大学数学系列教材

GAODENGSHUXUE

高等数学
学习指导书

主　编　段五朵　吴阔华
副主编　盛梅波　乐励华

江西高校出版社

XUEXIZHIDAOSHU

大学数学系列教材

高等数学
学习指导书

主　编　段五朵　吴闻华
副主编　盛梅波　乐励华

江西高校出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导书/段五朵,吴阔华主编.—南昌:江西高校出版社,2003.8(2007.9重印)

ISBN 978-7-81075-487-3

Ⅰ.高… Ⅱ.①段… ②吴… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第039424号

出版发行	江西高校出版社
社　　址	江西省南昌市洪都北大道96号
邮政编码	330046
电　　话	(0791)8529392,8504319
网　　址	www.juacp.com
印　　刷	江西教育印刷厂
照　　排	江西太元科技有限公司照排部
经　　销	各地新华书店
开　　本	850mm×1168mm　1/32
印　　张	11.5
字　　数	310千字
版　　次	2007年9月第1版第7次印刷
印　　数	36201~42200册
书　　号	ISBN 978-7-81075-487-3
定　　价	16.00元

前 言

高等数学是高等学校理工科和经济学科等有关专业的一门重要基础课，它既是其它数学课程的基础，也是力学、物理学、经济学等课程的重要工具。

本书是按照教育部"关于高等数学课程的教学基本要求"和"全国工学、经济学硕士研究生数学入学考试大纲"编写而成的，它包括一元函数微积分和多元函数微积分、向量代数和空间解析几何、无穷级数、微分方程等内容。通过对 400 多道典型例题进行分析和求解，揭示了高等数学的解题方法和技巧。每章末尾各有一份目标测试题，作为自我检查之用。我们在编写本书时，力求内容完善，例题丰富，题型全面。相当一部分例题选自全国硕士研究生入学考试数学试题，并在每道试题前面注明了试题的年份及类别。本书侧重于提高解题能力，所提供的解题方法编者都经过反复推敲，希望通过典型例题的求解，启发读者的解题思路，以达到举一反三的效果。

全书共分十一章，其中第一、二章由吴阔华编写，第三章由熊小峰编写，第四、五章由吕新民编写，第六章由匡奕群编写，第七、八章由段五朵编写，第九、十章由董秋仙编写，第十一章由高文明编写；段五朵、吴阔华对全书进行统稿。

本书是高等学校理工科和经济学科等有关专业学生学习高等数学课程的学习指导书，也可作为考研及自学考试的复

习参考资料，并可供大专院校数学教师及其他有关人员作参考。

由于编者水平有限，书中缺点错误在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2003年5月

目　　录

第一章　函数、极限、连续 …… 1

内容提要 …… 1

例题分析 …… 5

目标测试题 …… 31

第二章　导数与微分 …… 34

内容提要 …… 34

例题分析 …… 37

目标测试题 …… 62

第三章　中值定理与导数的应用 …… 65

内容提要 …… 65

例题分析 …… 69

目标测试题 …… 83

第四章　一元函数积分学 …… 85

内容提要 …… 85

例题分析 …… 87

目标测试题 …… 142

第五章　定积分的应用 …… 145

内容提要 …… 145

例题分析 …… 147

目标测试题 …… 161

第六章　向量代数与空间解析几何 …… 163

内容提要 …… 163

例题分析 …… 169

目标测试题 …… 178

第七章　多元函数微分法及其应用 …… 180

内容提要 …… 180

例题分析 …… 188
目标测试题 …… 222
第八章　重积分 …… 225
内容提要 …… 225
例题分析 …… 230
目标测试题 …… 261
第九章　曲线积分与曲面积分 …… 264
内容提要 …… 264
例题分析 …… 270
目标测试题 …… 292
第十章　无穷级数 …… 294
内容提要 …… 294
例题分析 …… 299
目标测试题 …… 328
第十一章　常微分方程 …… 330
内容提要 …… 330
例题分析 …… 336
目标测试题 …… 358
目标测试题参考答案 …… 360

第一章　函数、极限、连续

内容提要

●基本概念

函数的定义　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集．如果当变量 x 在 D 上任意取定一个数值时，变量 y 按照一定法则总有确定的数值与它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$．数集 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量．记号 f 表示从变量 x 到变量 y 的对应关系．

单调性　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义．(ⅰ) 若对任意 $x,y\in I$，当 $x<y$ 时恒有 $f(x)\leqslant f(y)$（或恒有 $f(x)\geqslant f(y)$），则称 $f(x)$ 为在区间 I 上单调增加（或单调减少）的函数．(ⅱ) 若对任意 $x,y\in I$，当 $x<y$ 时恒有 $f(x)<f(y)$（或恒有 $f(x)>f(y)$），则称 $f(x)$ 为在区间 I 上严格单调增加（或严格单调减少）的函数．单调增与单调减函数统称为单调函数．

奇偶性　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称．(ⅰ) 若对任意 $x\in D$ 有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数．(ⅱ) 若对任意 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数．

周期性　设函数 $f(x)$ 以 D 为定义域，若存在正常数 T，使得对任意 $x\in D$，有 $x+T\in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，并称 T 为 $f(x)$ 的一个周期．

有界性　设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义．若存在常数 B，使得对任意 $x\in D$，有 $f(x)\leqslant B$（或对任意 $x\in D$ 有 $f(x)\geqslant B$），则称 $f(x)$ 在 D 上有上界（或有下界），且称 B 为 $f(x)$ 在 D 上的一个上界（或下界）．若存在 $M>0$，使得对任意 $x\in D$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在集合 D 上有界；否则称 $f(x)$ 在集合 D 无界．

复合函数　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 Z_φ．若 $D_f\cap Z_\varphi\neq\phi$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数．

分段函数　如果一个函数在其定义域内，对应于不同的区间段有着不同

的表达形式，则该函数称为分段函数.

初等函数 由常数及基本初等函数 x^a、a^x、$\log_a x$、$\sin x$、$\arcsin x$ 等经有限次四则运算与复合构成并可用一个式子表示的函数.

数列极限定义 若对任意的 $\varepsilon > 0$，均存在正整数 $N(\varepsilon)$，当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$，则称 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

函数极限定义 (ⅰ)若对任意的 $\varepsilon > 0$，均存在着 $X(\varepsilon) > 0$，当 $|x| > X$ 时恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.(ⅱ)若对任意的 $\varepsilon > 0$，均存在着 $\delta(\varepsilon) > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

左、右极限 (ⅰ)若对任给的 $\varepsilon > 0$，总存在着 $\delta(\varepsilon) > 0$，当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$，或称左极限 $f(x_0 - 0) = A$.(ⅱ)若对任给的 $\varepsilon > 0$，总存在着 $\delta(\varepsilon) > 0$，当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$，或称右极限 $f(x_0 + 0) = A$.

无穷小 以 0 为极限的量称为无穷小.

无穷大 在自变量的某一变化过程中，若函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，则称函数 $f(x)$ 为无穷大.(ⅰ)若对任给的 $M > 0$，存在着 $X > 0$，当 $|x| > X$ 时恒有 $|f(x)| > M$，则称 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.(ⅱ)若对任给的 $M > 0$，总存在着 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时恒有 $|f(x)| > M$，则称 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

无穷小的比较 设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \alpha(x) = 0$. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \beta(x) = 0$.

(1) 若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小，记作 $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

(2) 若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小.

(3) 若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C, (C \neq 0)$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小.

(4) 若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等阶无穷小，记作 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

(5) 若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = C(C \neq 0), k > 0$，则称 $\alpha(x)$ 为 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小.

常用的等价无穷小 当 $x \to 0$ 时，$\sin x \sim x$，$\arcsin x \sim x$，$\tan x \sim x$，

$\arctan x \sim x, \ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, (1+x)^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}x.$

函数连续性定义 1 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义.给 x 在x_0 处以增量 Δx,相应地得到函数增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$,若 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$,则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

函数连续性定义 2 设函数 $f(x)$ 满足条件:

(1) $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义;

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在;

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,

则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

函数间断点定义 若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义,且出现如下三种情形之一:

(1) $f(x)$ 在 x_0 处无定义;

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在;

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$,

则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点.

间断点的类型

第一类间断点:$f(x_0 + 0)$、$f(x_0 - 0)$ 均存在,且 x_0 是 $f(x)$ 的间断点.

若 $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$,则 $x = x_0$ 称为 $f(x)$ 的可去间断点.

若 $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$,则 $x = x_0$ 称为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

第二类间断点:$f(x_0 - 0)$、$f(x_0 + 0)$ 中至少有一个不存在.

若 $f(x_0 - 0)$、$f(x_0 + 0)$ 中有一个为 ∞,则 $x = x_0$ 称为无穷间断点.

● 主要定理、公式

定理 1 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$.

定理 2 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$,其中 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

定理 3 (保号性定理)若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A, A > 0$(或 $A < 0$),则存在 $\delta > 0$,当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时,$f(x) > 0$(或 $f(x) < 0$).

定理 4 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,且在 x_0 的某去心邻域内 $f(x) \geqslant 0$(或 $f(x) \leqslant 0$),则 $A \geqslant 0$(或 $A \leqslant 0$).

定理 5 单调有界数列必有极限.

定理 6 (夹逼准则) 设在 x_0 的某去心邻域内恒有 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$,且 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = A$,则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

定理 7 无穷小的运算性质:

(1) 有限个无穷小的代数和仍为无穷小;

(2) 有限个无穷小的乘积仍为无穷小;

(3) 无穷小乘以有界变量仍为无穷小.

定理 8 (无穷小与无穷大的关系定理) 在同一变化趋势下,无穷大的倒数为无穷小;非“0”的无穷小量之倒数为无穷大.

定理 9 极限的运算法则:

设 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = B$,则

(1) $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$;

(2) $\lim f(x) \cdot g(x) = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$;

(3) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B} \quad (B \neq 0)$.

定理 10 初等函数在其定义域的区间内连续.

定理 11 (最大值和最小值定理) 在闭区间上连续的函数必有最大值和最小值.

定理 12 (有界性定理) 在闭区间上连续的函数,在该区间上一定有界.

定理 13 (介值定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,且在这区间的两个端点处取不同的函数值 $f(a) = A$ 及 $f(b) = B$,那末,对于 A 与 B 之间的任意一个数 C,在开区间(a,b)内至少有一点 ξ,使得 $f(\xi) = C$.

定理 14 (零点定理) 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号,那末函数 $f(x)$ 在(a,b)内至少有一个零点,即至少有一点 $\xi \in (a,b)$ 使 $f(\xi) = 0$.

重要公式

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

该极限的特点是:

(1) $\dfrac{0}{0}$ 型未定式;

(2) 求极限的函数形为$\dfrac{\sin\square}{\square}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$、$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$.

该极限的特点是:

(1)1^{∞} 型未定式;

(2) 求极限的函数形为$(1+\square)^{\frac{1}{\square}}$.

例题分析

例 1 求函数 $f(x)=\sqrt{-3x^2+7x-2}+\ln\sin\frac{\pi}{x}$ 的定义域.

解 为使$\sqrt{-3x^2+7x-2}$有意义,须$-3x^2+7x-2\geqslant 0$,即

$$\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 2.$$

为使 $\ln\sin\frac{\pi}{x}$ 有意义,须 $\sin\frac{\pi}{x}>0$,即

$$2k\pi<\frac{\pi}{x}<(2k+1)\pi\quad(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

当 $k=0$ 时,$0<\frac{1}{x}<1$,即 $x>1$;

当 $k\neq 0$ 时,$\frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k}\quad(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

因此,必须满足

$$\begin{cases}\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 2,\\ x>1\end{cases}\text{或}\begin{cases}\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 2,\\ \frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k}\quad(k=\pm 1,\pm 2,\cdots).\end{cases}$$

故所求定义域为$(\frac{1}{3},\frac{1}{2})\cup(1,2]$.

例 2 设 $f(x)=\ln(3-x)+\frac{1}{\sqrt{49-x^2}}$,求 $g(x)=f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域($a>0$).

解 当$3-x>0$且$49-x^2>0$时,$f(x)$有意义.即 $f(x)$ 的定义域为$(-7,3)$.

为使 $g(x)$ 有意义，x 须满足 $\begin{cases} -7 < x + a < 3, \\ -7 < x - a < 3. \end{cases}$

即 $x \in (-7 - a, 3 - a)$ 且 $x \in (-7 + a, 3 + a)$.

由 $a > 0$ 知，当 $-7 + a < 3 - a$，即 $0 < a < 5$ 时，$g(x)$ 的定义域为$(-7 + a, 3 - a)$；当 $-7 + a \geqslant 3 - a$，即 $a \geqslant 5$ 时，$g(x)$ 无定义.

例 3 设 $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$，求 $f(x + 1)$，$f(\dfrac{1}{x})$.

解 $f(x + 1) = \dfrac{1 - (x + 1)}{1 + (x + 1)} = \dfrac{-x}{x + 2}$，$x \neq -2$.

$$f(\frac{1}{x}) = \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{x - 1}{x + 1}, x \neq -1 \text{ 且 } x \neq 0.$$

例 4 设 $f(\dfrac{1}{x}) = x + \sqrt{1 + x^2} \quad (x \neq 0)$，求 $f(x)$.

解 令 $t = \dfrac{1}{x}$，则 $x = \dfrac{1}{t}$.

$$f(t) = \frac{1}{t} + \sqrt{1 + (\frac{1}{t})^2} = \frac{1}{t} + \frac{\sqrt{1 + t^2}}{|t|},$$

所以
$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|}, x \neq 0.$$

例 5 设 $f(x) + f(\dfrac{x - 1}{x}) = 2x$，其中 $x \neq 0$，$x \neq 1$，求 $f(x)$.

解 令 $t = \dfrac{x - 1}{x}$，则 $x = \dfrac{1}{1 - t}$. 将 $x = \dfrac{1}{1 - t}$ 代入原方程得：

$$f(\frac{1}{1 - t}) + f(t) = \frac{2}{1 - t},$$

即
$$f(x) + f(\frac{1}{1 - x}) = \frac{2}{1 - x}. \tag{1}$$

再令 $\dfrac{1}{1 - x} = \dfrac{u - 1}{u}$，即 $x = \dfrac{1}{1 - u}$，代入(1) 式得：

$$f(\frac{1}{1 - u}) + f(\frac{u - 1}{u}) = \frac{2(u - 1)}{u},$$

即 $$f(\frac{1}{1-x})+f(\frac{x-1}{x})=\frac{2(x-1)}{x}. \tag{2}$$

由原方程、(1) 式、(2) 式得:

$$f(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}-1.$$

例 6 (1988. Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ) 已知 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$, 求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

解 由 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$, 得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$.

由 $$\ln(1-x)\geqslant 0, \text{得 } x\leqslant 0,$$

所以 $$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}, x\leqslant 0.$$

例 7 设 $f(x)$ 对一切实数 x, y 满足等式 $f(x+y)=f(x)f(y)$, 且 $f(0)\neq 0$, $f(1)=a$. 证明:

(1) $f(0)=1$;

(2) 对一切自然数 n, 有 $f(n)=a^n$.

证 (1) 令 $x=y=0$, 则 $f(0)=[f(0)]^2$, 因 $f(0)\neq 0$, 故

$$f(0)=1.$$

(2) 用第一数学归纳法证明.

① 当 $n=1$ 时, $f(1)=a=a^1$, 等式成立;

② 设当 $n=k$ 时等式成立, 即 $f(k)=a^k$. 则当 $n=k+1$ 时,

$$f(k+1)=f(k)f(1)=a^k\cdot a=a^{k+1},$$

即当 $n=k+1$ 时等式也成立.

由第一数学归纳法知, 对一切自然数 n, 均有 $f(n)=a^n$.

例 8 研究下列函数的有界性:

(1) $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$; (2) $g(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$.

解 (1) 显然 $f(x)>0$, 且 $1+x^2\geqslant 1$.

又 $$1+x^2\leqslant(1+x^2)^2\leqslant(1+x^2)^2+(1-x^2)^2=2(1+x^4).$$

所以 $$0<\frac{1+x^2}{1+x^4}\leqslant 2.$$

故 $f(x)$ 在其定义域上有界.

(2) 因为 $1-2|x|+x^2\geqslant 0$,所以 $\dfrac{2|x|}{1+x^2}\leqslant 1$ 即 $\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}$.
故 $g(x)$ 在其定义域上有界.

例 9 证明:$f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 在$[0,+\infty)$上是单调增加的,并由此证明不等式

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

证 任给 x_1 及 x_2 且满足 $0\leqslant x_1<x_2<+\infty$.因为

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2}{1+x_2}-\frac{x_1}{1+x_1}=\frac{x_2-x_1}{(1+x_1)(1+x_2)}>0,$$

所以
$$f(x_2)>f(x_1).$$
即 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上是单调增加的.

取 $x_1=|a+b|$,$x_2=|a|+|b|$,显然 $0\leqslant x_1\leqslant x_2$,从而 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,仅当 $x_1=x_2$ 时等号成立.

因此
$$\begin{aligned}\frac{|a+b|}{1+|a+b|}&\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\\&=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\\&\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.\end{aligned}$$

例 10 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$, $-1<x<1$;

(2) $g(x)=(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x$.

解 (1)
$$\begin{aligned}f(-x)&=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\ln\frac{1+x}{1-x}\\&=\frac{1-e^x}{1+e^x}\left(-\ln\frac{1-x}{1+x}\right)\\&=\frac{e^x-1}{e^x+1}\ln\frac{1-x}{1+x}=f(x),\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 是偶函数.

$$\begin{aligned}(2)g(-x) &= (2+\sqrt{3})^{-x}+(2-\sqrt{3})^{-x}\\ &= \left[\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right]^{x}+\left[\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right]^{x}\\ &= (2-\sqrt{3})^{x}+(2+\sqrt{3})^{x}\\ &= g(x),\end{aligned}$$

所以 $g(x)$ 是偶函数.

例 11 设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}$,其中 a,b,c 为常数,且 $|a|\neq|b|$,证明:$f(x)$ 是奇函数.

证 把所给等式中的 x 换为$\frac{1}{x}$,得

$$af(\frac{1}{x})+bf(x)=cx. \tag{1}$$

若 $a=0$,则 $f(x)=\frac{c}{b}x$,这显然是奇函数.

若 $a\neq 0$,则由(1)式得

$$f(\frac{1}{x})=\frac{1}{a}[cx-bf(x)],$$

将其代入原等式,解得

$$f(x)=\frac{c(\frac{a}{x}-bx)}{a^2-b^2}.$$

因为 $f(-x)=\dfrac{c(-\frac{a}{x}+bx)}{a^2-b^2}=-\dfrac{c(\frac{a}{x}-bx)}{a^2-b^2}=-f(x)$,

所以此时 $f(x)$ 也为奇函数.

例 12 若 $f(x)$ 对其定义域上的一切 x,恒有

$$f(x)=f(2a-x),$$

则称 $f(x)$ 对称于 $x=a$. 证明:若 $f(x)$ 对称于 $x=a$ 及 $x=b$ $(a<b)$,则 $f(x)$ 是以 $T=2(b-a)$ 为周期的周期函数.

证 由于 $f(x)$ 对称于 $x=a$ 及 $x=b$,故有

$$f(x) = f(2a - x), \tag{1}$$
$$f(x) = f(2b - x). \tag{2}$$
在(2)式中,把 x 换为 $2a - x$,得
$$f(2a - x) = f(x + 2(b - a)).$$
再将上式代入(1)式即有
$$f(x) = f(x + 2(b - a)).$$
所以 $f(x)$ 以 $T = 2(b - a)$ 为周期.

例 13 设 $f(x)$ 定义于 $(-\infty, +\infty)$,且存在正数 k 和 T,使 $f(x + T) = kf(x)$ 对一切 x 都成立.证明:存在正数 a 及以 T 为周期的函数 $\varphi(x)$,使 $f(x) = a^x\varphi(x)$.

证 对任意的 $a > 0$,有 $a^x > 0$,$\dfrac{f(x)}{a^x}$ 有意义.

令
$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{a^x},$$
则
$$\varphi(x + T) = \frac{f(x + T)}{a^{x+T}} = \frac{kf(x)}{a^x \cdot a^T} = \frac{k}{a^T}\varphi(x).$$
取 $a = k^{\frac{1}{T}}$.有 $\varphi(x + T) = \varphi(x)$,从而 $f(x) = a^x\varphi(x)$,命题得证.

例 14 求函数 $y = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$ 的反函数,并求出反函数的定义域.

解 由 $y = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$ 解得 $e^x = \dfrac{y}{1 - y}$,即 $x = \ln\dfrac{y}{1 - y}$,故所求反函数为 $y = \ln\dfrac{x}{1 - x}$.

再由 $\dfrac{x}{1 - x} > 0$,得 $0 < x < 1$,故反函数 $y = \ln\dfrac{x}{1 - x}$ 的定义域为 $(0,1)$.

例 15 (1992. V) 已知 $f(x) = \sin x$,$f[\varphi(x)] = 1 - x^2$,求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

解 因为 $f(x) = \sin x$,所以 $f[\varphi(x)] = \sin\varphi(x)$ 又因为 $f[\varphi(x)] = 1 - x^2$,所以 $\sin\varphi(x) = 1 - x^2$.因此
$$\varphi(x) = \arcsin(1 - x^2).$$