封闭形和式初步

及万会　张来萍　杨春艳◎著

Preliminary of closed form

国家行政学院出版社

封闭形和式初步

及万会　张来萍　杨春艳◎著

Preliminary of closed form

国家行政学院出版社

图书在版编目（CIP）数据

封闭形和式初步/及万会，张来萍，杨春艳著.—北京：国家行政学院出版社，2013.8

ISBN 978-7-5150-0926-1

Ⅰ.①封… Ⅱ.①及…②张…③杨… Ⅲ.①和—研究 Ⅳ.①O121.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 203085 号

书　　名	封闭形和式初步
作　　者	及万会　张来萍　杨春艳
责任编辑	刘正刚　马刘艳
出版发行	国家行政学院出版社
	（北京市海淀区长春桥路 6 号　100089）
	（010）68920640　68929037
	http://cbs.nsa.gov.cn
编 辑 部	（010）68928800
经　　销	新华书店
印　　刷	北京天正元印务有限公司
版　　次	2014 年 1 月北京第 1 版
印　　次	2014 年 1 月北京第 1 次印刷
开　　本	710 毫米×1000 毫米　16 开
印　　张	17
字　　数	306 千字
书　　号	ISBN 978-7-5150-0926-1
定　　价	49.00 元

前　言

所谓封闭形和式，就是序列和式$\sum f(n)=F(n)$。和式的结论$F(n)$表达式仅与项数n有关的代数式。

著名的菲波那契（Fibonacci）的通项公式$F(n)$。佩尔（Pell）数列通项$P(n)$，佩尔－卢卡斯（Pell－Lucas）数列通项$C(n)$，切贝雪夫（chebyshev）序列通项$T(n)$与$U(n)$都是用封闭形给出的。雅克．贝努里（J. Bernoulli），牛顿（Newton）和莱布尼兹（Leibniz）发现了一些用封闭形表示的无穷级数。欧拉（Euler）首先证明了黎曼 Zeta 函数$\zeta(2)=\pi^2/6$。其后许多数学专家用各种数学方法与技术讨论研究有限和与无穷和封闭形表示，取得丰硕成果。

封闭形公式简捷明了赏心悦目。寻求函数封闭形和式是许多人研究的对象，也是作者长期研究的问题。我们利用一些数学工具使用多种数学方法得到一些封闭形和式。利用收缩公式给出一些分式有限和式，利用发生函数与复变函数性质给出二阶递推序列带有三角函数的封闭形和式。根据和角与差角的反正切公式，给出分式有限和以及分式级数和式。利用递推关系，给出将正整数1分拆成任意个单位分数之和的计算公式。利用已知级数公式与复变函数性质得到一些对偶三角函数和式与高次幂的三角函数无穷和。利用微分，积分给出组合数倒数级数与系数为组合数倒数的对偶三角函数级数。由简单代数式导出一些组合封闭形和式。利用 Melzak 公式得到一些组合数序列和式。利用形式剩余证明哈代（Hardy）恒等式。根据伽玛白塔函数与组合数的关系给出一些组合数倒数有限和。利用雅科比（jacobi）与萨尔斯胡兹（Saalschutz）求和公式按照一定程序计算出未知组合数和式的封闭形和式。利用二阶矩阵A的n次幂A^n中元素a，b，c，d与矩阵的迹与行列式关系得到一些有趣的组合恒等式。使用库末（kummer）恒等式与二项式定理推导一些有趣的组合恒等式。利用文献已知的4个级数恒等式，用不定积分方法得到一批新的组合数的级数和式，用定积分方法得到系数为组合数倒数的级数计算公式。利用r次单位根的性质和复变函数性质得出组合数多

重分割求和计算公式。利用一个已知级数使用裂项法得出中心型组合数倒数级数,它们的分母含有 1 到 5 个奇因子与组合数乘积表达式,如果对这个级数继续使用裂项法可以得到分母含有 1 到 6 个,1 到 7 个,…,1 到 p 个奇因子的组合数倒数级数,所给出组合数倒数级数的和式是封闭形的。改造一个级数成为非中心型组合数级数,对这个非中心型组合数级数裂项得到非中心型组合数级数,它们的分母含有 1 到 5 个因子,如果对这个级数继续使用列项法可以得到分母含有 1 到 6 个,1 到 7 个,…,1 到 p 个因子的组合数级,所给出二项式系数级数的和式是封闭形的。利用级数的和函数理论给出一些非中心型组合数倒数级数,选择一些非中心型组合数倒数级数,对它们进行裂项运算构造出一批新的分母含有 1 到 5 个奇因子的非中心型组合数的倒数级数,如果继续使用裂项法可以得到分母含有 1 到 6 个,1 到 7 个,…,1 到 p 个奇因子的非中心型组合数倒数级数,所给出组合数倒数级数的和式是封闭形的。

封闭形和式在数学各个领域广泛存在。在讨论研究有限和与无穷和的封闭形和式方面我们获得一些初步结果。使用数学工具和数学方法比较初等。本书为深入讨论研究封闭形和式起引玉之砖作用,是研究封闭形和式的参考书。

本书获得银川能源学院科研基金资助

及万会　张来萍　杨春艳　2013 年 6 月于银川能源学院

目　录
CONTENTS

第一章

序列封闭形和式

本章第 1 节利用收缩公式讨论各种形式序列和式计算。第 2,3 节利用发生函数方法与复变函数方法得到含有三角函数的 Lucas 数与正负相间 Lucas 数封闭形和式明显表达式。第 4,5 节利用发生函数方法得到一类含有等比数列的 Chebyshev 多项式封闭形和式,双曲函数与三角函数积的和式,给出双曲函数与三角函数积的和式封闭形计算公式。第 6,7 节利用和角与差角反正切公式选取适当函数 $F(n)$ 利用收缩公式得出反正切封闭形和式,利用微分法给出分式的有限和封闭形和式,再用极限法得到分式无限和式。第 8 节讨论单位分数问题,给出正整数 1 能分拆成任意个单位分数之和的几种方法。第 9 节研究了一类反正切丢番图方程整数解问题。

第一节　利用收缩公式计算代数式封闭形和式

如何将序列通项分拆成连续函数和或差,有如下收缩公式:

收缩公式 1 设 $u_k=f(k)-f(k+1)$,则$\sum\limits_{k=a}^{n}u_k=f(a)-f(n+1)$,$n\geq a$;

收缩公式 2 设 $u_k=f(k)+f(k+1)$,

则$\sum\limits_{k=a}^{n}(-1)^k u_k=(-1)^a f(a)-(-1)^{n+1}f(n+1)$,$n\geq a$;

一　直接裂项法

$$(1)\sum_{k=a}^{n-1}\frac{r^k}{(1+r^kx)(1+r^{k+1}x)}=\frac{1}{x(r-1)}\left(\frac{1}{1+r^ax}-\frac{1}{1+r^nx}\right)$$

从通项表达式如何求得收缩公式 u_k 是得到结果的关键。可用分式化成部分分式的方法。

设$\dfrac{r^k}{(1+r^kx)(1+r^{k+1}x)}=\dfrac{A}{1+r^kx}+\dfrac{B}{1+r^{k+1}x}=\dfrac{(A+B)+(Ar^{k+1}x+Br^kx)}{(1+r^kx)(1+r^{k+1}x)}$,两端同次幂系数相等,$A+B=0,(Ar+B)xr^k=r^k,A+B=0,(Ar+B)x=1;A=\dfrac{1}{x(r-1)}$,$B=-\dfrac{1}{x(r-1)}$;于是,得到 $u_k=\dfrac{1}{x(r-1)}(\dfrac{1}{1+r^kx}-\dfrac{1}{1+r^{k+1}x})$。

(2)$\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{r^{k-1}}{(1-r^k)(1-r^{k+1})}=\dfrac{1}{r(1-r)}(\dfrac{1}{1-r}-\dfrac{1}{1-r^n})$

可得到收缩公式 $u_k=\dfrac{1}{r(1-r)}(\dfrac{1}{1-r^k}-\dfrac{1}{1-r^{k+1}})$。

(3)$\sum\limits_{k=a}^{n-1}\dfrac{1}{(r+kx)[r+(k+1)x]}=\dfrac{1}{x}(\dfrac{1}{r+ax}-\dfrac{1}{r+nx})$

可得到收缩公式 $u_k=\dfrac{1}{x}(\dfrac{1}{r+kx}-\dfrac{1}{r+(k+1)x})$。

(4)$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(r+kx)(r+(k+1)x)}=\dfrac{n}{(r+x)(r+(n+1)x)}$

可得到收缩公式 $u_k=\dfrac{1}{x}[\dfrac{1}{r+kx}-\dfrac{1}{r+(k+1)x}]$。

(5)$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(k+a)(k+a+1)}=\dfrac{n}{(a+1)(n+a+1)}$

$\dfrac{1}{(k+a)(k+a+1)}=\dfrac{A}{k+a}+\dfrac{B}{k+a+1}$,得到 $A=1,B=-1$,从而

$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(k+a)(k+a+1)}=\sum\limits_{k=1}^{n}(\dfrac{1}{k+a}-\dfrac{1}{k+a+1})$

$=\dfrac{1}{1+a}-\dfrac{1}{n+a+1}=\dfrac{n}{(a+1)(n+a+1)}$。

同法可得

(6)$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=1-\dfrac{1}{n+1}$;

(7)$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}]$;

(8)$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)})$。

(9)求下列级数和式 1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$; 2)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$;

3)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$; 4)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}$; 5)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n(n+1)})}$。

解　这类问题根据表达式特点,对通项进行裂项

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2-n^n}{n^2(n+1)^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}=1$。

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^2-(2n-1)^2}{8(2n-1)^2(2n+1)^2}$

$=\frac{1}{8}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{1}{8}$。

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{(n+1)(n-1)}}{\sqrt{n(n+1)}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}-\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}=1$。

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}-\frac{1}{(2n+1)}=\frac{1}{2}$。

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n(n+1)})}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1-n)(\sqrt{n(n+1)})}$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=1$。

(10)求下列级数和式1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdot(n+m)}$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{(a_1+1)(a_2+1)\cdot\cdots\cdot(a_n+1)}$

解　1)分子分母乘以 m, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdot(n+m)}=$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{m}{mn(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdot(n+m)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+m)-n}{mn(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdot(n+m)}=$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left[\frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdot(n+m-1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdot(n+m)}\right]$

$=\frac{1}{m\cdot n!}$;

2)分子加 1 减 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(a_1+1)(a_2+1)\cdot\cdots\cdot(a_n+1)}=$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(a_n+1)-1}{(a_1+1)(a_2+1)\cdot\cdots\cdot(a_n+1)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\cdot\cdots\cdot(a_{n-1}+1)}-$

$\frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\cdot\cdots\cdot(a_n+1)}=(1-\frac{1}{a_1+1})+(\frac{1}{a_1+1}-\frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)})+\cdots$

$+(\frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\cdot\cdots\cdot(a_{n-1}+1)}-\frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\cdot\cdots\cdot(a_n+1)})$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{(a_1+1)(a_2+1)\cdot\cdots\cdot(a_n+1)}$

$=1-\dfrac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\cdot\cdots\cdot(a_n+1)}$

(11)证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1a_2\cdots a_{k-1}}{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}=\frac{1}{x}-\frac{a_1a_2\cdots a_n}{x(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)}$$

注意到右端为 A_0-A_n,通项应为某两项之差即 $A_{k-1}-A_k$,

我们找到 $\dfrac{a_1a_2\cdots a_{k-1}}{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}=\dfrac{a_1a_2\cdots a_{k-1}}{x(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_{k-1})}-\dfrac{a_1a_2\cdots a_k}{x(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}=A_{k-1}-A_k$,于是

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_1a_2\cdots a_{k-1}}{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}=\sum_{k=1}^{n}(A_{k-1}-A_k)=A_0-A_n=$$

$$\frac{1}{x}-\frac{a_1a_2\cdots a_n}{x(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)}$$

令 $x=n^2,a_k=-k^2$,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}[(k-1)!]^2}{(n^2-1)(n^2-2)\cdots(n^2-k^2)}=\frac{1}{n^2}-\frac{(-1)^{n-1}[(n-1)!]^2}{n^2(n^2-1)\cdots[n^2-(n-1)^2]}$$

$$=\frac{1}{n^2}-\frac{(-1)^{n-1}[(n-1)!]^2}{n^2(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)\cdots(2n-2)(2)(2n-1)(1)}$$

$$=\frac{1}{n^2}-\frac{(-1)^{n-1}[(n-1)!]^2}{n^2(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)\cdots(2n-2)(2)(2n-1)(1)}$$

$$=\frac{1}{n^2}-\frac{n\cdot 2n(-1)^{n-1}[(n-1)!]^2}{n^2\cdot n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)\cdots(2n-2)(2)(2n-1)2n(1)}$$

$$=\frac{1}{n^2}-\frac{2(-1)^{n-1}[n!]^2}{n^2(2n)!}=\frac{1}{n^2}-\frac{2(-1)^{n-1}}{n^2\binom{2n}{n}}。$$

二　添加上一个元素逐步收缩得到结果

(1) $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{2^kx^{2^k}}{1+x^{2^k}}=\dfrac{x}{1-x}-\dfrac{2^{n+1}x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^{n+1}}}$;

左端加元素 $-\dfrac{x}{1-x}$,于是 $-\dfrac{x}{1-x}+\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{2^kx^{2^k}}{1+x^{2^k}}=\left(-\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{x}{1+x}\right)+\dfrac{2x^2}{1+x^2}+\dfrac{2^2x^4}{1+x^4}+\dfrac{2^3x^{2^3}}{1+x^{2^3}}+\cdots=\left(-\dfrac{2x^2}{1-x^2}+\dfrac{2x^2}{1+x^2}\right)+\dfrac{2^2x^4}{1+x^4}+\dfrac{2^3x^{2^3}}{1+x^{2^3}}+\cdots$

$$=\left(-\frac{2x^2}{1-x^2}+\frac{2x^2}{1+x^2}\right)+\frac{2^2x^4}{1+x^4}+\frac{2^3x^{2^3}}{1+x^{2^3}}+\cdots$$

$$=\left(\frac{2^2x^4}{1-x^4}+\frac{2^2x^4}{1+x^4}\right)+\frac{2^3x^{2^3}}{1+x^{2^3}}+\cdots=\left(-\frac{2^3x^{2^3}}{1-x^{2^3}}+\frac{2^3x^{2^3}}{1+x^{2^3}}\right)\cdots=\cdots\cdots=-\frac{2^{n+1}x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^{n+1}}},$$

所以 $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{2^kx^{2^k}}{1+x^{2^k}}=\frac{x}{1-x}-\frac{2^{n+1}x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^{n+1}}}$,从而 $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{2^kx^{2^k}}{1+x^{2^k}}=\frac{x}{1-x}$

(2) $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{2^k}{1+x^{2^k}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^n}{1-x^{2^{n+1}}},x\neq1$

$$\frac{1}{1-x}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^k}{1+x^{2^k}}=\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)+\frac{2}{1+x^2}+\frac{2^2}{1+x^{2^2}}+\frac{2^3}{1+x^{2^3}}+\frac{2^4}{1+x^{2^4}}+\cdots\cdots$$

$$=\left(\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}\right)+\frac{2^2}{1+x^{2^2}}+\frac{2^3}{1+x^{2^3}}+\frac{2^4}{1+x^{2^4}}+\cdots\cdots$$

$$=\left(\frac{2^2}{1-x^{2^2}}+\frac{2^2}{1+x^{2^2}}\right)+\frac{2^3}{1+x^{2^3}}+\frac{2^4}{1+x^{2^4}}+\cdots\cdots$$

$$=\left(\frac{2^3}{1-x^{2^3}}+\frac{2^3}{1+x^{2^3}}\right)+\frac{2^4}{1+x^{2^4}}+\cdots\cdots=\left(\frac{2^4}{1-x^{2^4}}+\frac{2^4}{1+x^{2^4}}\right)+\cdots\cdots=\frac{2^5}{1-x^{2^5}}+\cdots\cdots$$

$=\cdots\cdots\frac{2^n}{1-x^{2^{n+1}}}$,所以 $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{2^k}{1+x^{2k}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^n}{1-x^{2^{n+1}}}$,从而 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{1+x^{2^k}}=\frac{1}{x-1}$

(3) $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{2^{2k}x^{2^k}}{(1+x^{2^k})}=\frac{x}{(x-1)^2}-\frac{2^{2n}x^{2^n}}{(1-x^{2^n})^2}$

$$-\frac{x}{(1-x)^2}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^{2k}x^{2^k}}{(1+x^{2^k})^2}=-\frac{2^{2n}x^{2^n}}{(1-x^{2^n})^2};$$

所以 $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{2^{2k}x^{2^k}}{(1+x^{2k})^2}=\frac{x}{(1-x)^2}-\frac{2^{2n}x^{2^n}}{(1-x^{2^n})^2};$

(4) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{2^kx^{2^k}-2^{k+1}}{x^{2^{k+1}}-x^{2^k}+1}=\frac{x+2}{x^2+x+1},|x|>1,$

$$-\frac{x+2}{x^2+x+1}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^kx^{2^k}-2^{k+1}}{x^{2^{k+1}}-x^{2k}+1}=0$$

所以 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{2^kx^{2^k}-2^{k+1}}{x^{2^{k+1}}-x^{2^k}+1}=\frac{x+2}{x^2+x+1}$。

三　利用恒等式计算和式封闭形和式

$\frac{1}{\binom{n+1}{k}}+\frac{1}{\binom{n+1}{k+1}}=\frac{n+2}{n+1}\frac{1}{\binom{n}{k}}$　(p), $\frac{1}{\binom{2n+1}{k}}+\frac{1}{\binom{2n+1}{k+1}}=\frac{2n+2}{2n+1}\frac{1}{\binom{2n}{k}}$　(Q)

(1) $\sum\limits_{k=1}^{2n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{\binom{2n}{k}}=\frac{1}{n+1};$

解 由(Q)式,收缩公式 $u_k=\frac{1}{\binom{2n}{k}}=\frac{2n+1}{2n+2}\left(\frac{1}{\binom{2n+1}{k}}+\frac{1}{\binom{2n+1}{k+1}}\right)$,

于是 $\sum_{k=01}^{2n-1}(-1)^{k-1}u_k=\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{\binom{2n}{k}}=\frac{2n+1}{2n+2}\left(\frac{1}{\binom{2n+1}{1}}-\frac{(-1)^{2n+1}}{\binom{2n+1}{2n}}\right)$

$=\frac{2n+1}{2n+2}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{n+1}$

(2) $\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(-1)^{k-1}k}{\binom{2n}{k}}=\frac{n}{n+1}$

解 收缩公式 $u_k=\frac{2n+1}{2n+2}\left[\frac{k}{\binom{2n+1}{k}}+\frac{k}{\binom{2n+1}{k+1}}\right]$

$$\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(-1)^{k-1}k}{\binom{2n}{k}}=\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}u_k=\frac{2n+1}{2n+2}\left[\frac{(-1)^{1-1}}{\binom{2n+1}{1}}-\frac{(-1)^{2n-1}(2n-1)}{\binom{2n+1}{2n}}\right]$$

$$=\frac{2n+1}{2n+2}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{2n-1}{2n+1}\right)=\frac{n}{n+1}$$

(3) $\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(-1)^{k-1}(n-k)}{\binom{2n}{k}}=0$

解 收缩公式 $u_k=\frac{2n+1}{2n+2}\left[\frac{n-k}{\binom{2n+1}{k}}+\frac{n-k}{\binom{2n+1}{k+1}}\right]$

$$\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}u_k=\frac{2n+1}{2n+2}\left(\frac{n-1}{\binom{2n+1}{1}}-(-1)^{2n-1}\frac{n-(2n-1)}{\binom{2n+1}{2n}}\right)$$

$$=\frac{2n+1}{2n+2}\left[\frac{n-1}{\binom{2n+1}{1}}+\frac{-n+1}{\binom{2n+1}{2n}}\right]=0$$

(4) $\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(-1)^{k-1}(n+k)}{\binom{2n}{k}}=\frac{2n}{n+1}$

解 收缩公式 $u_k=\frac{2n+1}{2n+2}\left[\frac{n+k}{\binom{2n+1}{k}}+\frac{n+k}{\binom{2n+1}{k+1}}\right]$

$$\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(-1)^{k-1}(n+k)}{\binom{2n}{k}}=\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}u_k=\frac{2n+1}{2n+2}\left[\frac{n+1}{\binom{2n+1}{1}}-(-1)^{2n-1}\frac{n+(2n-1)}{\binom{2n+1}{2n}}\right]$$

$$=\frac{2n+1}{2n+2}\left[\frac{(n+1)}{2n+1}+(-1)^{2n}\frac{3n-1}{2n+1}\right]=\frac{2n+1}{2n+2}\left(\frac{4n}{2n+1}=\frac{2n}{n+1}\right.$$

5) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}k}{\binom{2n}{k}}=\frac{1}{2(n+1)}+\frac{(-1)^{n-1}n}{2\binom{2n}{n}}$

解 收缩公式 $u_k=\frac{2n+1}{2n+2}\left[\frac{k}{\binom{2n+1}{k}}+\frac{k}{\binom{2n+1}{k+1}}\right]$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{\binom{2n}{k}}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}u_k=\frac{2n+1}{2n+2}\left[\frac{1}{\binom{2n+1}{1}}-(-1)^{n-1}\frac{n}{\binom{2n+1}{n+1}}\right]$$

$$=\frac{2n+1}{2n+2}\left[\frac{1}{2n+1}-\frac{(-1)^{n-1}}{\binom{2n+1}{n+1}}\right]=\frac{1}{2(n+1)}+\frac{(-1)^{n}n}{2\binom{2n}{n}}。$$

第二节 Lucas 序列封闭形和式

熟知 *Lucas* 整数序列[1]:$U_n=(a^n-b^n)/(a-b)$,$U_1=1$,$U_2=p$,

$$V_n=a^n+b^n,V_0=2,V_1=p$$

其中 a,b 是二次方程 $x^2-px+q=0$ 的两个根($\Delta=p^2+4q>0$)$gcd(p,q)=1$,

U_n,V_n 称为 *Lucas* 数,递推公式为:$U_{n+2}=pU_{n+1}+qU_n$;$V_{n+2}=pV_{n+1}+qV_n$

我们利用发生函数方法首先得到一类含有等比数列的 *Lucas* 数封闭形和式计算公式。其次利用复数隶莫弗(*De. Moivre*)乘法公式得到含有三角函数的 *Lucas* 数封闭形和式明显表达式。若无特别说明,文中字母表示正整数。

定理 1 设 U_n,V_n 是 *Lucas* 数,复数 $d\neq a^{-t},b^{-t}$,则一类 *Lucas* 数和式:

$$1)\sum_{k=0}^{n}U_{r+tk}d^k=\frac{1}{(-q)^t d^2-dV_t+1}[(-q)^t d^{n+2}U_{r+tn}-d^{n+1}U_{r+t+tn}-(-q)^t dU_{r-t}+U_r] \tag{1}$$

$$2)\sum_{k=0}^{n}V_{r+tk}d^k=\frac{1}{(-q)^t d^2-dV_t+1}[(-q)^t d^{n+2}V_{r+tn}-d^{n+1}V_{r+t+tn}-(-q)^t dV_{r-t}+V_r] \tag{2}$$

证明 由 $u_n=(a^n-b^n)/(a-b)$,$V_n=a^n+b^n$.

序列$\{u_{r+kt}d^k\}$发生函数为

$$H(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(u_{r+kt}d^k)x^n=\frac{1}{a-b}\left(\frac{a^r}{1-a^t dx}-\frac{b^r}{1-b^t dx}\right),$$

序列$\{\sum_{k=0}^{n}u_{r+kt}d^k\}$发生函数为

$$G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}U_{r+tk}d^k\right)x^n=\frac{1}{a-b}\left(\frac{a^r}{1-a^t dx}-\frac{b^r}{1-b^t dx}\right)\frac{1}{1-x}$$

$$=\frac{1}{a-b}\left[\frac{a^r}{a^t d-1}\left(\frac{a^t d}{1-a^t dx}-\frac{1}{1-x}\right)-\frac{b^r}{b^t d-1}\left(\frac{b^t d}{1-b^t dx}-\frac{1}{1-x}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{a-b}\frac{1}{(a^t d-1)(b^t d-1)}\sum_{n=0}^{\infty}[a^t b^t d^{n+2}(a^{r+tn}-b^{r+tn})-d(a^r d^t-a^t b^r)$$

$$-d^{n+1}(a^{r+t+tn}-b^{r+t+tn})+(a^r-b^r)]x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(-q)^t d^2-dV_t+1}[(-q)^t d^{n+2}U_{r+tn}-(-q)^t dU_{r-t}-d^{n+1}U_{r+t+tn}+U_r]x^n$$

注意到,若 $d = a^{-t}$,$(-q)^t d^2 - dV_t + 1 = a^{-t}(b^t - V_t + a^t) = 0$,因此,限制 $d \neq a^{-t}, b^{-t}$

比较 G(x) 两端 x^n 系数,得到(1)式。

序列 $D(x) = \{\sum_{k=0}^{n} V_{r+kt} d^k\}$ 发生函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} V_{r+tk} d^k\right)x^n = \left(\frac{a^r}{1-a^t dx} + \frac{b^r}{1-b^t dx}\right)\frac{1}{1-x}$$

类似(1)式方法得(2)式,定理1证毕。

在式(1),(2)中令 $t=1$,$d \neq \neq a^{-1}, b^{-1}$,有

推论1 设 U_n, V_n 是 Lucas 数,复数 $d \neq \neq a^{-t}, b^{-t}$,则

$$1)\sum_{k=0}^{n} U_{r+k} d^k = \frac{1}{qd^2 + pd - 1}[qd^{n+2}U_{r+n} + d^{n+1}U_{r+n+1} - qdU_{r-1} - U_r] \quad (3)$$

$$2)\sum_{k=0}^{n} V_{r+k} d^k = \frac{1}{qd^2 pd - 1}[qd^{n+2}V_{r+n} + d^{n+1}V_{r+n+1} - qdV_{r-1} - V_r] \quad (4)$$

定理2 设 u_n, Vn 是 Lucas 数,则 Lucas 数与三角函数乘积的和式

1) $\sum_{k=0}^{n} U_{r+tk}\cos k\alpha =$

$$\frac{1}{q^{2t} + V_t^2 + 1 + 2(-q)^t[\cos 2\alpha - V_t\cos\alpha] - 2V_t\cos\alpha}\{(-q)^t U_{r+tn}[(-q)^t\cos n\alpha - V_t\cos(n+1)\alpha + \cos(n+2)\alpha]$$
$$+ U_{r+1+tn}[-(-q)^t\cos(n-1)\alpha + V_t\cos n\alpha - \cos(n+1)\alpha]$$
$$+ U_r[1 + (-q)^t\cos 2\alpha - V_t\cos\alpha] + (-q)^t U_{r-t}[V_t + (-q)^t\cos\alpha - \cos\alpha]\} \quad (5)$$

2) $\sum_{k=0}^{n} U_{r+tk}\sin k\alpha =$

$$\frac{1}{q^{2t} + V_t^2 + 1 + 2(-q)^t[\cos 2\alpha - V_t\cos\alpha] - 2V_t\cos\alpha}\{(-q)^t U_{r+tn}[(-q)^t\sin n\alpha - V_t\sin(n+1)\alpha + \sin(n+2)\alpha] + U_{r+1+tn}[-(-q)^t]\sin(n-1)\alpha + [V_t\sin n\alpha - \sin(n+1)\alpha] + [q^{2t} - (-q)^t]U_{r-t}\sin\alpha + U_t[V_t]\sin\alpha - (-q)^t\sin 2\alpha]\} \quad (6)$$

3) $\sum_{k=0}^{n} V_{r+tk}\cos k\alpha =$

$$\frac{1}{q^{2t} + V_t^2 + 1 + 2(-q)^t[\cos 2\alpha - V_t\cos\alpha] - 2V_t\cos\alpha}\{(-q)^t V_{r+tn}[(-q)^t\cos n\alpha - V_t\cos(n+1)\alpha + \cos(n+2)\alpha] + V_{r+1+tn}[-(-q)^t]\cos(n-1)\alpha + [V_t\cos n\alpha - \cos(n+1)\alpha] + V_r[1 + (-q)^t\cos 2\alpha - V_t\cos\alpha] + (-q)^t V_{r-t}[V_t - (-q)^t]\cos\alpha - \cos\alpha]\} \quad (7)$$

4) $\sum_{k=0}^{n} V_{r+tk}\sin k\alpha =$

$$\frac{1}{q^{2t}+V_t^2+1+2(-q)^t[\cos 2\alpha - V_t\cos\alpha]-2V_t\cos\alpha}\{(-q)^t V_{r+tn}[(-q)^t\sin n\alpha - V_t\sin(n+1)\alpha+\sin(n+2)\alpha]+V_{r+1+tn}[-(-q)^t]\sin(n-1)\alpha+V_t\sin n\alpha-\sin(n+1)\alpha]+[q^{2t}-(-q)^t]V_{r-t}\sin\alpha+V_r[V_t\sin\alpha-(-q)^t\sin 2\alpha]\} \tag{8}$$

证明 令 $d=e^{j\alpha}=\cos\alpha+j\sin\alpha; j=\sqrt{-1}, d^k=(\cos\alpha+j\sin\alpha)^k=\cos k\alpha+j\sin k\alpha$

将 d^k 代入(5)式左端 $\sum_{k=1}^{n}U_{r+tk}d^k=\sum_{k=1}^{n}U_{r+tk}(\cos k\alpha+j\sin k\alpha)$

$=(\sum_{k=1}^{n}U_{r+tk}\cos k\alpha+j\sum_{k=1}^{n}U_{r+tk}\sin k\alpha)$

(5)式右端 $=\frac{1}{q^{2t}+V_t^2+1+2(-q)^t[\cos 2\alpha-V_t\cos\alpha]-2V_t\cos\alpha}\{(-q)^t\cos 2\alpha$

$-V_t\cos\alpha+1)$

$-j[(-q)^t\sin 2\alpha-V_t\sin\alpha]\cdot[(-q)^t U_{r+tn}\cos(n+2)\alpha-U_{(r+1+tn)}\cos(n+1)\alpha$

$-(-q)^t U_{r-t}\cos\alpha+U_r)+j(-q)^t U_{r+tn}\sin(n+2)\alpha-U_{(r+1+tn)}\sin(n+1)\alpha-$

$(-q)^t U_{r-t}\sin\alpha\}$

两个复数相乘:(a)实部与实部相乘+虚部与虚部相乘,利用三角函数公式 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$,整理化简与(1)式左端实部相等得(5)式。

(b)前一复数实部乘以后一复数虚部+前一复数虚部乘以后一复数实部

利用三角函数公式 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ 整理化简与(1)式左端虚部相等得(6)式,同法利用(2)式得(7),(8)式。定理2证毕。

在定理2中令 $t=1$,有下面

定理3 含有三角函数的 Lucas 数封闭形和式

1) $$\sum_{k=0}^{n}U_{r+k}\cos k\alpha=\frac{1}{p^2+q^2+1+2pq\cos\alpha-2q\cos 2\alpha-2p\cos\alpha}\{U_{r+n}[q^2\cos n\alpha+pq\cos(n+1)\alpha-q\cos(n+2)\alpha]+U_{r+n+1}[q\cos(n-1)\alpha+p\cos n\alpha-\cos(n+1)\alpha]+U_r(1-p\cos\alpha-q\cos 2\alpha)+qU_{r-1}(\cos\alpha-q\cos\alpha-p)\} \tag{9}$$

2) $$\sum_{k=0}^{n}U_{r+k}\sin k\alpha=\frac{1}{p^2+q^2+1+2pq\cos\alpha-2q\cos 2\alpha-2p\cos\alpha}\{U_{r+n}[q^2\sin n\alpha+pq\sin(n+1)\alpha-q\sin(n+2)\alpha]+U_{r+n+1}[q\sin(n-1)\alpha+p\sin n\alpha-\sin(n+1)\alpha]+U_r(p\sin\alpha+q\sin 2\alpha)+U_{r-1}(q+q^2)\sin\alpha\} \tag{10}$$

3) $$\sum_{k=0}^{n}V_{r+k}\cos k\alpha=\frac{1}{p^2+q^2+1+2pq\cos\alpha-2q\cos 2\alpha-2p\cos\alpha}\{V_{r+n}[q^2\cos n\alpha+pq\cos(n+1)\alpha-q\cos(n+2)\alpha]+V_{r+n+1}[q\cos(n-1)\alpha+p\cos n\alpha-\cos(n+1)\alpha]+V_r(1-p\cos\alpha-q\cos 2\alpha)+qV_{r-1}(\cos\alpha-q\cos\alpha-p)\} \tag{11}$$

4) $\sum_{k=0}^{n} V_{r+k}\sin k\alpha = \frac{1}{p^2+q^2+1+2pq\cos\alpha-2q\cos2\alpha-2p\cos\alpha}\{V_{r+n}[q^2\sin n\alpha$
$+pq\sin(n+1)\alpha-q\sin(n+2)\alpha]+V_{r+n+1}[q\sin(n-1)\alpha+p\sin n\alpha-$
$\sin(n+1)\alpha]+V_r(p\sin\alpha+q\sin2\alpha)+V_{r-1}(q+q^2)\sin\alpha\}$ (12)

在定理3中,令 p = q = 1,有

推论2 含有三角函数的 Fibonacci 数封闭形和式

1) $\sum_{k=0}^{n} F_{r+k}\cos k\alpha = \frac{1}{3-2\cos2\alpha}\{F_{r+n}[\cos n\alpha+\cos(n+1)\alpha-\cos(n+2)\alpha]$
$+F_{r+n+1}[\cos(n-1)\alpha+\cos n\alpha-\cos(n+1)\alpha]+F_r(1-\cos\alpha-\cos2\alpha)+$
$F_{r-1}(\cos\alpha-\cos\alpha-1)\}$ (13)

2) $\sum_{k=0}^{n} F_{r+k}\sin k\alpha = \frac{1}{3-2\cos2\alpha}\{F_{r+n}[\sin n\alpha+\sin(n+1)\alpha-\sin(n+2)\alpha]$
$+F_{r+n+1}[\sin(n-1)\alpha+\sin n\alpha-\sin(n+1)\alpha-\sin(n+1)\alpha]+F_r(\sin\alpha+$
$\sin2\alpha)+2F_{r-1}\sin\alpha\}$ (14)

3) $\sum_{k=0}^{n} L_{r+k}\cos k\alpha =$
$\frac{1}{3-2\cos2\alpha}\{L_{r+n}[\cos n\alpha+\cos(n+1)\alpha-\cos(n+2)\alpha]+L_{r+n+1}[\cos(n-1)\alpha$
$+\cos n\alpha-\cos(n+1)\alpha]+L_r(1-\cos\alpha-\cos2\alpha)+L_{r-1}(\cos\alpha-\cos\alpha-1)\}$ (15)

4) $\sum_{k=0}^{n} L_{r+k}\sin k\alpha = \frac{1}{3-2\cos2\alpha}\{L_{r+n}[\sin n\alpha+\sin(n+1)\alpha-\sin(n+2)\alpha]+$
$L_{r+n+1}[\sin(n-1)\alpha+\sin n\alpha-\sin(n+1)\alpha]+L_r(\sin\alpha+\sin2\alpha)+2L_{r-1}\sin\alpha\}$
(16)

第三节 正负相间 Lucas 序列封闭形和式

熟知 Lucas 整数序列递推公式为:$U_{n+2}=pU_{n+1}+qU_n$;$V_{n+2}=pV_{n+1}+qV_n$;

我们利用发生函数方法首先得到正负相间一类含有等比数列的 Lucas 数封闭形和式计算公式。

其次利用复数隶莫弗乘法公式得到含有三角函数的正负相间 Lucas 数封闭形和式明显表达式。

定理1 设 U_n,V_n 是 Lucas 序列,复数 $d\neq0$,则正负相间 Lucas 数和式

1) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k U_k d^k = \frac{1}{-qd^2+pd+1}[-qd^{n+2}U_n+d^{n+1}U_{n+1}+(-1)^{n+1}d]$ (1)