全国十二大考研辅导机构指定用书

李永乐·王式安考研数学系列

★ 样卷篇 囊括历年考题精华

★ 模拟篇 查漏补缺最后冲刺

2012考研 李永乐

数学最后冲刺 5+3

数学三

主编 李永乐 王式安

"100题"与"400题"之经典在延续……

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

李永乐数学最后冲刺

5+3

数学三

主 编 李永乐 王式安

编 委：北京理工大学 王式安
北 京 大 学 刘西垣
北 京 大 学 李正元
清 华 大 学 李永乐
西安交通大学 武忠祥
（按姓氏笔画排序）

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

李永乐数学最后冲刺 5+3. 数学三/李永乐主编. —西安：西安交通大学出版社，2011.8
ISBN 978-7-5605-4010-8

Ⅰ.①李… Ⅱ.①李… Ⅲ.①高等数学—硕士生—入学考试—习题集 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 163675 号

敬告读者

本书封面粘有专用防伪标识，凡有防伪标识的为正版图书，敬请读者识别。

李永乐数学最后冲刺 5+3(数学三)

主　　编：李永乐　王式安
责任编辑：雷萧屹
装帧设计：金榜图文设计室
出版发行：西安交通大学出版社
地　　址：西安市兴庆南路 10 号(邮编：710049)
电　　话：(029)82668315　82669096(总编办)
　　　　　(029)82668357　82667874(发行部)
印　　刷：保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本：787mm×1092mm　1/8
印　　张：11
字　　数：186 千字
版　　次：2011 年 11 月第 1 版
印　　次：2011 年 11 月第 1 次印刷
书　　号：978-7-5605-4010-8/O·372
定　　价：15.00 元

图书如有印装质量问题，请与印刷厂联系调换　　电话：(010)82570560

前　言

本套试卷是一种新的尝试，是为参加全国硕士研究生入学统一数学考试的考生，在最后冲刺阶段设计的复习用书。针对考生在强化阶段出现的问题，从考研数学的热考内容和重点题型中多角度设计题目。它是“数学全程预测100题”和“数学全真模拟经典400题”的延续，希望能在最后冲刺阶段增强考生在应试中的变通能力，从而取得理想的成绩。

本套试卷特点为首次采用了5+3的形式，即5套样卷加3套模拟。

5套样卷是从1991年～2011年的真题中精心挑选与总结所组成，这5套样卷中的试题涵盖了这20多年来的重点考查内容和易考题型，这样更加利于考生温故知新，从而更好地把握考试的方向。

3套模拟集多年真题中的热考题型和重点考查知识点于一身，试图从模拟命题教师的角度来编写，旨在考前的摸底与练兵。

同学们在使用《数学最后冲刺5+3》的时候，每一套试卷都一定要按照正式考研时的程序答题，独立思考、认真书写，不能在答题的过程中对照解析，并且不要估分，但要查漏补缺、总结和提炼，这样方能达到事半功倍的效果！

编者

2011年11月

目　录

样卷篇

模拟篇

注意：
因以下项目填写不清而影响成绩责任自负

准考证号

姓名

考试地点__________

________考场______号

归属区县__________

（领准考证的区县）

（密封线内不要答题）

样卷篇

第一套

得分	评卷人

一、选择题：1 ～ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.

(1) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，

$$g(x)=\begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$$ 则

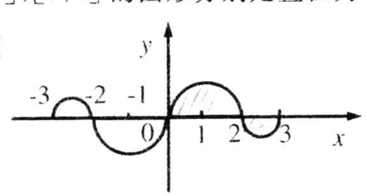
(A) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点.

(B) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点.

(C) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点.

(D) $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关.

(2) 如图，连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2]$，$[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周，在区间 $[-2,0]$，$[0,2]$ 的图形分别是直径为 2 的上、下半圆周，设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则下列结论正确的是



(A) $F(3)=-\frac{3}{4}F(-2)$.

(B) $F(3)=\frac{5}{4}F(2)$.

(C) $F(-3)=\frac{3}{4}F(2)$.

(D) $F(-3)=-\frac{5}{4}F(-2)$.

(3) 已知 $\frac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分，则 a 等于

(A) -1.　　(B) 0.　　(C) 1.　　(D) 2.

(4) 设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，其中 D 是由 $y=0$，$y=x^2$，$x=1$ 所围区域，则 $f(x,y)$ 等于

(A) xy.　　(B) $2xy$.

(C) $xy+\frac{1}{8}$.　　(D) $xy+1$.

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维列向量，$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，下列选项正确的是

(A) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.

(B) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关.

(C) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.

(D) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关.

(6) 已知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，k_1,k_2 为任意常数，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解必是

(A) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\frac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

(B) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\frac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

(C) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)+\frac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

(D) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\frac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

(7) 设 A、B 为随机事件，且 $P(B)>0$，$P(A\mid B)=1$，则必有

(A) $P(A\cup B)>P(A)$.　　(B) $P(A\cup B)>P(B)$.

(C) $P(A\cup B)=P(A)$.　　(D) $P(A\cup B)=P(B)$.

(8) 设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量，它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，则

(A) $f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

(B) $f_1(x)\cdot f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

(C) $F_1(x)+F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

(D) $F_1(x)\cdot F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

得分	评卷人

二、填空题:9～14小题,每小题4分,共24分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & |x|\leqslant c \\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>c \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,则 $c=$ ________.

(10) 设 $f(x)$ 有一个原函数 $\dfrac{\sin x}{x}$,则 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf'(x)\mathrm{d}x=$ ________.

(11) 交换积分次序:$\int_0^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\frac{1}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x=$ ________.

(12) 微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x}\right)^3$ 满足 $y\Big|_{x=1}=1$ 的特解为 $y=$ ________.

(13) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,4,0,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,7,1,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(3,10,b,4)^{\mathrm{T}}$. 若 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出,则 a,b 应满足的条件是____.

(14) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布,则 $P\{\max\{X,Y\}\leqslant 1\}=$ ________.

得分	评卷人

三、解答题:15～23小题,共94分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分10分)

设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y\ln y-x+y=0$ 确定,试判断曲线 $y=y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近的凹凸性.

(16)(本题满分10分)

设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数,且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$,又 $g(x,y)=f\left(xy,\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)\right)$,求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

(17)(本题满分10分)

计算二重积分 $\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 由曲线 $x=\sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x+\sqrt{2}y=0$ 及 $x-\sqrt{2}y=0$ 围成.

密 封 线 内 不 要 答 题

密 封 线 内 不 要 答 题

(18)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是周期为 2 的连续函数.

(Ⅰ) 证明对任意实数 t,有 $\int_t^{t+2} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$;

(Ⅱ) 证明 $G(x) = \int_0^x [2f(t) - \int_t^{t+2} f(s)\mathrm{d}s]\mathrm{d}t$ 是周期为 2 的周期函数.

(19)(本题满分 10 分)

将函数 $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x - 4}$ 展开成 $x - 1$ 的幂级数,并指出其收敛区间.

(20)(本题满分 10 分)

设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵,$\boldsymbol{\xi}$ 是 n 维非零列向量,$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\xi}$ 的转置.

证明:(Ⅰ) $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi} = 1$.

(Ⅱ) 当 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi} = 1$ 时,$\boldsymbol{A}$ 是不可逆矩阵.

(21)(本题满分 12 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$,其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵

(Ⅰ) 求 $\boldsymbol{B} + 2\boldsymbol{E}$ 的特征值与特征向量.

(Ⅱ) 求 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{E}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B} - 2\boldsymbol{E})$.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & x\in[1,8],\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$F(x)$ 是 X 的分布函数,求随机变量 $Y=F(X)$ 的分布函数.

(23)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立,X 的概率分布为 $P\{X=i\}=\dfrac{1}{3}(i=-1,0,1)$,$Y$ 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 记 $Z=X+Y$.

(Ⅰ)求 $P\{Z\leqslant\dfrac{1}{2}\mid X=0\}$;

(Ⅱ)求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

注意：
因以下项目填写不清而影响成绩责任自负
准考证号

姓名

考试地点________
________考场______号
归属区县________
（领准考证的区县）

（密 封 线 内 不 要 答 题）

第二套

得分	评卷人

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.

(1) 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量，Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则

(A) $0<\mathrm{d}y<\Delta y$. (B) $0<\Delta y<\mathrm{d}y$.

(C) $\Delta y<\mathrm{d}y<0$. (D) $\mathrm{d}y<\Delta y<0$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，下列命题错误的是

(A) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.

(B) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.

(C) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.

(D) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.

(3) 函数 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}+x\mathrm{e}^x$ 满足的一个微分方程是

(A) $y''-y'-2y=3x\mathrm{e}^x$. (B) $y''-y'-2y=3\mathrm{e}^x$.

(C) $y''+y'-2y=3x\mathrm{e}^x$. (D) $y''+y'-2y=3\mathrm{e}^x$.

(4) 设 $a_n>0$，$n=1,2,3,\cdots$，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，则下列结论正确的是

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 发散.

(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 发散.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n+1}+a_{2n})$ 收敛.

(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$ 收敛.

(5) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{CA}$，则 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$ 为

(A) $\boldsymbol{E}$. (B) $-\boldsymbol{E}$.

(C) $\boldsymbol{A}$. (D) $-\boldsymbol{A}$.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，则对于线性方程组(Ⅰ)：$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和(Ⅱ)：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，必有

(A)(Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解，(Ⅰ)的解也是(Ⅱ)的解.

(B)(Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解，但(Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解.

(C)(Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解，(Ⅱ)的解也不是(Ⅰ)的解.

(D)(Ⅰ)的解是(Ⅱ)的解，但(Ⅱ)的解不是(Ⅰ)的解.

(7) 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$，则

(A) $P\{X+Y\leqslant0\}=\dfrac{1}{2}$. (B) $P\{X+Y\leqslant1\}=\dfrac{1}{2}$.

(C) $P\{X-Y\leqslant0\}=\dfrac{1}{2}$. (D) $P\{X-Y\leqslant1\}=\dfrac{1}{2}$.

(8) 将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 X 和 Y 的相关系数等于

(A) -1. (B) 0. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) 1.

得分	评卷人

二、填空题：9～14小题，每小题4分，共24分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 设 $x\to0$ 时 $\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 $n=$ ________.

(10) 设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，则 $y^{(n)}(0)=$ ________.

(11) $\displaystyle\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}=$ ________.

(12) 设生产函数 $Q=AL^{\alpha}K^{\beta}$，其中 Q 是产出量，L 是劳动投入量，K 是资本投

入量，而 A,α,β 均为大于零的参数，则当 $Q=1$ 时 K 关于 L 的弹性为________.

(13) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,0,k)^{\mathrm{T}}$. 若矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $k=$________.

(14) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma^2)$，总体 Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本，则

$$E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2}{n_1+n_2-2}\right]=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

得分	评卷人

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

(16)（本题满分 10 分）

计算二重积分 $I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，其中 $D=\{(r,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant\sec\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\}$.

(17)（本题满分 10 分）

求函数 $u=xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值.

密 封 线 内 不 要 答 题

(18)(本题满分 10 分)

设曲线 $y=f(x)$，其中 $y=f(x)$ 是可导函数，且 $f(x)>0$. 已知曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0, x=1$ 及 $x=t(t>1)$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得立体体积值是该曲边梯形面积值的 πt 倍，求该曲线方程.

(19)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足

$$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}} x e^{1-x} f(x)\mathrm{d}x \quad (k>1)$$

证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非奇异矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维列向量，b 为常数，记分块矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{*} & |\boldsymbol{A}|\end{pmatrix},\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & b\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}^{*}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵.

(Ⅰ) 计算并化简 $\boldsymbol{PQ}$；

(Ⅱ) 证明矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq b$.

(21)(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=-2$，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 的一个特征向量. $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ) 验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量，并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值的特征向量；

(Ⅱ) 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求:(Ⅰ)(X,Y)的边缘概率密度$f_X(x)$,$f_Y(y)$;

(Ⅱ)$Z=2X-Y$的概率密度$f_Z(z)$;

(Ⅲ)$P\{Y\leqslant\frac{1}{2}\mid X\leqslant\frac{1}{2}\}$.

(23)(本题满分 11 分)

设随机变量X的概率分布密度为$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$,$-\infty<x<+\infty$.

(Ⅰ)求X的数学期望EX和方差DX;

(Ⅱ)求X与$|X|$的协方差,并问X与$|X|$是否不相关?

(Ⅲ)问X与$|X|$是否相互独立?为什么?

注意：
因以下项目填写不清而影响成绩责任自负
准考证号

姓名

考试地点________

________考场______号

归属区县________

（领准考证的区县）

（密封线内不要答题）

第三套

得分	评卷人

一、选择题：1 ～ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.

(1) 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$，则

(A) $x=0,x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点.

(B) $x=0,x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

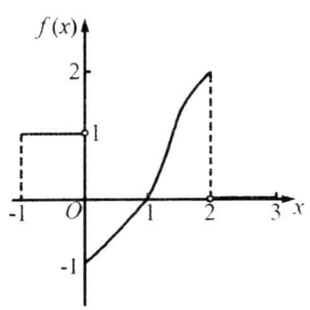
(D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

(2) 设当 $x\to 0$ 时，$e^x-(ax^2+bx+1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小，则

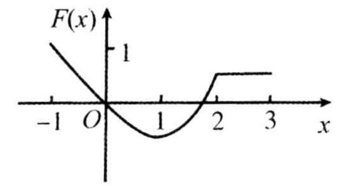
(A) $a=\dfrac{1}{2},b=1$.　　(B) $a=1,b=1$.

(C) $a=-\dfrac{1}{2},b=-1$.　　(D) $a=-1,b=1$.

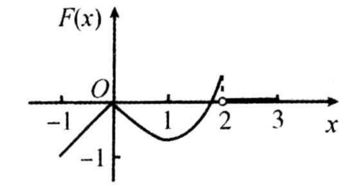
(3) 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形为：



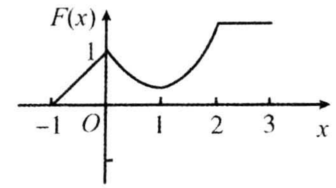
则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的图形为



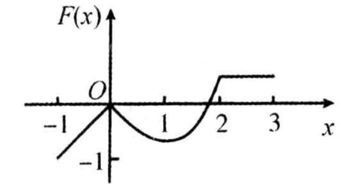
(A)



(B)



(C)



(D)

(4) 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$，已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是

(A) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.

(B) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

(C) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.

(D) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

(5) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都是 4 维列向量，且 4 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|=m$，$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=n$，则 4 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|=$

(A) $m+n$.　(B) $-(m+n)$.　(C) $n-m$.　(D) $m-n$.

(6) 若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$ 和对角矩阵相似，则 $a=$

(A) 0　(B) 1　(C) 6　(D) 2

(7) 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 独立同分布，且其方差为 $\sigma^2>0$，令随机变量 $Y=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，则

(A) $D(X_1+Y)=\dfrac{n+2}{n}\sigma^2$.　(B) $D(X_1-Y)=\dfrac{n+1}{n}\sigma^2$.

(C) $\operatorname{cov}(X_1,Y)=\dfrac{\sigma^2}{n}$.　(D) $\operatorname{cov}(X_1,Y)=\sigma^2$.

(8) 设随机变量 $X_i\sim\begin{pmatrix}-1&0&1\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}(i=1,2)$，且满足 $P\{X_1X_2=0\}=1$，则 $P\{X_1=X_2\}$ 的值为

(A) 0.　(B) $\dfrac{1}{4}$.　(C) $\dfrac{1}{2}$.　(D) 1.

得分	评卷人

二、填空题：9～14小题，每小题4分，共24分．把答案填在题中的横线上．

(9) 极限$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$________.

(10) 设某产品的需求函数为$Q=Q(P)$，其对价格P的弹性$\varepsilon_P=0.2$，则当需求量为10000件时，价格增加1元会使产品收益增加________元.

(11) 使不等式$\int_1^x \dfrac{\sin t}{t}dt>\ln x$成立的$x$的范围是________.

(12) 已知幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$在$x=0$处收敛，在$x=-4$处发散，则幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$的收敛域为________.

(13) 已知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$是齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系，若$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+t\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4+t\boldsymbol{\alpha}_1$也是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系，则$t$的取值为____.

(14) 设总体X的概率密度为$f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}(-\infty<x<+\infty)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为总体$X$的简单随机样本，其样本方差为$S^2$，则$ES^2=$________.

得分	评卷人

三、解答题：15～23小题，共94分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)（本题满分10分）

计算不定积分$\int\ln\left(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}\right)dx\quad(x>0)$.

(16)（本题满分10分）

设$z=z(x,y)$是由方程$x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$所确定的函数，其中φ具有二阶导数，且$\varphi'\neq-1$.

（Ⅰ）求dz；

（Ⅱ）记$u(x,y)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

(17)（本题满分10分）

设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2, & |x|+|y|\leqslant 1\\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1\leqslant|x|+|y|\leqslant 2\end{cases}$$

计算二重积分$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，其中$D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 2\}$.

密　封　线　内　不　要　答　题

(18)(本题满分 10 分)

在 xoy 坐标平面上,连续曲线 L 过点 $M(1,0)$,其上任意点 $P(x,y)(x \neq 0)$ 处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax(常数 $a>0$).

(Ⅰ)求 L 的方程;

(Ⅱ)当 L 与直线 $y=ax$ 所围成平面图形的面积为 $\frac{8}{3}$ 时,确定 a 的值.

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$,$g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,在 (a,b) 内二阶可导且存在相等的最大值,又 $f(a)=g(a)$,$f(b)=g(b)$,证明:

(Ⅰ)存在 $\eta \in (a,b)$,使得 $f(\eta)=g(\eta)$;

(Ⅱ)存在 $\xi \in (a,b)$,使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

(Ⅰ)求满足 $\boldsymbol{A\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$,$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2$,$\boldsymbol{\xi}_3$;

(Ⅱ)对(Ⅰ)中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2$,$\boldsymbol{\xi}_3$,证明 $\boldsymbol{\xi}_1$,$\boldsymbol{\xi}_2$,$\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

(21)(本题满分 11 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形;

(Ⅲ)求方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 和 Y 的联合分布是正方形 $G=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 3,1\leqslant y\leqslant 3\}$ 上的均匀分布,试求 $U=|X-Y|$ 的概率密度 $f(u)$.

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅰ) 求 $P\{X>2Y\}$;

(Ⅱ) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

注意：
因以下项目填写不清
而影响成绩责任自负
准考证号

姓名

考试
地点________
______考场_____号
归属
区县________
（领准考证的区县）

（密　封　线　内　不　要　答　题）

第四套

得分	评卷人

一、选择题：1 ～ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.

(1) 设 $f(x)=|x(1-x)|$，则

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(B) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(2) 当 a 取下列哪个值时，函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$ 恰有两个不同的零点.

(A) 2.　　(B) 4.　　(C) 6.　　(D) 8.

(3) 以下四个命题中，正确的是

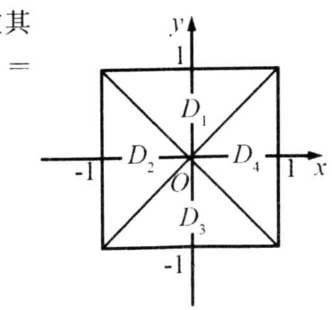
(A) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(B) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(C) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(D) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(4) 如图，正方形 $\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\}$ 被其对角对角线分为四个区域 $D_k(k=1,2,3,4)$，$I_k=\iint\limits_{D_k} y\cos x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 4}\{I_k\}=$



(A) I_1.

(B) I_2.

(C) I_3.

(D) I_4.

(5) n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有 n 个不同的特征值是 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似的

(A) 充分必要条件.　　(B) 充分而非必要条件.

(C) 必要而非充分条件.　　(D) 既非充分也非必要条件.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，则 $\boldsymbol{A}$ 相似于

(A) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(7) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，随机变量 Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且 $P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$，则必有

(A) $\sigma_1<\sigma_2$.　　(B) $\sigma_1>\sigma_2$.

(C) $\mu_1<\mu_2$.　　(D) $\mu_1>\mu_2$.

(8) 设随机变量 X 和 Y 都服从标准正态分布，则

(A) $X+Y$ 服从正态分布.　　(B) X^2+Y^2 服从 χ^2 分布.

(C) X^2 和 Y^2 都服从 χ^2 分布.　　(D) X^2/Y^2 服从 F 分布.

得分	评卷人

二、填空题：9 ～ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 设 $0<a<b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=$ ________.

(10) 设位于曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}(\mathrm{e}\leqslant x<+\infty)$ 下方，x 轴上方的无界区域为 G，则 G 绕 x 轴旋转一周所得空间区域的体积为________.

(11) 设 $f(x)$ 连续，则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=$ ________.

(12) 设二元函数 $z=x\mathrm{e}^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$，则 $\mathrm{d}z\Big|_{(1,0)}=$ ________.

(13) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩为________.

(14) 在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数，则两数之差的绝对值小于 $\dfrac{1}{2}$ 的概率为________.

得分	评卷人

三、解答题:15 ～ 23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 9 分)

求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $f(t)$ 在$[0,+\infty)$上连续,且满足方程

$$f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$

求 $f(t)$.

(17)(本题满分 10 分)

设 D_1 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a,x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面区域;D_2 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $y=0,x=a$ 所围成的平面区域,其中 $0<a<2$.

(Ⅰ)试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1 和 D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2;

(Ⅱ)问当 a 为何值时,V_1+V_2 取得最大值,试求此最大值.

(18)(本题满分 10 分)

设 $f(x),g(x)$ 在$[0,1]$的导数连续,且 $f(0)=0,f'(x)\geqslant 0,g'(x)\geqslant 0$,证明:对 $\forall a\in[0,1]$,有

$$\int_0^a g(x)f'(x)dx+\int_0^1 f(x)g'(x)dx\geqslant f(a)g(1).$$