上,设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 均为 $\boldsymbol{x}\in V$ 的负元素,则

$$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_1+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}_2)=(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{x}_2.$$

性质 3　设 $\lambda,0,-1,1\in P,\boldsymbol{x},-\boldsymbol{x},\mathbf{0}\in V$,则

(1) $0\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$;

(2) $(-1)\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}$;

(3) $\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$;

(4) 若 $\lambda\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$,则 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$.

事实上,因为

$$\boldsymbol{x}+0\boldsymbol{x}=1\boldsymbol{x}+0\boldsymbol{x}=(1+0)\boldsymbol{x}=1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x},$$

所以

$$0\boldsymbol{x}=\mathbf{0};$$

因为　$\boldsymbol{x}+(-1)\boldsymbol{x}=1\boldsymbol{x}+(-1)\boldsymbol{x}=[1+(-1)]\boldsymbol{x}=0\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$,

所以

$$(-1)\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x};$$

因为　$\lambda\mathbf{0}=\lambda[\boldsymbol{x}+(-1)\boldsymbol{x}]=\lambda\boldsymbol{x}+(-\lambda)\boldsymbol{x}=[\lambda+(-\lambda)]\boldsymbol{x}=0\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$,

故

$$\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0};$$

最后,若 $\lambda\neq0$,且 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$,则

$$\boldsymbol{x}=1\boldsymbol{x}=\left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right)\boldsymbol{x}=\frac{1}{\lambda}(\lambda\boldsymbol{x})=\frac{1}{\lambda}\mathbf{0}=\mathbf{0},$$

这与 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ 矛盾,故 $\lambda\neq0$ 与 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ 不能同时成立.

定义 1.1.4　只含一个元素的线性空间叫做零空间,显然,这个元素便是零元素.

4. 基、维数与坐标

由上面线性空间的定义容易知道，有限个向量组成的集合，总不能满足加法及数乘运算的封闭性，所以除只由一个零向量构成的零空间$\{\mathbf{0}\}$外，一般线性空间都有无穷多个向量. 于是提出两个问题：

(1) 在无穷多个向量中能否找到有限个具有代表性的向量，使得线性空间中任一个向量都可以用这有限个向量来表示？

(2) 线性空间的向量是抽象的，如何把它与具体的数组向量$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$联系起来，使线性空间中抽象的线性运算转化为数组向量的线性运算？

为了圆满地解答这两个问题，首先需要定义线性空间中向量组的线性相关性等基本概念.

如果$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r\,(r\geqslant 1)$为线性空间$V$中一组向量，$k_1,k_2,\cdots,k_r$是数域$P$中的数，那么向量

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{x}_r \tag{1.1.1}$$

称为向量$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r$的一个**线性组合**，有时也说向量$\boldsymbol{x}$可用向量组$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r$ **线性表示**.

例 1.1.7 对于例 1.1.2 中的线性空间Y，我们知道它的向量是微分方程$y''-3y'+2y=0$的解$y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{2x}$，其中$c_1$与$c_2$是独立的两个任意常数. 这表明$y$是它的两个特解向量$\mathrm{e}^x$与$\mathrm{e}^{2x}$的线性组合.

如果式(1.1.1)中的$k_1,k_2,\cdots,k_r$不全为零，且使

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{x}_r=\mathbf{0}, \tag{1.1.2}$$

则称向量组$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r$ **线性相关**，否则就称其为**线性无关**. 换句话说，如果等式(1.1.2)只有在$k_1=k_2=\cdots=k_r=0$时才成立，则称$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r$线性无关.

显然，如果$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r$中有一个为零元，则这$r$个元素必然是线性相关的，例如$\boldsymbol{x}_1=\mathbf{0}$，则可置$k_1\neq 0$，而令$k_2=k_3=\cdots=k_r=0$，使式(1.1.2)成立.

例 1.1.8 在$\mathbb{R}^n$中，设有两个向量组

$$\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,\cdots,0),\\ \qquad\vdots\\ \boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,0,\cdots,1),\end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}'_1=(1,1,\cdots,1,1),\\ \boldsymbol{\varepsilon}'_2=(0,1,\cdots,1,1),\\ \qquad\vdots\\ \boldsymbol{\varepsilon}'_n=(0,0,\cdots,0,1).\end{cases}$$

分别考察方程组

$$k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n=\mathbf{0} \quad 及 \quad k_1\boldsymbol{\varepsilon}'_1+k_2\boldsymbol{\varepsilon}'_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}'_n=\mathbf{0}.$$

由于它们对应的系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{vmatrix}\neq 0 \quad 及 \quad \begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\0&1&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&1\end{vmatrix}\neq 0,$$

从而两个线性方程组都只有零解$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，故这两个向量组是线性无关的.

又如，例 1.1.1 中的线性空间$P[x]_n$，取向量组$1,x,x^2,\cdots,x^n$，当对任意x，使$k_1\cdot 1+k_2x+k_3x^2+\cdots+k_{n+1}x^n=0$时，$k_1,k_2,\cdots,k_{n+1}$必须同时为零，因此，$1,x,x^2,\cdots,x^n$线性无