牛津大学研究生教材

Graduate Texts

刘青 著

代数几何和算术曲线

世界图书出版公司
www.wpcbj.com.cn

代数几何和算术曲线

刘 清

Professor

CNRS Laboratoire de Théorie des Nombres et d'Algorithmique Arithmétique

Université Bordeaux 1

Translated by

Reinie Erné

Institut de Recherche Mathématique de Rennes

Université Rennes 1

图书在版编目（CIP）数据

代数几何和算术曲线 = Algebraic Geometry and Arithmetic Curves：英文/（德）刘青著．—影印本．—北京：世界图书出版公司北京公司，2012.3

ISBN 978-7-5100-4413-7

Ⅰ．①代…　Ⅱ．①刘…　Ⅲ．①代数几何—英文②代数曲线—英文　Ⅳ．①O187

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 030946 号

书　　名：	Algebraic Geometry and Arithmetic Curves
作　　者：	Qing Liu
中 译 名：	代数几何和算术曲线
责任编辑：	高蓉　刘慧
出 版 者：	世界图书出版公司北京公司
印 刷 者：	三河市国英印务有限公司
发　　行：	世界图书出版公司北京公司（北京朝内大街 137 号　100010）
联系电话：	010-64021602，010-64015659
电子信箱：	kjb@wpcbj.com.cn
开　　本：	24 开
印　　张：	25
版　　次：	2012 年 06 月
版权登记：	图字：01-2011-6313
书　　号：	978-7-5100-4413-7/O·929　　**定　　价：** 79.00 元

To my mother

影印版前言

自从上世纪 80 年代起，世界图书出版公司北京公司一直致力于与世界各国知名出版商合作，是国内最早开展购权影印图书出版工作的机构。时至今日，已经持续近 30 年，不仅引进的品种数独占鳌头，而且包括了大量在国际上具有深远影响的经典图书，受到了国内学者和专家的认可和好评。

现在应国内广大读者的要求，在获得牛津大学出社授权的前提下，世界图书出版公司北京公司将陆续影印出版该社各类丛书中的经典图书。牛津大学出版社是世界著名出版机构之一，每年出版的书籍、刊物超过四千种，其学术著作和教科书的作者均为相关领域的著名学者，其中不乏科学研究前沿的顶尖科学家和领军人物，书籍内容涵盖了最新的科学进展的各个方面，因此一直受到国内外科研人员和高校师生的高度评价，其中已经出版的数学和物理学系列丛书，如 *Oxford Graduate Texts in Mathematics*，*Oxford Graduate Texts*，*Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications* 和 *Oxford Mathematical Monographs* 在国内有着广泛的影响，受到普遍好评。

毫无疑问，考虑到我国的国情以及科学教育发展的迫切需要，这项工作的最大受益者将是那些经济尚不富裕，但却渴望学习知识，想及时了解最新科学技术成果的国内高校和研究机构中的莘莘学子，相对原版，影印版的价格他们更容易接受。在这里，中国的读者和我们出版公司要特别感谢牛津大学出版社以传播科技知识为重，授权世界图书出版公司北京公司影印出版该社系列丛书中的部分图书。我们相信，这些图书的引进，不仅会受到数学物理等相关专业的教师和研究生的欢迎，相关领域的科研人员也将会从中受益。

前　言

本书首先用概型语言介绍代数几何，然后通过对算术代数曲面和代数曲线约化理论的探讨，来介绍一般的理论。本书的雏形是分发给参加算术曲面理论研究生学习班的讲义。该讲义主要介绍算术曲线的几何基础，及其稳定约化理论。尽管这些理论在最近的学科发展中极具重要性，并在数论方面的影响不断增长。然而遗憾的是，现在还没有任何文献，以一种系统的方式，让学生或非本专业数学工作者能接受的深度，来介绍这些理论。本书的目的是把这些当今在算术几何中，经典且不可或缺的理论结合起来，从而易于让更多的人理解这些理论。

第一部分由前七章组成，主要介绍概型的一般理论。这对于学习代数几何的学生来说，依然是重要的。就全书而言，也许第二部分个别专题是不必要的。下面简要介绍一下构成前七章的内容。我坚信，代数几何和交换代数是密不可分的。这就是为什么第 1 章要从张量积，平坦性，以及形式完备化等交换代数方面的知识开始。这些概念将在以后章节中频繁出现。为了给出概型理论直观的基础知识，第 2 章首先介绍 Hilbert 零点定理，然后再介绍概型和概型之间的态射，以及其它的一些基本概念。第 3 章介绍概型的纤维积和基变换的基础概念。在给出恰当映射和投影映射之前，先检验在基变换下代数簇的行为。第 4 章处理概型以及概型间态射的局部理论，如正规性，光滑性等等。结尾给出 Zariski 主要定理的基本证明。第 5 章由凝聚层的理论，给出概型的整体性质构成。通过介绍投影概型上的凝聚层，我们定义层的 Cech 上同调，同时介绍一些基本的定理，例如 Serre 有限定理，形式函数定理，以及 Cech 上同调的一个应用——Zariski 连通性原理。第 6 章介绍几个特殊的凝聚层：微分层和特定情况下的（局部完全相交性）相对对偶层。最后，介绍了 Grothendieck 对偶定理。第 7 章首先介绍了除子的一般理论，然后是将其限制到某个数域的射影曲线。利用对偶定理，给出 Riemann - Roch 定理，以及 Hurwitz 定理的证明。本章以详细介绍 Picard 群结束，在此，不一定要求 Picard 群是定义在某个代数闭域的投影曲线上。一个算术（正规）曲面一般有奇异的纤维，依此而论，研究奇异代数曲面是非常必要的。这七章可以作为代数几何的一个基本课程。

第二部分由三章组成。第 8 章首先介绍了爆破理论，在本章的中间部分，稍微偏离本书的主题，不加证明的给出了一些交换代数的结果，诸如 Cohen - Macaulay，Nagata 和优环。然后，我们给出了 Dedekind 环上纤维曲面的一般性质和曲面奇异消解理论。第 9 章介绍算术曲面上的相交理论及其应用，还特别给出附益公式，分解定理，Castelnuovo 准则和极小正则模型的存在性。最后一章介绍代数曲线的约化理论。我们用前面讲的算术曲线的知识，讨论约化的一般性质，然后，具体介绍椭圆曲线的几种不同的约化。本章最后，讨论稳定曲线和稳定约化，给出由 Artin - Winters 证明的 Ddeligne - Munford 稳定约化定理，同时，给出计算稳定约化的几个具体例子。

从一开始，本书就运用代数几何思想阐述各种理论。特别是，我们不用假设基域是代数封闭的，也不用要求基域是特征 0，甚至不用要求基域是完备的。同样，对于一般的算术曲面，不用对基环（Dedekind 环）附加任何前提。事实上，不需要花很大的精力去研究一般性条件，而不会以一种不合理的方式影响理论的表现形式。其优点是，从开始我们就具有好的思维范式。

尽其可能，本书的内容是自成体系。阅读本书对基础知识要求很少。原则上，一个优秀的大学生，任何一个研究生，都具备阅读本书的基础知识。需要强调的是，对于初学者而言，用例子阐述概念是很有用的，做练习也是很必要的。每一章的最后，我们都列出了一些练习题。其中，部分是书中定理的简单应用，其余是一些结论，但不适合放入正文。本书内容足够详细，读者可以轻松的读懂每个细节。读完本书以后，读者可以更容易地阅读一些更加专业的文献，例如参考文献第 15 和第 25。

致谢

有机会感谢 Michel Matignon 和 Martin Talyor，是我的荣耀，是他们鼓励我把课堂讲义编写成书。Reinie Erne 用他在语言和数学方面的天赋，把本书从法语翻译成英语。感谢他的耐心和慷慨帮助。还要感谢 Philippe Cassou - Nogues，Reinie Erne ，Arnaud Lacoume，Thierry Sageaux. Alain Thiery，特别感谢 Dino Lorenzini，Sylvain Maugeais，正是他们的警敏，发现和修改了书稿中许多错误。还要感谢 Jean Fresnel，Dino Lorenzini，Michel Matigon，在本书编写过程中，与我在数学方面的探讨。同时要感谢 Bordeaux 基础数学实验室为我提供的宜人的写作环境。

由衷地感谢我的朋友和家人给我的支持和鼓励，非常抱歉我不能把他们的名字一一列出。最后要特别感谢 Isabelle，感谢在我编写过程中，她对我的支持和容忍。没有她的牺牲和鼓励，本书不会这么快面世。

编排格式

本书按照章/节/小节的格式编排。每节后面都有一些习题。陈述和习题在每小节单独编号。对结论和定义的参考按照章号、节号、小节号排列，如果参考的内容在同一章，则省略章号，例如命题2.7；命题3.2.7分别表示，本章第2节，命题2.7，和第3章中的第2节命题2.7。相反，当我们参考节，或者是小节时候经常按章、节、小节的顺序排列，例如3.2节，3.2.4小节。

勘误表

勘误表将会放在如下网站上：

http：//www. math. u – bordeaux. fr/ ~ liu/Book/errata. html

Q. L.

Bordeaux

2001年6月

平装版前言

自从第一版在2002年发行以来，许多人对本书提出了很多宝贵的意见和建议，在此对他们表示感谢。由衷地感谢Robert Ash，Michael Brunnbauer，Oliver Dodane，Remy Eupherte，Xander Faber，Anton Geraschenko，Yves Laszlo，Yogesh More，特别是Lars Halvard Halle，Carlos Ivorra，Dino Lorenzini，Rene Schmidt。

本书和第一版相比所有的变化在如下网页中可找到，该网页也包含本版的勘误表。

http//www. math. u – bordeaux. fr/liu/Book/errata. html

Q. L.

Bordeaux

2006年3月

目　录

1　交换代数的若干预备知识 1

1.1　张量积 1

1.1.1　模的张量积 1

1.1.2　张量积的右正合性 4

1.1.3　代数的张量积 5

1.2　平坦性 6

1.2.1　左正合性：平坦性 6

1.2.2　平坦性的局部性质 9

1.2.3　忠实平坦性 12

1.3　形式完备化 15

1.3.1　逆向极限与完备化 15

1.3.2　Artin – Rees 引理及其应用 20

1.3.3　Noether 局部环情形 22

2　概型的一般性质 26

2.1　环的谱 26

2.1.1　Zariski 拓扑 26

2.1.2　代数集 29

2.2　赋环拓扑空间 33

2.2.1　层 33

2.2.2　赋环拓扑空间 37

2.3　概型 41

2.3.1　概型的定义和例子 42

2.3.2　概型之间的态射 45

2.3.3　射影概型 50

2.3.4　Noether 概型、代数簇 55

2.4　既约概型与整概型 59

2.4.1　既约概型 59

2.4.2 不可约分支 61
2.4.3 整概型 64
2.5 维数 67
2.5.1 概型的维数 68
2.5.2 Noether 概型的情形 70
2.5.3 代数簇的维数 73

3 态射与基变换 78
3.1 基变换技巧 78
3.1.1 纤维积 78
3.1.2 基变换 81
3.2 对代数簇的应用 87
3.2.1 有限型态射 87
3.2.2 代数簇与基域扩张 89
3.2.3 取值于基域扩张的点 92
3.2.4 Frobunius 94
3.3 态射的若干整体性质 99
3.3.1 分离态射 99
3.3.2 正常态射 103
3.3.3 射影态射 107

4 一些局部性质 115
4.1 正规概型 115
4.1.1 正规概型与正则函数的扩张 115
4.1.2 正规化 119
4.2 正则概型 126
4.2.1 概型的切空间 126
4.2.2 正则概型与 Jacobi 准则 128
4.3 平坦态射与光滑态射 135
4.3.1 平坦态射 136
4.3.2 平展态射 139
4.3.3 光滑态射 141
4.4 Zariski 主定理及其应用 149

5 凝聚层与 Cech 上同调 157
5.1 概型上的凝聚层 157

5.1.1 模层 157
5.1.2 仿射概型上的逆凝聚层 159
5.1.3 凝聚层 161
5.1.4 射影概型上的逆凝聚层 164
5.2 Cech 上同调 178
5.2.1 可微模与取值于层的上同调 178
5.2.2 分离概型上的 Cech 上同调 185
5.2.3 高阶正项与平坦基变换 188
5.3 射影概型的上同调 195
5.3.1 正项定理 195
5.3.2 连通性原理 198
5.3.3 纤维的上同调 201

6 微分层 210
6.1 Kahler 微分 210
6.1.1 相对微分形式模 210
6.1.2 （1 次）相对微分层 215
6.2 光滑态射的微分研究 220
6.2.1 光滑准则 220
6.2.2 局部结构与截面提升 223
6.3 局部完全交 227
6.3.1 正则浸入 228
6.3.2 局部完全交 232
6.4 对偶理论 236
6.4.1 行列式 236
6.4.2 典范层 238
6.4.3 Grothendieck 对偶 243

7 除子及其对曲线的应用 252
7.1 Cartier 除子 252
7.1.1 亚纯函数 252
7.1.2 Cartier 除子 256
7.1.3 Cartier 除子的逆像 260
7.2 Weil 除子 267
7.2.1 余维为 1 的代数闭链 267
7.2.2 Van der Waerden 纯性定理 272

7.3 Riemann - Rock 定理 275

7.3.1 除子的次数 275

7.3.2 射影曲线的 Riemann - Rock 定理 278

7.4 代数曲线 284

7.4.1 小亏格曲线的分类 284

7.4.2 Hurwitz 公式 289

7.4.3 超椭圆曲线 292

7.4.4 群概型与 Picard 簇 297

7.5 奇异曲线、pic(x) 的结构 309

8 曲面的双有理几何 317

8.1 爆破 317

8.1.1 定义与基本性质 318

8.1.2 爆破的普适性质 323

8.1.3 爆破与双有理态射 326

8.1.4 通过涨开点正规化曲线 330

8.2 优概型 332

8.2.1 泛链式概型与维数公式 332

8.2.2 Cohen - Macaulay 环 335

8.2.3 优概型 341

8.3 纤维化曲面 347

8.3.1 纤维的性质 347

8.3.2 赋值与纤维化曲面的双有理类 353

8.3.3 收缩 356

8.3.4 奇点解消 361

9 正则曲面 375

9.1 正则曲面上的相交理论 375

9.1.1 局部交 376

9.1.2 纤维化曲面上的交 381

9.1.3 与水平除子做交、附加公式 388

9.2 交与态射 394

9.2.1 分解定理 394

9.1.2 投射公式 397

9.2.3 双有理态射与 Picard 群 401

9.2.4 嵌入消解 404

9.3 极小曲面 411
9.3.1 例外除子与 Castelnuovo 准则 412
9.3.2 相对极小曲面 418
9.3.3 极小正则模型的存在性 421
9.3.4 极小奇点解消与极小嵌入解消 424
9.4 对收缩的应用；典范模型 429
9.4.1 Artin 可缩性准则 430
9.4.2 切空间计算 434
9.4.3 典范模型 438
9.4.4 Weierstrass 模型与椭圆曲线的正则模型 442

10 代数曲线的约化 454
10.1 模型与约化 454
10.1.1 代数曲线的模型 455
10.1.2 约化 462
10.1.3 约化映射 467
10.1.4 图 471
10.2 椭圆曲线的约化 483
10.2.1 极小正则模型的约化 484
10.2.2 椭圆曲线的 Neron 模型 489
10.2.3 势半稳定约化 498
10.3 代数曲线的稳定约化 505
10.3.1 稳定曲线 505
10.3.2 稳定约化 511
10.3.3 稳定模型存在的若干充分条件 521
10.4 Deligne - Mumford 定理 532
10.4.1 基概型上的简化 533
10.4.3 Artin - Winters 的证明 537
10.4.3 势稳定约化计算的例子 543

参考文献 557
索引

1

Some topics in commutative algebra

Unless otherwise specified, all rings in this book will be supposed commutative and with unit.

In this chapter, we introduce some indispensable basic notions of commutative algebra such as the tensor product, localization, and flatness. Other, more elaborate notions will be dealt with later, as they are needed. We assume that the reader is familiar with linear algebra over a commutative ring, and with Noetherian rings and modules.

1.1 Tensor products

In the theory of schemes, the fibered product plays an important role (in particular the technique of base change). The corresponding notion in commutative algebra is the tensor product of modules over a ring.

1.1.1 Tensor product of modules

Definition 1.1. Let A be a commutative ring with unit. Let M, N be two A-modules. The *tensor product of M and N over A* is defined to be an A-module H, together with a bilinear map $\phi : M \times N \to H$ satisfying the following universal property:

> For every A-module L and every bilinear map $f : M \times N \to L$, there exists a unique homomorphism of A-modules $\tilde{f} : H \to L$ making the following diagram commutative:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & L \\ H \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Proposition 1.2. *Let A be a ring, and let M, N be A-modules. The tensor product (H, ϕ) exists, and is unique up to isomorphism.*

Proof As the solution of a universal problem, the uniqueness is automatic, and its proof is standard. We give it here as an example. Let (H, ϕ) and (H', ϕ') be two solutions. By the universal property, ϕ and ϕ' factor respectively as $\phi = \tilde{\phi} \circ \phi'$ and $\phi' = \tilde{\phi}' \circ \phi$. It follows that $\phi = (\tilde{\phi} \circ \tilde{\phi}') \circ \phi$. As $\phi = \mathrm{Id} \circ \phi$, it follows from the uniqueness of the decomposition of ϕ that $(\tilde{\phi} \circ \tilde{\phi}') = \mathrm{Id}$. Thus we see that $\tilde{\phi} : H \to H'$ is an isomorphism.

Let us now show existence. Consider the free A-module $A^{(M \times N)}$ with basis $M \times N$. Let $\{e_{x,y}\}_{(x,y) \in M \times N}$ denote its canonical basis. Let L be the submodule of $A^{(M \times N)}$ generated by the elements having one of the following forms:

$$\begin{cases} e_{x_1+x_2,y} - e_{x_1,y} - e_{x_2,y} \\ e_{x,y_1+y_2} - e_{x,y_1} - e_{x,y_2} \\ e_{ax,y} - e_{x,ay}, \quad ae_{x,y} - e_{ax,y}, \quad a \in A. \end{cases}$$

Let $H = A^{(M \times N)}/L$, and $\phi : M \times N \to H$ be the map defined by $\phi(x, y) =$ the image of $e_{x,y}$ in H. One immediately verifies that the pair (H, ϕ) verifies the universal property mentioned above. □

Notation. We denote the tensor product of M and N by $(M \otimes_A N, \phi)$. In general, the map ϕ is omitted in the notation. For any $(x, y) \in M \times N$, we let $x \otimes y$ denote its image by ϕ. By the bilinearity of ϕ, we have $a(x \otimes y) = (ax) \otimes y = x \otimes (ay)$ for every $a \in A$.

Remark 1.3. By construction, $M \otimes_A N$ is generated as an A-module by its elements of the form $x \otimes y$. Thus every element of $M \otimes_A N$ can be written (though not in a unique manner) as a finite sum $\sum_i x_i \otimes y_i$, with $x_i \in M$ and $y_i \in N$. In general, an element of $M \otimes_A N$ cannot be written $x \otimes y$.

Example 1.4. Let $A = \mathbb{Z}$, $M = A/2A$, and $N = A/3A$. Then $M \otimes_A N = 0$. In fact, for every $(x, y) \in M \times N$, we have $x \otimes y = 3(x \otimes y) - 2(x \otimes y) = x \otimes (3y) - (2x) \otimes y = 0$.

Proposition 1.5. *Let A be a ring, and let M, N, M_i be A-modules. We have the following canonical isomorphisms of A-modules:*

(a) $M \otimes_A A \simeq M$;

(b) *(commutativity)* $M \otimes_A N \simeq N \otimes_A M$;

(c) *(associativity)* $(L \otimes_A M) \otimes_A N \simeq L \otimes_A (M \otimes_A N)$;

(d) *(distributivity)* $(\oplus_{i \in I} M_i) \otimes_A N \simeq \oplus_{i \in I}(M_i \otimes_A N)$.

Proof Everything follows from the universal property. Let us, for example, show (a) and (d).

(a) Let $\phi : M \times A \to M$ be the bilinear map defined by $(x, a) \mapsto ax$. For any bilinear map $f : M \times A \to L$, set $\tilde{f} : M \to L, x \mapsto f(x, 1)$. Then $f = \tilde{f} \circ \phi$, and $\tilde{f}$ is the unique linear map $M \to L$ having this property. Hence (M, ϕ) is the tensor product of M and A.

(d) Let $\phi : (\oplus_{i\in I} M_i) \times N \to \oplus_{i\in I}(M_i \otimes_A N)$ be the map defined by

$$\phi : \Big(\sum_i x_i, y\Big) \mapsto \sum_i (x_i \otimes y).$$

Let $f : (\oplus_{i\in I} M_i) \times N \to L$ be a bilinear map. For every $i \in I$, f induces a bilinear map $f_i : M_i \times N \to L$ which factors through $\widetilde{f}_i : M_i \otimes_A N \to L$. One verifies that f factors uniquely as $f = \tilde{f} \circ \psi$, where $\psi : (\oplus_{i\in I} M_i) \times N \to (\oplus_{i\in I} M_i) \otimes N$ is the canonical map and $\tilde{f} = \oplus_i \widetilde{f}_i$. Hence $\oplus_{i\in I}(M_i \otimes_A N)$ is the tensor product of $(\oplus_{i\in I} M_i)$ with N. □

Corollary 1.6. *Let M be a free A-module with basis $\{e_i\}_{i\in I}$. Then every element of $M \otimes_A N$ can be written uniquely as a finite sum $\sum_i e_i \otimes y_i$, with $y_i \in N$. In particular, if A is a field and $\{e_i\}_{i\in I}$ (resp. $\{d_j\}_{j\in J}$) is a basis of M (resp. of N), then $\{e_i \otimes d_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ is a basis of $M \otimes_A N$.*

Remark 1.7. The associativity of the tensor product allows us to define the tensor product $M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_n$ of a finite number of A-modules. This tensor product has a universal property analogous to that of the tensor product of two modules, with the bilinear maps replaced by multilinear ones.

Definition 1.8. Let $u : M \to M'$, $v : N \to N'$ be linear maps of A-modules. By the universal property of the tensor product, there exists a unique A-linear map $u \otimes v : M \otimes_A N \to M' \otimes_A N'$ such that $(u \otimes v)(x \otimes y) = u(x) \otimes v(y)$. In fact, the map $g : M \times N \to M' \otimes_A N'$ defined by $g(x, y) = u(x) \otimes v(y)$ is clearly bilinear, and hence factors uniquely as $(u \otimes v) \circ \phi$, where ϕ is the canonical map $M \times N \to M \otimes N$. The map $u \otimes v$ is called the *tensor product of u and v*. The notation is justified by Exercise 1.2.

Let $\rho : A \to B$ be a ring homomorphism, and N a B-module. Then ρ induces, in a natural way, the structure of an A-module on N: for any $a \in A$ and $y \in N$, we set $a \cdot y = \rho(a)y$. We denote this A-module by $\rho_* N$, or simply by N.

Definition 1.9. Let M be an A-module. We can endow $M \otimes_A N$ with the structure of a B-module as follows. Let $b \in B$. Let $t_b : N \to N$ denote the multiplication by b, and for any $z \in M \otimes_A N$, set $b \cdot z := (\mathrm{Id}_M \otimes t_b)(z)$. One easily verifies that this defines the structure of a B-module. We denote the B-module $M \otimes_A B$ by $\rho^* M$. This is called the *extension of scalars of M by B*. By construction, we have $b(x \otimes y) = x \otimes (by)$ for every $b \in B$, $x \in M$, and $y \in N$.

Proposition 1.10. *Let $\rho : A \to B$ be a ring homomorphism, M an A-module, and let N, P be B-modules. Then there exists a canonical isomorphism of B-modules*

$$M \otimes_A (N \otimes_B P) \simeq (M \otimes_A N) \otimes_B P.$$

Proof Let us show that there exist A-linear maps

$$f : M \otimes_A (N \otimes_B P) \to (M \otimes_A N) \otimes_B P, \quad g : (M \otimes_A N) \otimes_B P \to M \otimes_A (N \otimes_B P)$$

such that for every $x \in M$, $y \in N$, and $z \in P$, we have $f(x \otimes (y \otimes z)) = (x \otimes y) \otimes z$ and $g((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes (y \otimes z)$. This will imply that f is an isomorphism, with inverse g. The B-linearity of f follows from this identity.

Let us fix $x \in M$. Let $t_x : N \to M \otimes_A N$ denote the A-linear map defined by $t_x(y) = x \otimes y$. Consider the map $h : M \times (N \otimes_B P) \to (M \otimes_A N) \otimes_B P$ defined by $h(x, u) = (t_x \otimes \mathrm{Id}_P)(u)$. This map is A-bilinear, and hence induces an A-linear map f as desired. The construction of g is similar. □

Taking $N = B$ in the proposition above, we obtain:

Corollary 1.11. *Let $\rho : A \to B$ be a ring homomorphism, let M be an A-module, and N a B-module. There exists a canonical isomorphism of B-modules*

$$(M \otimes_A B) \otimes_B N \simeq M \otimes_A N \qquad \text{(simplification by } B\text{)}.$$

1.1.2 Right-exactness of the tensor product

Let us recall that a *complex* of A-modules consists of a (finite or infinite) sequence of A-modules M_i, together with linear maps $f_i : M_i \to M_{i+1}$, such that $f_{i+1} \circ f_i = 0$. A complex is written more visually as

$$\cdots \to M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+2} \to \cdots .$$

The complex is called *exact* if $\mathrm{Ker}(f_{i+1}) = \mathrm{Im}(f_i)$ for all i. An exact complex is also called an *exact sequence*. For example, a sequence

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \quad (\text{resp. } M \xrightarrow{f} N \to 0)$$

is exact if and only if f is injective (resp. surjective).

Let $f : N' \to N$ be a linear map of A-modules. For simplicity, for any A-module M, we denote the linear map $f \otimes \mathrm{Id}_M : N' \otimes_A M \to N \otimes_A M$ by f_M.

Proposition 1.12. *Let A be a ring, and let*

$$N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \to 0$$

be an exact sequence of A-modules. Then for any A-module M, the sequence

$$N' \otimes_A M \xrightarrow{f_M} N \otimes_A M \xrightarrow{g_M} N'' \otimes_A M \to 0$$

is exact.

Proof The surjectivity of g_M follows from that of g (use Remark 1.3). It remains to show that $\mathrm{Ker}(g_M) = \mathrm{Im}\, f_M$; in other words, that the canonical homomorphism $\widetilde{g} : (N \otimes_A M)/(\mathrm{Im}\, f_M) \to N'' \otimes_A M$ is an isomorphism. Let $h : N'' \times M \to (N \otimes_A M)/(\mathrm{Im}\, f_M)$ be defined by $h(x, z) =$ the image of $y \otimes z$ in the quotient, where $y \in g^{-1}(x)$. The map h is well defined and moreover bilinear. It therefore induces a linear map $\widetilde{h} : N'' \otimes_A M \to (N \otimes_A M)/(\mathrm{Im}\, f_M)$, and it is easy to see that this is the inverse of $\widetilde{g}$. □