米庆春 主编

重点 难点 疑点 学习手册

ZHONGDIAN
NANDIAN
YIDIAN
XUEXISHOUCE

代数

初三

东北师范大学出版社

重点难点疑点学习手册

代　　数

初　三

米庆春　主编

东北师范大学出版社

（吉）新登字 12 号

主编　米庆春
编者　米庆春　李明林　宋继权
　　　许　敏　宋丽洁

重点难点疑点学习手册
代　数
DAI SHU
初　三
米庆春　主编

责任编辑：刘兆辉　封面设计：李冰彬　责任校对：朱慧明、聂文聪

东北师范大学出版社出版　　吉林省新华书店发行
（长春市斯大林大街 110 号）　　吉林工学院印刷厂制版
（邮政编码：130024）　　吉林工学院印刷厂印刷

开本：787×1092 毫米 1/32　　1996 年 5 月第 1 版
印张：8.75　　1996 年 5 月第 1 次印刷
字数：200 千　　印数：00 001—10 000 册

ISBN 7-5602-1814-8　　本册定价：8.50 元
G・891　　全套定价：52.00 元

出版说明

为了帮助广大师生更好地把握教材，准确、扎实地掌握教材中的重点，化解难点，消除疑点，培养学生的学习能力，发展其思维能力，提高其素质，我们组织部分省、市、县的教研员和第一线的特级、高级教师编写了这套丛书。

这套丛书共38册，覆盖了初中和高中语文、英语、历史、代数、几何、物理、化学诸科课程。

这套丛书严格依据国家教委制定的《全日制中学各科教学大纲》和全国统一教材编写。对重点、难点的确定，既考虑到大纲和教材的要求，又考虑到教学的实际情况，同时又使之形成一定的系统。对重点、难点的解析力求准确、清晰、简明、透彻。疑点主要是从启发学生思维，培养学生的质疑问难精神出发提出的，问题新颖，答疑注重比较和引申，拨云见日。

这套丛书编写的指导思想是突出其实用性，强调其科学性、针对性和新颖性。

书中除“重点、难点、疑点”及其解析外，还设有“典型例题解析”、“典型错解剖析”、“反馈练习”、“综合测试题”、“参考答案”等部分。

“重点、难点、疑点解析”针对教材中的重点、难

点及学生学习过程中的疑点进行提炼并详细地解释、说明。

“典型例题解析”围绕重点、难点选择有代表性的典型题为例子进行具体分析，以加深对重点、难点的理解，并指明思路，教给方法，培养学习能力。

“典型错解剖析”针对学生学习中常见的错误、易混淆的知识，通过剖析典型错例，明确错误根源，以防患于未然。

“反馈练习”按章节或单元进行编写，突出重点、适当加些难点内容，题型新颖多样，既便于阶段反馈检测，又有利于提高学生的分析问题、解决问题的能力。

“综合测试题”基本上按每个学期一套编拟，既突出重点，又考虑覆盖面，可作为检测和反馈所学知识之用。

在保持整套丛书体例基本一致的前提下，根据各科教材体系和实际情况，对上述各部分适当地进行了某些局部调整。

东北师范大学出版社

目　　录

第十二章　一元二次方程

一、一元二次方程的有关概念和解法

【重点、难点、疑点解析】

重　点

1. 一元二次方程的有关概念

(1) 一元二次方程是由客观实际的需要和数学自身发展需要产生的. 例如，已知矩形的面积为 24m²，长比宽多 2m，求其对角线的长. 如设矩形的长为 x，则宽为 $x-2$，根据题意列出方程为

$$x(x-2)=24,$$

整理，得

$$x^2-2x-24=0.$$

(2) 一元二次方程的定义. 只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式方程，叫做一元二次方程. 理解此概念要注意三点：①方程必须是整式方程，即方程两边都是关于未知数的整式（分母不含未知数）的方程；②方程只含有一个未知数；③未知数的最高次数是 2. 三点全具备的方程是一元二次方程，至少有一点不具备的不是一元二次方程. 据此可以判断一个方程是否是一元二次方程.

(3) 一元二次方程的一般形式. 任何一个一元二次方程经过变形后，都可以化成一般形式，即 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$). 反过来，具有这种形式的方程就是一元二次方程，这也是一个判断方程是否是一元二次方程的方法. 将方程化为一般形式很重要，要熟练掌握.

(4) 一元二次方程的不完全形式. 一元二次方程除了一般形式外，还有如下的几种特殊形式：

① $ax^2+c=0$ ($a\neq 0$, $b=0$, $c\neq 0$)；

② $ax^2=0$ ($a\neq 0$, $b=0$, $c=0$)；

③ $ax^2+bx=0$ ($a\neq 0$, $b\neq 0$, $c=0$).

这三种形式都叫做一元二次方程的不完全形式.

(5) 一元二次方程的各项系数及常数项. 在初中代数中，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的二次项系数 a，一次项系数 b，常数项 c 都是实数，并且 $a\neq 0$（无论哪种形式），若 $a=0$，则方程就变为一元一次方程 $bx+c=0$ ($b\neq 0$) 了. 在确定 a，b，c 的值时，必须先将方程化为一般形式，特别要注意各系数的符号；遇有缺项，则该项系数为 0.

2. 一元二次方程的解法

(1) 开平方法. 直接开平方法是配方法和公式法的基础，是解一元二次方程最基本的方法. 它的理论依据是数的开平方和二次根式. 此解法运用于不完全的一元二次方程 $ax^2+c=0$, $ax^2=0$ 及 $(x+b)^2=m$ 型的方程. 在用开平方法解这些方程时，应注意以下几点：

① 在解方程 $ax^2+c=0$ (a, $c\neq 0$) 时，要注意 a、c 的符号. 方程 $ax^2+c=0$ 的一般解法是

$$ax^2+c=0,\ ax^2=-c,\ x^2=-\frac{c}{a}$$

若 a, c 异号，则 $-\frac{c}{a}$ 是一个正数，方程有两个实数根，是互为相反数；若 a，c 同号，则 $-\frac{c}{a}$ 是一个负数，因为负数在实数范围内没有平方根，所以这个方程无实数根.

当二次项系数为负时，方程两边乘以 -1，可转化为上面的方程来解.

② 方程 $ax^2=0$ 的解法是：因为 $a\neq0$，方程两边除以 a 得 $x^2=0$. 显然 $x=0$ 是方程的根. 要注意的是现行教科书对此方程不说只有一个实数根 $x=0$，而是说有两个相等的实数根 $x_1=0$，$x_2=0$，或写成 $x_1=x_2=0$.

③ 对形如 $(x+h)^2=m$ 的方程的解法，要注意把 $x+h$ 看作一个整体，如令 $x+h=y$，则方程变为 $y^2=m$ 型的方程，这就可以用直接开平方法来解了. 当 $m\geqslant0$ 时，方程有两个实数根，即 $x_1=-h+\sqrt{m}$，$x_2=-h-\sqrt{m}$；当 $m<0$ 时，方程没有实数根. 这里实际上隐含着换元法.

④ 由于对算术平方根概念的过分强化，往往会对用开平方法解一元二次方程产生负迁移作用. 例如，在解方程 $x^2=5$ 时，会产生 $x=5$ 的错误，要注意防止.

（2）配方法. 它是在直接开平方的基础上研究的，是解一元二次方程的一种方法；用于推导一元二次方程的求根公式，因此它是公式法的基础；根式的化简、求二次函数图象顶点的坐标、化简二次曲线，求函数的最大最小值等都要用配方法. 可见它是贯穿中学数学始终的非常重要的数学方法，在实际运算中，一般都不用配方法解一元二次方程，重点是掌握配方法本身，即会配方，为此要注意弄清以下两个问题：

① 基本思路. 配方的目的就是把不会解的具有一般形式的一元二次方程转化为会解的形如 $(x+h)^2=m$ 的方程. 要求

就是把方程的左边配成完全平方式，右边变为非负数，然后用开平方法来解.把不会解的方程通过配方变成会解的方程.把未知转化为已知，这就是配方法的基本思路.

② 配方法的步骤.我们以数字系数的一般形式的一元二次方程 $x^2+6x+7=0$ 为例来说明这个问题.先将一次项系数 $6x$ 改写成 $2\cdot x\cdot 3$，然后与乘法公式 $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ 相对照，得

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x^2 & + & 2\cdot & x\cdot & 3+ & (\quad) & = & -7+ & (\quad) \\
\downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\
a^2 & + & 2\cdot & a\cdot & b+ & b^2 & = & (a+b)^2 &
\end{array}
$$

由此对照可以知道，为了使方程左边变成完全平方式，在方程两边需补加上 3^2（即一次项系数 6 的一半的平方），从而使解方程 $x^2+6x+7=0$ 转化为解方程 $(x+3)^2=2$. 这就给出了解一元二次方程的第二种方法——配方法.这里要注意，当配完方得出方程 $(x+h)^2=m$ 时，若 $m<0$，则方程无解. 由上可知，配方法的步骤是：

A. 当二次项系数的绝对值 $|a|\neq 1$ 时，将 a 化为 1，并把常数项移到方程的右边；

B. 在方程的两边各加上一次项系数一半的平方，使方程的左边能配成一个完全平方式. 这是配方法最关键的一步；

C. 当方程右边的常数为非负数时，用直接开平方法求解. 使用配方法时，要抓住这两个关键步骤配方和开方.

（3）公式法. 这部分内容是本章的重点和关键.《初中数学教学大纲》对此内容的具体要求是：“掌握一元二次方程求根公式的推导，会用求根公式解一元二次方程.”为此，我们研究此部分内容时应重点抓住以下两个问题：

① 求根公式的推导. 求根公式的推导，重点要抓住配方

与开方这两个关键环节．教科书在上面对数字系数的一般形式的一元二次方程配方及做些字母系数一元二次方程配方练习的基础上，提出用配方法来解字母系数一般形式的一元二次方程的问题，进而用配方和开方推导出一元二次方程的求根公式，给出一元二次方程的又一种解法——公式法．

在推导求根公式时要注意两点：一是两边开平方时，被开方数必须是非负数，即必须$\frac{b^2-4ac}{4a^2}\geqslant 0$（这里$a\neq 0$，$4a^2>0$），而等式$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$的左边大于或等于0，所以$b^2-4ac\geqslant 0$．二是在等式$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$中，$\sqrt{4a^2}$应等于$2|a|$，但由于等式右边的项前面带有正负号，所以无论$a>0$还是$a<0$，最终结果都是一样的．有了这个公式，就可以把求任何一个一元二次方程的根的问题，转化为求关于系数a，b，c的代数式的值的问题了．

② 公式的运用．公式法是解一元二次方程的万能方法，因此，对公式$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$必须搞清其来源、结构特点，每个字母的含义，以及应用范围，以便记忆和应用．这里公式左边的x是表示方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的两个根；公式右边是关于各项系数及常数项a，b，c的代数式．运用公式法要强调两点：一是方程必须为一般形式，不是一般形式的应先化成一般形式；二是b^2-4ac必须大于或等于0，即非负数．具备这两个前提，才能使用公式，特别对字母系数的一元二次方程，解的时候要先弄清哪个是未知数，哪些是字母系数．运用公式法的步骤是：

A．把方程化为一般形式，确定a，b，c的值；

B. 求出 b^2-4ac 的值；

C. 把 a, b, c 及 b^2-4ac 的值代入求根公式，求出方程的根.

（4）因式分解法．因式分解法是解一元二次方程最常用的方法之一，对某些一元二次方程，用因式分解法解比用其他方法简便．用因式分解法解方程，能把方程直接降次，可为以后学习二元二次方程组及某些高次方程等打下基础．研究因式分解法应重点弄清以下几个问题：

① 弄清因式分解法的依据．我们知道，“如果两个因式的积等于 0，那么这两个因式中至少有一个等于 0；反过来，如果两个因式有一个等于 0，它们的积就等于 0”．这里涉及“充要条件”，不宜要求过高，只要能知道 $(x-2)(x+2)=0$，必须且只需 $x-2=0$ 或 $x+2=0$ 就可以了.

② 因式分解法的步骤，因式分解法的步骤是：

A. 把方程右边的各项移到左边，使方程右边为 0；

B. 将方程左边的式子分解因式；

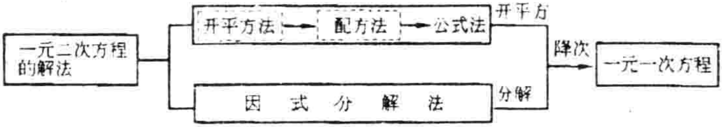
C. 令两个因式分别为 0，得到两个一元一次方程；

D. 分别解两个一元一次方程，得到两个根，这两个根就是一元二次方程的根.

③ 使用因式分解法要注意防止丢根．例如，解方程 $3y^2=2y$．移项得 $3y^2-2y=0$，$y(3y-2)=0$，$y=0$ 或 $3y-2=0$，所以 $y_1=0$，$y_2=\frac{2}{3}$．这里要移项后再因式分解，不能把方程两边都除以 y，得一个根 $y=\frac{2}{3}$，这样就把 $y=0$ 这个根丢了.

解一元二次方程有四种方法，即开平方法、配方法、公式法和因式分解法．其中开平方法是最基本的，公式法和因式分解法是最常用的，而配方法的重要则在于其本身．这里

前三种方法是一脉相承的，都是通过开平方降次，把一元二次方程化为一元一次方程来解，而因式分解法则是通过分解降次把一元二次方程化为一元一次方程来解的．具体结构层次如下：



对于一个具体的一元二次方程究竟选用哪种方法来解，这要根据所给方程的特点灵活选择最佳的方法，通常是先考虑方程能否用开平方法来解，然后再考虑用因式分解法，这里主要是用十字相乘法分解二次三项式．如前两者都不方便，再考虑用公式法来解．

3．主要的数学思想和方法．本单元内容所反映的数学思想和方法主要有：

① 化归的思想．其主旨就是把一个复杂的、陌生的问题转化为一个简单的、熟悉的问题．我们知道，解方程的过程就是不断地通过变形把原方程化归为与它同解的最简方程的过程．因此我们可以说，化归思想是解方程过程中思维活动的主导思想．前面所表述的一元二次方程的四种解法，就是分别通过开方和分解降次把一元二次方程化归为一元一次方程来解的．充分体现了化归的数学思想．

② 分类讨论的思想．其主旨是把所研究的对象分成若干类，然后分别研究每一类．本单元关于一元二次方程按其解析表达式分为两类研究，即一元二次方程的一般形式（完全形式）和特殊形式（不完全形式），以及特殊形式又分为三类进行研究都体现了分类讨论的思想．

③ 配方法．如前所述它是贯穿整个中学教学的一个十分

重要的数学方法．本单元的配方法是从解数字系数的一元二次方程开始，逐步过渡到解字母系数的一元二次方程，完成了由特殊到一般，从具体到抽象的过渡．这里研究配方法的目的有三：一是解一元二次方程；二是推导求根公式；三是掌握配方法本身，为以后的学习打下基础．其中后两个目的是主要的．

难　点

1．把字母系数的非一般形式的一元二次方程准确地化为一般形式，并正确地确定它的二次项系数、一次项系数及常数项是这部分内容的一个难点．难就难在它不是一般形式；未知数和已知字母系数容易混淆；加上系数及常数项的一些规定的复杂情况等．解决的关键在于分清谁是未知数，谁是已知字母系数，然后把关于未知数的方程写成一般形式，并按照系数及常数项包括性质符号，缺项的系数为 0，二次项系数不能为 0 等，正确地写出二次项的系数、一次项的系数和常数项．例如，把关于 x 的方程 $(x+a)(x-b)+(x-a)(x+b)=2a(ax-b)$ 化为一般形式，并写出二次项系数、一次项系数及常数项．

首先由题知 x 是未知数，a、b 是字母系数．然后把方程化为一般形式为

$$x^2-a^2x=0$$

所以二次项系数为 1，一次项系数为 $-a^2$，常数项为 0．

2．用公式法解字母系数的一元二次方程．所以说这是一个难点，是因为除有上面讲的情况外，在解方程的过程中还要确定 b^2-4ac 的情况，以及二次根式的化简，并且计算也比较麻烦，易于出现错误．例如用公式法解关于 x 的方程．

$$x^2+2m^2+mn=n^2+3mx$$

解：把方程化为关于 x 的一般形式的一元二次方程，得

$$x^2-3mx+(2m^2+mn-n^2)=0$$

$\because$ $a=1$，$b=-3m$，$c=2m^2+mn-n^2$

$\therefore$ $b^2-4ac=(-3m)^2-4\times1\times(2m^2+mn-n^2)$

$$=9m^2-8m^2-4mn+4n^2$$

$$=m^2-4mn+4n^2$$

$$=(m-2n)^2\geqslant0$$

$\therefore$ $x=\dfrac{3m\pm\sqrt{(m-2n)^2}}{2}=\dfrac{3m\pm(m-2n)}{2}$

$\therefore$ $x_1=2m-n$，$x_2=m+n$.

【典型例题解析】

例 1 判断下列方程哪个是一元二次方程.

（1）$0.2x^2-x+1=0$；

（2）$\sqrt{2}x^3-\sqrt{3}x^2-4=0$；

（3）$ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$；

（4）$x^2-3y-1=0$；

（5）$\dfrac{1}{x^2}-5x+1=0$.

分析：判定一个方程有两种方法：一是根据定义，二是看其是否是一元二次方程的一般形式.

解：（1）是．因为它具有一般形式.

（2）不是．因为它的未知数最高次数不是 2，而是 3，不符合一元二次方程的定义.

（3）是．因为它具有一元二次方程的一般形式，且 $a\neq0$.

（4）不是．因为方程中含有两个未知数，不符合一元二次方程的定义.

(5) 不是. 因为它不是整式方程，不符合一元二次方程的定义.

说明：因为在初中都是在实数范围内研究问题，所以一元二次方程中各项的系数及常数项都是实数，且二次项系数 $a\neq0$，一般说 $ax^2+bx+c=0$ 是一元二次方程就意味着 $a\neq0$，讨论问题时，要注意这个隐含条件. 实际上一元二次方程也可以这样来定义：具有 $ax^2+bx+c=0$（a、b、c 都是实数，且 $a\neq0$，b、c 可为 0）形式的方程叫做一元二次方程.

例 2 把关于 x 的方程 $5(2m^2x^2+x)=5x+3n^2$ 化成一般形式 $ax^2+bx+c=0$，并写出其中 a，b，c 的值.

解：将方程化为一般形式，得

$$10m^2x^2-3n^2=0$$

$\therefore\quad a=10m^2\ (m\neq0)$，$b=0$，$c=-3n^2$.

说明：因为方程是一元二次方程，所以 $a=10m^2\neq0$，所以 $m\neq0$. 缺项的系数为 0，所以 $b=0$. 常数项 c 是包括性质符号在内的，所以 $c=-3n^2$，而不是 $3n^2$.

例 3 用开平方法解下列方程：

(1) $x^2-9=0$；　　(2) $4(x+2)^2=0$；

(3) $(6x-1)^2=25$；　　(4) $(x-\frac{3a}{2})^2=(\frac{a}{2}+b)^2$.

分析：(1)、(2) 两个方程经变形为 $x^2=m$ 型，且 $m\geqslant0$；(3)、(4) 两个方程为 $(x+h)^2=m$ 型，且 $m\geqslant0$. 因此这四个方程都可以用开平方法来解.

解：(1) 方程 $x^2-9=0$ 两边加 9，得

$$x^2=9$$

解得　　$x=\pm3$

$\therefore\quad x_1=3$，$x_2=-3$

（2）方程 $4(x+2)^2=0$ 两边除以 4，得

$$(x+2)^2=0$$

两边开平方，得

$$x+2=0$$

解得，$x=-2$，即 $x_1=x_2=-2$.

（3）方程 $(6x-1)^2=25$ 两边开平方，得

$$6x-1=\pm 5$$

$\therefore\quad x_1=1,\ x_2=-\dfrac{2}{3}$.

（4）$\because\ (\dfrac{a}{2}+b)^2\geqslant 0$，$\therefore$ 方程 $(x-\dfrac{3a}{2})^2=(\dfrac{a}{2}+b)^2$ 开平方，得

$$x-\frac{3a}{2}=\pm\left(\frac{a}{2}+b\right)$$

$\therefore\quad x_1=2a+b,\ x_2=a-b$.

说明：凡一边是一个含有未知数的式子的平方，另一边是一个大于或等于 0 的常数的方程，都可以用直接开平方法来解．若另一边是小于 0 的常数，则方程无实数解．如方程 $2x^2+7=0$，变形为 $x^2=-\dfrac{7}{2}$，$-\dfrac{7}{2}<0$，因为负数没有平方根，所以方程没有实数解．

例 4 用配方法解下列方程：

（1）$x^2+2x-99=0$；（2）$x^2-4x-3=0$；

（3）$2x^2+5x-1=0$.

分析：将方程的常数项移到方程右边，可以看出，只要将方程（1）的左边加 1；方程（2）的左边加 4；方程（3）的左边加 $\dfrac{5}{2}$ 一半的平方即 $(\dfrac{5}{4})^2$，就可把这些方程的左边变为完全平方式．右边的常数若大于等于 0，方程就可解．

解：（1）移项，得　$x^2+2x=99$