Nonlinear Partial Differential Equations

非線性偏微分方程

解的漸近行為與自我相似解

儀我美一、儀我美保、Jürgen Saal 原著
林琦焜 譯者

國立交通大學出版社

非線性偏微分方程
—解的漸近行為與自我相似解—

Mi-Ho Giga（儀我美保）、
Yoshikazu Giga（儀我美一）、Jürgen Saal

April 12, 2009

林琦焜

~~January, 2013~~

國家圖書館出版品預行編目 (CIP) 資料

非線性偏微分方程：解的漸近行為與自我相似解 / 儀我美保 (Mi-Ho Giga), 儀我美一 (Yoshikazu Giga), Jurgen Saal 原著；林琦焜譯 . -- 初版 . -- 新竹市：交大出版社，民 102.03
　面；　公分
譯　自：Nonlinear partial differential equations : asymptotic behavior of solutions and self-similar solutions

ISBN 978-986-6301-55-1(平裝)

1. 微分方程

314.22　　102003767

非線性偏微分方程
解的漸近行為與自我相似解

譯　　者：林琦焜
原著名稱：Nonlinear Partial Differential Equations
原　　著：儀我美一、儀我美保、Jürgen Saal
出 版 者：國立交通大學出版社
發 行 人：吳妍華
社　　長：林進燈
行政編輯：程惠芳
封面設計：Allen Fang
地　　址：新竹市大學路 1001 號
讀者服務：03-5736308、03-5131542
（周一至周五上午 8:30 至下午 5:00）
傳　　眞：03-5728302
網　　址：http://press.nctu.edu.tw
e-mail：press@cc.nctu.edu.tw
出版日期：102 年 3 月初版一刷
定　　價：360 元
ISBN：9789866301551
GPN：1010200472

展售門市查詢：國立交通大學出版社 http://press.nctu.edu.tw
或洽政府出版品集中展售門市：
國家書店（台北市松江路 209 號 1 樓）
網址：http://www.govbooks.com.tw
電話：02-25180207
五南文化廣場台中總店（台中市中山路 6 號）
網址：http://www.wunanbooks.com.tw
電話：04-22260330

Translation from the English language edition: "Nonlinear Partial Differential Equations" by M-H. Giga, Y. Giga & J. Saal (edition: 1; year of publication:2010); ISBN 978-0-8176-4173-3.

謹以我們最深摯的讚賞
纪念宫川哲郎（*Tetsuro Miyakawa*）教授

譯者序

自 1992 年回台灣在大學任教之後，第一次參加國際學術會議是 1995 年 6 月應北海道大學儀我美一（Yoshikazu Giga）教授（目前任教於東京大學）與小澤徹（Tohru Ozawa）教授（目前任教於早稻田大學）的邀請前往日本札幌（Sapporo）的北海道大學參加“Nonlinear Wave”的偏微分方程國際會議。位於札幌市中心的北海道大學一進門左邊就是美麗的湖泊，再加上典雅的建築，讓人頓時由繁忙的都市沉澱到大學的寧靜生活中，大學內連洗手間都乾淨的令人留連忘返，這是我對日本的第一個印象（完全不同於 KMT 洗腦教育下的日本）。

北海道大學在 Giga、Ozawa、.... 等人的努力經營之下，使得偏微分方程的研究在日本與東京大學及京都大學齊名，而且由於平均年齡較爲年輕，所以更有朝氣與活力。Giga 教授儼然是日本偏微分方程青壯派的代表人物。由於研究的領域接近，我自然與他們兩人建立起友誼並不時邀請他們前來臺灣訪問。

2000 年我應西田孝明（Takaaki Nishida）教授之邀第二次訪問京都大學。一如往常到大學我最喜歡的是逛書店。在台灣逛書店的經驗是在數學書前面，通常是我孤獨一人。然而京都大學給我的經驗卻完全不一樣，而這些看數學書的同學不盡然是數學系的學生。另外，則是日文的數學書特別多，竟然還有《音樂與數學》、《醫學與數學》這類的書。在書架上其中一本引起我注意的是《非線形偏微分方程》，正是 Giga 教授的新作。粗略流覽之後，雖然是日文書，但大部份是數學方程式，再加上日文有許

多漢字，上下文稍微猜測，應該不難理解內容。這本書主要是談自相似解（self-similar solution）其中特別強調尺度伸縮（scaling）的概念，這是我個人最感興趣的主題，也是非線性偏微分方程研究的重要方法。所以，不假思索就購買了這本書以先睹爲快。後來這本書就一直是我教學與研究的重要參考書籍。

由於對整本書的內容已有相當把握，因此興起翻譯的念頭。在英文版尚未出來之前，我還試圖找留日的梅茗教授（現任教加拿大 McGill 大學與 Champlain College）一起將日文翻成中文。之後我與 Giga 教授連繫，他非常樂意能將這本專著推介給中文的讀者，所以在英文版出版之前，就將原稿給我。因爲已經有英文版，而且考慮到整本書前後語句之連貫。另外這段時間梅教授正忙著整理新家，不好意思讓他分心，所以我就決定單獨完成這本書的翻譯。

在翻譯過程中最大的受益者是我自己，這段時間，我把這本書精讀了「N」次，並修正了原書幾處打字錯誤，例如，§3.3.2 KdV 方程的 scaling，還有 §2.8 的方程編序應從 (2.17) 開始。這本書屬於研究用書，對於非線性偏微分方程有興趣的研究生與教師都會有幫助。讀者在閱讀之前應先看一下作者的原序，以明白這本書的宗旨，而不是學到一些技巧而已。

這本譯作的完成，首先要感謝交大應用數學系電腦工程師詹宗智先生的鼎力相助，讓我在短時間內就進入 XeLaTex 的世界，並隨時幫我解決不時出現的問題。其次，在 XeLaTex 技術方面，承蒙中研院數學所林玉端小姐的幫忙，她是這方面的專家。在一個星期之內就解決了我所遇見的難題，沒有她的協助，這本書將無法如期面世，在此致上我最衷心的感謝。中央研究院數學研究所李志豪教授對於我的寫作與研究始終展現極大之興趣與熱忱，並且針對這本書的一些主題，讓我有機會在中研院數學所做詳細的報告，對於他的支持與鼓勵在此特別感謝他。

最後則要感謝愛妻在這段時間的耐心與愛心，並不時叮嚀要我如期交稿。如今完成，我們終於可以在每個假日，參觀台灣的老街，到花東享受台灣的第一道陽光，對自己的國家有更深入的認識，不再是 KMT 教育下「自己土地上的異鄉人」。

林琦焜 (Chi-Kun Lin)

Jan. 2013

序言

本書的目的是提出檢驗擴散型非線性偏微分方程解之行爲的典型方法，例如，藉由自我相似解我們驗證了這類方程。我們對於描述各式各樣現象的方程特別有興趣，例如，Navier-Stokes 方程。我們在此所描述的重尺度 (rescaling) 方法也可以詮釋爲重整群法 (renormalization group)，它所展現的是探討非線性偏微分方程解漸近分析的強有力之工具。雖然如此的漸近分析法在不同的跨領域已正式使用，然而，通常缺少嚴格的數學論述，這本專著的意圖就是補平這個隙罅。關於自我相似解之形式漸近分析，我們打算發展一套數學的理論基礎。一個自我相似解粗略地說是一個解經過尺度伸縮變換 (方程式保持不變) 之後仍然維持不變的解，對一些典型的方程式，我們將給出數學的證明: 某些自我相似解會漸近逼近到一大類解的典型行爲。

因爲非線性偏微分方程不僅在數學上，在科技上許多領域也有應用，所以有眾多不同的方式接近這理論 (指非線性偏微分方程)，更且，即使我們的目的只是涵蓋一些典型領域與方法，仍需要許多篇幅的解釋與相應的工具以使得我們的處理方式得以自給自足，並爲大部份的讀者所接受。對許多非線性偏微分方程的主題做鳥瞰式的縱覽，並不是我們的意圖。本書的目的是藉由研究典型的例子來解釋一些漸近方法。

從歷史而言; 偏微分方程是微分與積分的概念一建立之後就被引進，其目的有模擬物體運動的動態行爲，例如，琴弦或薄膜。偏微分方程 (簡稱

PDE) 是一個方程式描述未知函數及其導數之函數關係。這裡未知函數是多變數函數: 例如時間與空間變數。如果未知函數只與一個變數有關則方程式稱爲常微分方程 (簡稱 ODE)。這樣與常微分方程比較，由偏微分方程所模擬的問題有更寬廣的多樣性。事實上，不同的偏微分方程被提出來模擬不僅有物理的現象: 例如力學、電磁學、熱力學，也有其他科學與技術領域: 例如，社會科學與財務金融。另一方面偏微分方程不僅描述真實世界現象，在描述數學的對象，例如，微分幾何與複變函數也扮演重要的角色。如果一個偏微分方程關於未知函數及其導數是線性則稱之爲線性偏微分方程。典型的線性偏微分方程有熱傳導方程、Poisson 方程還有電磁學的 Laplace 方程。然而在模擬一些現象時會出現一些關鍵的偏微分方程是非線性的。這一類的偏微分方程就稱之爲非線性偏微分方程。一個典型的例子就是 Navier-Stokes 方程，這是代表流體力學的基本方程式。還有其它極大類型的非線性偏微分方程，到目前爲止似乎不可能用統一的方法來探討基本問題。在數學分析的典型問題包含可解性問題 – 偏微分方程解的存在性 – 在適當的補充條件，例如，初始條件或邊界條件。對於線性偏微分方程此類問題多少可以較爲統一的方法來討論。然而對於非線性偏微分方程這似乎是無望的，因爲每一個非線性偏微分方程都有其特殊的結構。所以，在現階段我們不打算建立一個統一的理論。相反地，我們大多研究一特定類型有相似結構的非線性偏微分方程。（請注意，線性偏微分方程的集合是一個特殊類型的偏微分方程）。即使是根本問題，例如，取決於方程式的可解性，必要的先決條件。從應用的角度看其他問題，如解的輪廓（外貌）和行爲，也非常重要。事實上，在應用領域的研究人員常常通過研究特殊的解來猜測解的行爲。然而，有一種傾向，即數學書籍以嚴格的方式在處理偏微分方程時，通常會耗費過多的篇幅在解的可解性問題，而這通常是難以解釋解的行爲。

這本書的目的是通過討論典型的例子，來嚴格的研究偏微分方程解的行爲，甚至不假設具有泛函分析的知識。爲此，這本書的結構本質上不同於一般數學教科書的架構。在傳統的風格下作者解釋了偏微分方程分析所需的基本與普遍理論，並在這一框架內討論偏微分方程。這是一個聰明且非常有效的辦法以少數頁面來編碼許多數學知識訊息。然而，在這本書中，我們追求的方式並不相同。我們直接研究特殊方程式的解之行爲，而不需有預備的基本理論。相反地，這本書的第二部分我們才討論、分析這些偏微分方程所需的基本工具。我們希望，讀者在研究偏微分方程時將學會處理的工具，例如，微積分不等式。這種比較直接的方式應該給學生研究這些基本工具強烈的學習動機和這些基本工具在應用上的實用性。

手上這本書由兩部分組成。第一部分包括 1、2、3 章。第二部分包括 4、5、6、7 章。在第一部分我們提出一種方法，藉由採用自相似解，來研究非線性擴散型偏微分方程解的行爲。在第一章，作爲兩種方法的初步結果，我們證明了熱傳導方程的解之長時間行爲是漸近自相似的。第一種方法涉及到解的表現公式。這種論證很簡單，然而，對非線性偏微分方程有其限制地適用性。第二種方法將問題取代爲證明一族重尺度解 (rescaled) 收斂之課題。這種論證，然而，卻適用於相當廣泛的問題。

事實上，藉由第二種方法，我們在第二章詳細地分析二維渦度方程（取自 Navier - Stokes 方程）。我們將證明，渦度也就是渦度方程的解，隨著時間趨於無窮大是漸近自相似。此外，倘若總環流量很小，它的行爲是正比於高斯核的行爲（也稱爲高斯渦旋）。我們提出了一個證明是比以往的文獻更加透明的，這是基於改進有運輸項的熱傳導方程的 $L^q - L^1$ 估計（2.3 節）而來。我們也完全證明了（2.5.2 節）藉由給出一族重尺度 (rescaled) 函數的一個估計（這是已知文獻所沒有的）。我們的目的是以盡可能基本的方法以獲得銳利的結果。例如，渦度之導數的估計（2.4.2 節）在這意義下是新的，它們包括 $p = 1$ 和 $p = \infty$ 的情形。該證明是基本的，在某種意義下它不使用複雜的函數空間，也不使用插值空間。

作爲渦度漸近行爲的應用，我們在 2.6 節討論在三維空間 Burgers 渦旋的形成。幾年前，在沒有假設總環流量很小的情形下，收斂到高斯渦旋已被證明。我們在 2.8 節收錄有這個漂亮的結果，這是建立在相對熵理論。爲了使得這本書自成體系，所有關鍵的陳述我們也給出證明（除了 2.5.2 節的引理之外），包括在第二部分所承認渦度方程的唯一可解性以及具有運輸項熱傳導方程的可解性。我們希望讀者在追隨證明時，將學會在第六章所提供關於分析這些個別偏微分方程之微積分不等式的意義。除非在第一、二章已經證明了，幾乎所有引用自第一、二章的不等式，都在本書的第二部分證明。

在第三章，我們首先介紹一個典型的結果是有關多孔介質方程的解之大時間漸近行爲，然而，並沒有給出證明。之後，我們提出一個方法來分析平均曲率流方程的解靠近奇點的漸近行爲。這些方程通常用來模擬相 (phase) 邊界，例如，反相 (antiphase) 如粗糙面邊界之運動。我們證明了關鍵的單調公式對於調和映射流方程和半線性熱方程也是有效的。此外，我們給出了軸對稱曲面的平均曲率流方程的自相似解之唯一性的一個基本的證明（第 3.2.3 節）。最後，作爲非擴散型方程的一個例子，我們提到一個非線性 Schrödinger 方程和廣義 KdV 方程。我們也爲這些方程提出自相似解的一個存在性結果，分別描述大的時間行爲和靠近奇點附近的行爲。

在這裡，我們只是陳述結果，但不給予證明。所以，第三章是幾個不同主題的集合，第二章則是針對一個明顯目標而寫的。

在第二部分我們將引用在第一部分一些重要的泛函分析之敘述給予明確的證明。在第四章，如果給定的初始值是 Dirac delta 分佈，我們證明了熱傳導方程解的衰減估計和唯一性理論。我們回顧了幾個基本的概念，例如具有運輸項的熱傳導方程的基本解，並證明其存在唯一性。爲了讀者的方便，我們也證明了在高維無界區域的分部積分。在第五章，我們給出一個變形的 Ascoli-Arzelà 定理，這是關於一族函數的一個根本緊緻性的結果。這個變形對於函數族定義在非緊緻區域也適用。在第六章，我們證明了幾個重要的不等式。除了奇異積分算子之有界性，我們呈現的證明是立基於熱傳導方程解的估計上。相比於其他現有的教科書，這種做法是相當不尋常的。從這些有趣的應用，我們知道，熱傳導方程解的估計在其他各種場合也很重要，雖然他們比較基本。我們的目的是不給一個最簡短的證明。反而試圖解釋不同的證明。我們在第七章總結有關積分理論和有界線性算子的基本知識。

第六章中的不等式一般對於分析非線性偏微分方程是非常重要的之外，對於這本書沒有討論的偏微分方程也非常重要。在數學分析如何估計各種不同的量往往是最關鍵的。這些不等式反而是出現在實變函數論的教科書上，而不是偏微分方程的教科書。即使這些不等式是經典的結果，我們也給出完整的證明，以使這本書自成體系。我們經常提到在現階段懸而未決的問題 (以斜體表示)，以鼓勵進一步的研究。（事實上，一些在 1999 年出版的日文版中所提出的問題已經解決了。）在第一和第二部分中介紹的方法，通常我們進行的步驟如下：首先，陳述我們想展示的並討論應用，然後給出技術性細節的證明。我們希望讀者能夠以清晰的觀點瞭解爲什麼相應的問題被研究，來閱讀結果與證明，雖然其中有一些看起來只是技術而已。我們也評論到，這本書所探討的主題範圍過於廣泛，以致於無法給出一個完整的參考文獻。因此，我們只想給一些典型的參考文獻。但是在某些章節，我們有“說明和評論”或“研究歷史”，這應有助於讀者找到更多的相關文獻。爲了縮短敘述我們經常在一個特定子章節藉由章節號編碼提到與或引用的定理、命題、引理、系、註解、定義。例如，不是寫“在 §2.2.1 節的定理”，如果不致於產生混淆的話，我們經常寫爲“定理 2.2.1”。

眾所周知，非線性分析對於科學和技術是顯著重要的。作爲非常有吸引力的主題，非線性偏微分方程之分析可以被視爲非線性分析的一個重要次領域。但是，要以嚴格的數學方法了解非線性偏微分方程，往往認爲包括

Lebesgue 積分理論，泛函分析，分佈理論（或廣義函數論），實變函數（實分析），常微分方程理論等廣泛的知識是必要的。當然，如果是熟悉這些科目的人則結果的描述可以被簡化而且它們的處理方式可以在優雅的方式來做統合。（與此相反，在本書所呈現的方式我們試圖不使用這些理論。）然而，有些讀者可能有興趣盡早研究非線性偏微分方程解的性質，（在掌握了這些先決條件之後）。這本書主要是爲這樣的讀者而寫。而規劃的方式是採取使讀者在研究偏微分方程解的行爲之過程中自然地獲得必要的知識和感覺。爲此，一些基本的事實例如積分符號後微分（即積分、微分互換），在第二部分我們有精心的解釋。因此，這需要大量線性偏微分方程的本文（雖然這對於分析非線性偏微分方程也是有用的）。很非線性結構主要在第三章討論。

閱讀第一部分的先決條件只有高維度空間的分部積分。如果有人要完全依邏輯順序閱讀第二部分，則基本的 lebesgue 積分理論是必要的。我們希望，讀者將看到在大一、大二所教的數學理論是如何扮演不同理論的基礎與在偏微分方程中漂亮的應用。

對於熱傳導方程和渦度方程的解在大時間漸近行爲有興趣的讀者，我們建議先閱讀 1.1、2.1、2.2、2.6、2.7.1、2.8 等章節。對於自相似解的各個應用有興趣的讀者，我們建議在閱讀 2.7.3 節和第三章。我們希望這些章節對於數學之外，其他各學科例如，流體力學和工程也是有用的。

作者感謝 Haim Brezis 教授邀請他們寫這本書和他的耐心。

本書是根據前兩個作者於 1999 年在共立出版 ‘非線形偏微分方程’ 的日文書。但這本書不只是單純日文版的翻譯而已。我們擴大和修訂了幾個部分，但結構和精神是與日文版相似的。

作者感謝小澤徹 (Tohru Ozawa) 教授和山崎正夫 (Masao Yamazaki) 教授關於日文版所提出的寶貴意見。
他們也感謝三上俊夫 (Toshio Mikami) 教授和武田正義 (Masayoshi Takeda) 教授在日文版 6.1.5 節具有教育意義之評註的參考文獻。此外，他們感謝內藤尚志 (Hisashi Naito) 教授與內藤由美子 (Yumiko Naito) 女士幫忙翻譯成英文。

作者感謝保教前川 (Yasunori Maekawa) 博士和幸關 (Yukihiro Seki) 博士的幫助他們分別修改了第二章與第三章。他們感謝 Marco Cannone 教授、蔡東虎 (Dongho Chae) 教授、內藤紀 (Yuki Naito) 教授、高喜小川 (Takayoshi Ogawa) 教授、Gieri Simonett 教授、Michael Struwe 教授、

Fred Weissler 教授關於他們有教育意義的評註。最後，作者要感謝所有的同事、學生和日文版的讀者，他們貢獻了有用的提示和評論以促進這本書的成功。

儀我美保 (Mi-Ho Giga)
儀我美一 (Yoshikazu Giga)
Jürgen Saal

April 2009

Contents