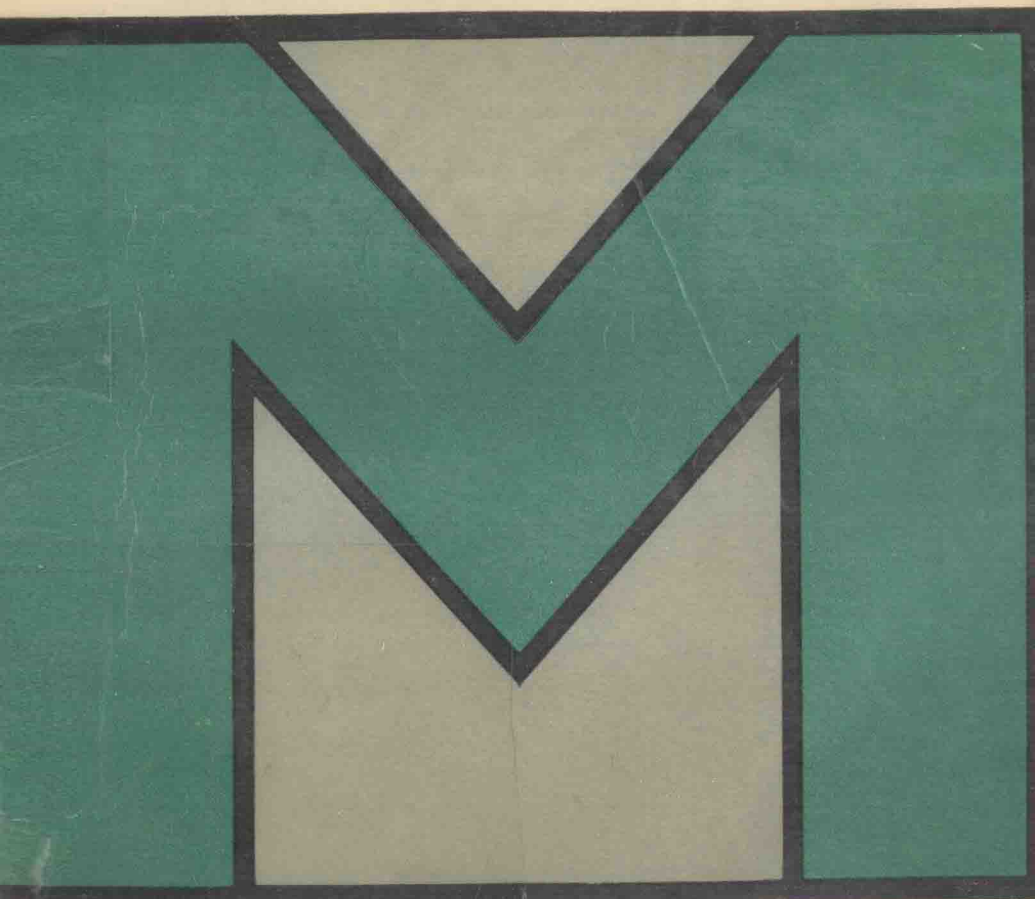


研究生入学考试数学 试题精选解析

(工学类·经济学类)

余 仁 胜



高等教育出版社

研究生入学考试数学 试题精选解析

(工学类·经济学类)

余 仁 胜

高等教育出版社

(京) 112号

研究生入学考试数学试题精选解析

(工学类·经济学类)

余仁胜

*

高等教育出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

中国科学院印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 16 字数 380 000

1993年 11 月第 1 版 1993年 11 月第 1 次印刷

印数 0001—3535

ISBN7-04-004851-5/O · 1337

定价 11.85 元

编 者 的 话

本书共分为两部分。第一部分为全国工学硕士研究生入学考试数学试题精选解析,包括高等数学、线性代数、概率论和复变函数四章;第二部分为全国经济学硕士研究生入学考试数学试题的精选解析,包括微积分、线性代数和概率论三章。这里从1987年至1993年工学类试题中精选了364道题,从经济类试题中精选了242道题,其内容覆盖了考试大纲所要求的绝大部分考试内容。题型有填空题、选择题、计算题和证明题。每一试题前用数码标明了试题使用年份、卷种、题分等信息。如某题前括号内数码为(90205),表示此题为1990年数学二中的5分题,数码(871'10)表示此题为1987年数学一副题中的10分题。每一章节中精选的试题也依上述题型顺序排列,有个别章节并非四种题型的试题均有。选择题均指四选一的多项选择题,每题给出四个被选项,其中只有一个选项是正确的。同一题型中的试题基本上依照考试大纲中所列的知识点的顺序排列,有些试题考查内容的综合性较强,依其考核的主要目标进行分类。比如:运用罗必塔法则求极限的试题本应属于一元函数微分学中导数的应用,但其考查的主要目标是求极限。因此,这类试题被编排在第一章的函数、极限、连续一节中;还有像涉及变上限积分所确定的函数的求导问题,运用积分方法建立目标函数,再应用导数求最大(小)值。极大(小)值的问题都被编排在第一章的一元函数微分学一节中。

本书中从1990—1993年四年试卷中精选的试题均附有难度值、区分度值,因为难度值和区分度值是教育测量学中评价试题质

量的两个重要指标. 所谓难度值, 是反映试题对考生难易程度的统计指标, 通常用某题的得分率表示, 其值在 $0-1$ 之间. 需要特别指出的是, 用得分率表示的难度值, 其值越大, 表示该题得分率越高, 题目越容易; 反之, 难度值越小, 题目就越难. 所谓区分度值, 是反映试题对不同水平考生的区分能力, 通常用考生组的总分与考生组在该题目上得分的相关系数表示, 其值在 -1 到 1 之间. 区分度值越大, 该题对不同能力水平考生的区分能力越强, 有利于选拔择优; 反之, 区分度值愈小, 题目对考生的区分能力愈差, 对于选拔性考试而言, 测量学要求区分度值大于 0.3 的试题为合格试题.

本书在编写过程中, 始终得到了多年参加数学试卷审题工作的国家教委高等学校数学与力学教学指导委员会成员、中国数学会理事、北京航空航天大学李心灿教授的热情指导和帮助, 他除了对全书的编写提出指导性意见外, 还在百忙中为本书作序; 北京航空航天大学旋俊雄副教授、肖亮壮副教授、陈典凯副教授、北京信息工程学院吴昌恂副教授分别仔细审阅了高等数学、概率论、复变函数、线性代数的初稿并提出了宝贵意见, 编者根据他们的意见对初稿作了部分修改; 华中理工大学于寅教授, 北京大学范培华副教授分别对修改稿的第一部分和第二部分作了认真审阅, 并结合命题研究工作提出了宝贵的修改意见, 在此一并表示诚挚的谢意. 编者还要感谢参加硕士研究生入学考试数学试题命题工作的全体教师, 因为他们的作为本书的编写提供了主要的素材.

由于作者水平有限, 书中难免有疏漏、错误和不足之处, 欢迎读者批评指正.

序

自从 1987 年全国工学、经济学硕士研究生入学数学考试实行统一考试以来,至今已有七年历史。其中 1987、1988 两年,国家教委委托北京市高校招生办公室组织命题,命题依据是 1986 年国家教委制定的《全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学考试说明》(以下简称《考试说明》)。从 1989 年起,改由国家教委考试中心统一组织命题工作。1989、1990 两年,命题依据仍是上述《考试说明》。1991 年国家教委颁布了《全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学考试大纲》(以下简称《考试大纲》),《考试大纲》是国家教委考试中心聘请有关专家、教授在原《考试说明》基础上,根据工学、经济学各专业对硕士生入学数学知识水平的不同要求修订而成。《考试大纲》规定:工学入学考试数学分为数学一、数学二、数学三,三个卷种;经济学入学考试数学分为数学四、数学五,两个卷种;并对各卷种适用的招生专业、各部分考试内容比例、题型及各题型占分比例作了明确规定。《考试大纲》每年修订一次,作为当年考试命题的依据。

当代著名数学家 G·D·伯克霍夫(Birkhoff)指出:“再没有一个学科比数学易于通过考试来测定智力了。”对于数学考试而言,试卷本身就是一份量表,它是《考试大纲》对考试内容和考查能力要求的具体体现。全国工学、经济学数学入学考试统考七年来,共命制正副试卷 65 份,约 1500 多道试题,其中正式使用过的试题 1000 多道。这些试题是广大数学教师及参加命题的专家、教授、工作人员智慧与劳动的结晶,是一份宝贵的资料。每一份试卷、每

一道试题,既反映了《考试大纲》对考生数学知识、能力、水平的要求,又蕴含着教师的命题思想.因此,对照《考试大纲》分析、提炼、研究这些试题,不仅可以展示出统考以来数学考试的全貌,便于广大考生和教师了解工学、经济学硕士研究生统考的有关题目和信息,而且可以从中总结这几年来命题的经验、发现问题,以利于今后进一步搞好命题工作.这就是本书作者、国家教委考试中心余仁胜同志编写这本书的初衷.

余仁胜同志这本书,是从七年来共命制的 1000 多道试题中精选了 600 多道比较典型的试题,其内容覆盖了考试大纲所要求的几乎所有考试内容,题型也是全面的,即填空题、选择题、计算题、证明题都有.本书每一章的开头都有一个简明的综合分析介绍,给出了《考试大纲》对该章节内容的基本要求.分析了不同卷种对同一章节内容知识和能力层次要求的差异,以及历年试题中各部分内容的占比例和题型分布情况,并对题目实际使用后的难度值、区分度值及总体答题情况进行了剖析,而且对于每一章节中精选的每道试题,除了给出标准答案之外,还进行了重点解析,分析了命题思路和解题的重点、难点.因此,本书既是报考工学、经济学硕士考生难得的应试指南,也是工科院校、经济院校师生的数学教学参考书.

著名数学家、教育家 G·波利亚(Polya)说:“解题是智力的特殊成就,而智力乃是人类的天赋;因此解题可以认为是人的最富有特征性的活动.”本书给准备报考研究生的读者提供了许多典型试题,这些试题提供了测验自己数学水平和锻炼自己解题能力的机会.我建议准备报考研究生的读者,在阅读此书时,应该先看《考试大纲》,以便明确考试的有关要求,接着去认真复习相应的数学教材和参考书,复习完后再来看本书的试题.在看本书的试题时,应该手边有纸有笔:如果是填空题,自己先试填空;如果是选择题,

自己先试选择;如果是计算题,自己先试计算;如果是证明题,自己先试证明.然后将自己所得的结果与本书的结果作一比较,看哪些自己做对了,哪些自己做错了,为什么会做错?如果能用这样的态度和方法来阅读本书,不但能提高你解题的能力,而且能使你更深刻地理解、掌握有关数学的基本概念、基本理论、基本方法,从而在应试时发挥出好的水平.

李心灿

1993年夏于北京航空航天大学

目 录

第一部分 工 学 类

全国工学硕士研究生入学数学考试简介	2
第一章 高等数学	4
一、函数、极限、连续	5
二、一元函数微分学	28
三、一元函数积分学	78
四、向量代数和空间解析几何	119
五、多元函数微分学	125
六、多元函数积分学	136
七、无穷级数	165
八、常微分方程	180
第二章 线性代数	203
第三章 概率论	242
第四章 复变函数	266

第二部分 经济学类

全国经济学硕士研究生入学数学考试简介	288
第一章 微积分	290
一、函数、极限、连续	290
二、一元函数微分学	306
三、一元函数积分学	343
四、多元函数微积分学	359
五、无穷级数	378
六、常微分方程	386
第二章 线性代数	394
第三章 概率论	452

第一部分

工 学 类

全国工学硕士研究生入学 数学考试简介

全国工学硕士研究生入学数学考试，是为招收工学硕士研究生而实施的选拔性考试。其考试指导思想是有利于选拔高层次人才，有利于工科高等学校提高各类数学课程的教学质量。要求考生比较系统地理解工科数学的基础知识，掌握数学的基本方法，在考查知识的基础上，考查考生的抽象概括能力、逻辑推理能力、空间想象能力和综合应用所学的知识分析和解决问题的能力。

根据工学各学科、各专业对硕士研究生所应具备的数学知识与素质的不同要求，试卷分为数学一、数学二和数学三。

数学一适合于报考力学、仪器仪表、动力机械及工程热物理、电工、电子学及通信、计算机科学与技术、自动控制、管理工程、船舶、原子能科学与技术、航空和宇航技术、兵器科学与技术等专业的考生。考试内容为高等数学、线性代数、概率论或复变函数。其中高等数学约占 68 分，线性代数约占 20 分，概率论和复变函数约占 12 分，概率论与复变函数两门中由考生自选一门应试。题型包括填空题、选择题、计算题、证明题，其中填空题和选择题约占 30 分，计算题和证明题约占 70 分。

数学二适合于报考机械设计与制造、金属材料、冶金、土建、水利、测绘、非金属材料、化学工程和工业化学、地质勘探、矿业石油、铁道、公路、水运、纺织、轻工、林业工程等专业的考生。考试内容包括高等数学、线性代数。其中高等数学约占 75 分，线性代数约占 25 分。题型也是填空题、选择题、计算题、证明题，其中填空题

和选择题约占 30 分,计算题和证明题约占 70 分.

数学三适合于报考建筑学、技术科学史等专业的考生. 考试内容为高等数学, 满分 100 分. 其中填空题与选择题约占 30 分, 计算题和证明题约占 70 分.

第一章 高等数学

高等数学是工科院校的重要的基础课。凡是报考工科各专业的考生都要参加高等数学这门学科的考试。在工学的数学一、数学二和数学三中,高等数学共占 243 分,占三卷总分的 81%。其中数学一试卷中高等数学约占 68 分,数学二试卷中高等数学约占 75 分,数学三试卷中仅考高等数学。考试大纲对数学一、数学二的高等数学部分考试内容的要求基本相同,主要包括①函数、极限、连续②一元函数微分学③一元函数积分学④向量代数和空间解析几何⑤多元函数微分学⑥多元函数积分学⑦无穷级数⑧常微分方程等八个部分的内容。历年来数学二中高等数学试题基本包括数学一中高等数学的试题,也就是说,两份试卷相同试题约占 68% 左右。但从历年考试情况的统计分析结果看,由于考生群体不同,考生的水平也略有差异,因此,相同试题在数学一和数学二中难度值略有差异,一般地说,数学一中的试题平均得分率略高于数学二(约 0.1),这说明参加数学一考试的考生总体水平略高于参加数学二的考生的总体水平。考试大纲要求数学三高等数学的考试内容包括①函数、极限、连续②一元函数微分学③一元函数积分学④常微分方程等四个部分,对多元函数微积分,无穷级数,向量代数和空间解析几何不作要求,因此,相对于数学一、数学二而言,数学三的考试内容的范围要小得多。但由于整份试卷只考高等数学,因此试题更注重高等数学的基础知识、基本概念和基本方法的考查。

一、函数、极限、连续

考试大纲要求本节的考试内容包括:函数的概念及表示法,函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性,反函数、复合函数和隐函数,基本初等函数的性质及其图形,初等函数,简单应用问题的函数关系的建立,数列极限的 ε - N 定义、函数极限的 ε - δ 定义和函数的左、右极限,无穷小,无穷大,无穷小的比较,极限四则运算,极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则,两个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

函数连续的概念,函数间断点的类型,初等函数的连续性,闭区间上连续函数的性质(最大值、最小值定理和介值定理)。

本节共精选试题 37 道,其中填空题 14 道,选择题 12 道,计算题 11 道,没有证明题。试题考查的内容范围覆盖了考试大纲要求的全部的内容。另外,由于运用罗必塔(L'Hospital)法则求各种类型的未定式的极限题目,其主要的考查目标是求极限,因此,这类试题也收集在本节中。

试题的类型主要包括①运用极限的定义,两个重要极限,等价无穷小量,极限性质,罗必塔法则,导数定义等方法求函数和数列的极限;②考查函数在一点处连续的充要条件,判断函数间断点的类型;③进行无穷小量的比较;判断函数的性质(有界,无界,单调性,周期性,奇偶性等)。

本节试题主要考查函数、极限、连续的基本概念和求极限的方法。考生比较熟悉本节试题的类型,试题的难度值大多在 0.6 以上,但区分度一般在 0.4 以下。

(一) 填空题

1. (90303) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$ 则函数 $f[f(x)]$

_____。
[解析] 应填 1。

因为由已知条件知 $|f(x)| \leq 1, -\infty < x < +\infty$, 故由 f 及复合函数的定义知 $f[f(x)] = 1, -\infty < x < +\infty$ 。

本题考查复合函数的基本概念和函数复合的基本方法, 难度值为 0.61, 区分度为 0.41。

2. (87302) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n+1} \right)^n = \underline{\hspace{2cm}}.$

[解析] 应填 e^{-3} 。

解题关键是利用重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$ 。

$$\begin{aligned} \text{由于 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n+1} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{n+1} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-\frac{n+1}{3}} \right)^{-\frac{n+1}{3}} \right]^{-3} \left(\frac{n-2}{n+1} \right)^{-1} \\ &= e^{-3}. \end{aligned}$$

3. (90103) 设 a 为非零常数, 则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = \underline{\hspace{2cm}}.$$

[解析] 应填 e^{2a} 。

解本题的关键是利用重要极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$ 。

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2a}{x-a} \right)^x \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2a}{x-a} \right)^{x-a} \cdot \left(1 + \frac{2a}{x-a} \right)^a \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2a}{x-a} \right)^{\frac{x-a}{2a}} \right]^{2a} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2a}{x-a} \right)^a \\
&= e^{2a} \cdot 1 = e^{2a}.
\end{aligned}$$

本题要求考生熟记并理解重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$, 并能灵活运用. 考生应注意 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$ 中 $x \rightarrow \infty$ 表示 x 取实数, $|x|$ 趋于无穷大. 难度值为 0.87, 区分度为 0.33. 难度值较大说明考生熟悉这类试题的解法.

4. (93303) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \underline{\hspace{2cm}}.$

〔解析〕 应填 0.

$x \rightarrow 0^+$ 时, $\ln x \rightarrow -\infty$, $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, 所以此极限属于 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式. 应用罗必塔法则即可求得极限. 事实上,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= - \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0.
\end{aligned}$$

本题难度值为 0.93, 区分度为 0.22.

5. (91303) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{x + e^{\frac{1}{x}}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

[解析] 应填 -1 .

解法一: 此极限属 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式, 因而可以用罗必塔法则求极限. 为方便运算, 可作如下变换:

令 $t = \frac{1}{x}$, 则 $x \rightarrow 0^+$ 时 $t \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^t}{\frac{1}{t} + e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^t - te^t}{e^t + te^t} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(-2-t)e^t}{(2+t)e^t} = 1.\end{aligned}$$

解法二: 利用 $x \rightarrow 0^+$ 时

$$xe^{-\frac{1}{x}} \rightarrow 0, \quad e^{-\frac{1}{x}} \rightarrow 0 \quad \text{知}$$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{xe^{-\frac{1}{x}} + 1} = -1.$$

本题考查运用罗必塔法则求 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式极限的方法. 解法一是运用罗必塔法则, 而解法二未用该法则, 但更加简单明了. 本题难度值为 0.75, 区分度为 0.35.

6. (89303) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x = \underline{\hspace{2cm}}.$

[解析] 应填 $\frac{1}{2}$.

此极限属“ $0 \cdot \infty$ ”型未定式, 通常应将其化为“ $\frac{0}{0}$ ”或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式来计算.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 2x}$$