新編各科常識之

立體平面幾何問答

1933

上海南華書店出版

新編各科常識之一

立體平面幾何問答

1836

赵伟铭

南華書店出版
山東路參家圖

中華勵進會編輯

定價四角
洋裝一冊

立體平面幾何問答

立體幾何之部

(一)定義

I. 平面及直線之定義

1. 立體幾何學　立體幾何學者，論其不在同一平面上之圖形之幾何學也。

2. 平面　平面者，通過其面上，任意二點之直線全含於其表面上者也。

3. 平面與直線之交　平面與直線僅相會於一點，則稱此平面與直線相交之點曰交點。

4. 二平面之交　二平面僅相會於一直線則此二平面曰

相交其直線曰交線，或簡稱曰交。

5. 直線與平面之平行　直線與平面延長至無限決不相會者，則此直線與平面互爲平行。

6. 二平面之平行　二平面任意延長至無限，決不相會者。則此二平面互爲平行。

7. 垂線　一直線交於一平面，過其交點於平面內，引一切直線均垂直於此直線者，則此直線爲其平面之垂線，或曰此直線之平面互爲垂直，其交點則曰垂線足。

8. 斜線　不垂直於平面而與平面相交之直線，是謂斜線，其交點則曰斜線足。

9. 不在同一平面上二直線之角　不在同一平面上二直線所成之角，即從任意一點與此直線平行，引二直線所成之角。

10 點與平面之距離　平面外一點與其平面之距離即從其點向平面所作垂線之長。

11 不在同一平面上之二直線之距離　不在同一平面上二直線之距離，即與此二直線相交且垂直之直線交於兩直線間之有限部分。

12 直線與其平行之平面之距離　直線與其平行平面之距離，卽垂直於此直線與平面之垂線夾於兩者之間之最短線。

13 平行二平面間之距離　平行二平面間之距離，卽其公垂線夾於其間之至短線。

14 點之正射影　從平面外一點至其平面上引垂線，此垂線在此平面上相會之點，曰此點在此平面上之正射影。

15 線之正射影　一線在一平面上之正射影，卽其線上之點在其平面上之正射影之軌跡也。

16 直線與平面所成之角　一直線與一平面所成之角，卽此直線與其在平面上之正射影所成之角。

II. 二面角及多面角之定義

1. 二面角　同一直線上作二平面，其所成之圖形，曰二面角。

2. 二面角之稜及面　二角面之二平面之交線曰二面角之稜，其平面則曰二面角之面。

3. 二面角之大小　二面角之大小，卽一面以稜爲軸，迴轉之至他面之位置而止，其迴轉量之大小，卽二

面角之大小。

4. 相等之二面角　完全相重合之二面角，曰相等之二面角。

5. 接二面角　兩個二面角，其稜之一面爲共有，且在此面之兩側，則此兩二面角曰接二面角，亦稱鄰接二面角。

6. 對稜二面角　兩平面相交成四個二面角，則其相對之二面角，曰對稜二面角。

7. 垂直面　一平面與他平面相交而成相等之接二面角，則前者爲後者之垂直面。

8. 直二面角　一平面垂直於他平面，則此二面角曰直二面角。

9. 斜面　不垂直於一平面之平面，曰其平面之斜面。

10 補角　二個二面角之和爲直二面角之二倍，則此二個二面角互爲補角。

11 二面角之直線角　從二面角之稜上一點，向各面作垂直於稜之直線，則此二垂線所成之角，曰二面角之直線角，亦稱二面角之平面角。

12 多面角　多面共有一點，其隣接之各平面，以交線

爲限，且以共有點爲限者，則此等平面所成空間之部分曰多面角。亦稱立體角。

此共有點曰其頂點，其平面曰多面角之面，而各面與鄰面之交線曰其稜。

13 三面角　由三平面而成之多面角（由平面之數而有四面角五面角等）。

14 多面角之平面角　各稜與其鄰接之稜所成之角曰多面之平面角。

15 凸多面角及凹多面角　多面角之任意一面延長之，其多面角全部均在此面一方之側，是爲凸多面角。若一部分在此面之一方，又一部分在反對之側，則此多面角曰凹多面角。

16 稜角　在各二面間多面角之內部之二面角曰稜角。

III. 關於多面體之定義

1. 多面體　多面體乃由多面所包圍之立體，故多面體之界限爲多角形，此多角形曰多面體之面，其邊曰多面體之稜，其頂點曰多面體之頂點。

多面體至少須有四面以上，由其面之數而有四面體五面體等名稱。

2. 多面體之對角線　不在同一面上之頂點連成之直線，爲多面體之對角線。

3. 凸多面體及凹多面體　延長任何之面，其多面體均在此面之一方者是謂凸多面體，否則爲凹多面體。

4. 角柱　平行於同一直線之平面與二個平行平面相交，其所圍成之多面體曰角柱。

此二個平行平面曰角柱之底面，其他各面曰側面，其故底面爲二個相等之多角形，而側面爲平行四邊形。

5. 側稜　側面與側面之交線是也。

6. 直角柱　側稜垂直於底面之角柱曰直角柱。

7. 斜角柱　側稜不垂直於底面之角柱曰斜角柱。

8. 角柱之高　兩底面間之距離曰角柱之高。

9. 正角柱　底面爲正多角形之直角柱曰正角柱。

10 截面　一平面交於多面體，其所成之多角形，曰多面體之截面。

11 角柱之直截面　垂直於側稜之截面曰直截面。

12 平行六面體　平行六面體者，底面爲平行四邊形之角柱也。

13 直角體　平行六面體之各面皆爲矩形，則此多面體曰直角體。

14 立方體　平行六面體之各面皆爲正方形者，曰立方體。

15 角錐　一個多角形，以此多角形之各邊爲底，多角形平面外一點爲公共頂點之三角形平面所包圍之多面體，是謂角錐，其公共頂點，或角錐之頂點，其多角形曰底，他面爲側面，不屬於底之稜曰側稜。

16 角錐之高　自頂點至底作垂線，此垂線之長即角錐之高。

17 四面體　三角錐又稱四面體。

18 正角錐　角錐之底爲正多角形，而自頂點至底，作垂線過此多角形中心者，謂之正角錐。

(正角錐之側面皆爲相等二等邊三角形)

自正角錐之頂點至底面一邊作垂線，此垂線之長，曰正角錐之斜高。

19 正多面體　多面體之各面皆爲相等之正多角形，而多面角皆相等者曰正多面體。

IV. 關於球之定義

1. 球　以半圓之直徑爲軸，迴轉一周，其所生之體曰球。

2. 球面　球之面曰球面。

半圓迴轉成球，其半圓之中心曰球之中心。

中心與球面上一點連結之直線，曰球之半徑。

直徑之兩端曰球之對點。

中心亦稱球心。

3. 大圓周，　大圓形　以過中心之平面截球，則其截口曰大圓形，其圓周曰大圓周。

4. 小圓形，　小圓周　以不過中心之平面截球，則其截口曰小圓形，其圓周曰小圓周。

5. 切平面　平面與球只公有一點，則其平面曰球之切面，或曰相切，其點曰切點。

6. 切線　直線與球只相會於一點，則此直線曰球之切線。

7. 球之內切外切　二球面祇公有一點，則曰相切，一球在他球之外則曰外切，若在他球之內，則曰內切。其共有之點曰切點。

8. 相交之球面　二球面相會於多點，則此球面曰相

交。

9. 軸及極　過大圓形或小圓形之中心而垂直於其面之直線，曰此圓之軸，此直線與球面相交之二點，曰此圓之極。

10 弧之角　二弧相交於其交點，作切於各弧之二直線，此二直線所成之角曰弧角。

若弧為大圓周之弧，則二切線垂直於過頂點之直徑，故此弧之角為二個大圓面所成之二面角，二大圓之角曰球面角。

11 半球　以大圓分球為二部分，則其各部分曰半球

12 球面多角形　以大圓周之弧包圍球面之一部分，曰球面多角形。

13 球面三角形　以三個大圓周之弧包圍球面之一部分，曰球面三角形。

14 月形　以二個大圓周之弧包圍球面之一部分曰月形。

15 極三角形　一個球面三角形，其各邊二極之中，與其邊相對之頂點在同側之極以大圓弧連成之球面三角形曰原三角形之極三角形。

16 球面過剩　球面三角形之角之和，與二直角之差稱為此三角形之球面過剩。

V　關於圓柱及圓錐之定義

1. 圓柱　以矩形之一邊為軸迴轉一周，其所成之體曰圓柱。

其為軸之一邊曰圓柱之軸，其對邊所生之面曰側面，畫此側面之邊，曰其母線。

垂直於迴轉軸之二邊所成垂直於軸之面，裏之底，而底為二個相等之圓，且互相平行。

圓柱之高卽兩底間之距離。

2. 相似圓柱　二個相似矩形，以其對位之邊為軸之迴轉之，則其所生之圓柱曰相似圓柱。

3. 圓錐　以直角三角形靠直角之一邊為軸迴轉，一次所成之體曰圓錐。其為軸之邊曰圓錐軸，又斜邊所生之面曰圓錐之側面，斜邊之各位置曰其母線。

母線之交點，為圓錐之頂點。

垂直於軸之一邊於迴轉時成垂直於軸之平面形，是謂底，而底為圓錐。

圓錐之高，卽自頂點至底之垂直距離。

自頂點至底之圓周上一點引直線是爲圓錐之斜高。

4. 相似圓錐 二個相似直角三角形，以其對應之靠直角一邊爲軸而迴轉之，則其所成二圓錐曰相似圓錐。

VI. 關於體之表面積及體積之定義

1. 角柱之面積 角柱側面面積之和曰側面積，其全面積乃爲側面積兩底面之和。

2. 角錐之面積 角錐之側面三角形之全面積相加曰角錐側面積，再加底之面積則爲全面積。

3. 正角錐之斜高 正角錐之斜高，即側面之等腰三角形之高。

4. 角柱與圓柱之接切 角柱之底之多角形內，接於圓柱之底之圓，而以側稜爲母線，則此角柱曰內接於圓柱，而圓柱曰外接於角柱。

又於圓柱一底之圓周外切正多角形，以此爲底作角柱，其高等於圓柱之高，則角柱之他底當外切於圓柱他底之圓周，而此角柱與圓柱可從母線相接觸，如是則此角柱曰外切於圓柱，其圓柱曰內切於角柱。

5. 圓柱之側面積 圓柱之側面積，即其側面之面積。

6. 圓錐與角錐之接切　角錐之底之多角形內接於圓錐之圓底而側稜與母線一致，則此角錐曰內接於圓錐，而圓錐曰外接於角錐。

又於圓錐之底圓周外切正多角形，以多角形之頂點與圓錐之頂點連結，得正角錐。如是底之多角形外切於圓錐之底，其切點與頂點連結之線爲圓錐之母線時，則此角錐曰外切於圓錐，而圓錐曰內切於角錐。

7. 圓錐臺　圓之外底之平行平面裁之，則此平面與底面間所餘圓錐之部分曰圓錐臺。

其兩平面曰底，兩平面間之距離曰高。

8. 圓錐側面積　圓錐側面之面積曰側面積。

9. 帶形　帶形者，卽二平行平面間所有球之部分也。

其面平面間之距離曰高，兩平面截球之截口曰底。

大圓周之弧，以直徑爲軸而迴轉一周，則生帶形。

10 正多角扇形　正折線之兩端與內切或外接之折線之弧之中心連結其所成之形，曰正多角扇形。

其弧之中心，曰扇形之中心。

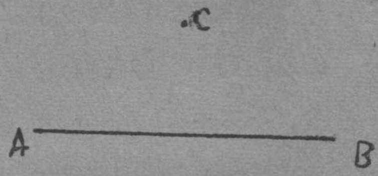
11 扇形質　扇形以不過其形內之直徑爲軸而迴轉之一周，其所成之體曰扇形體。

扇形體之底屬於扇形之弧迴轉所生之帶形。

(二)習題

1. 含一直線及此直線外之一點祇能作一平面。

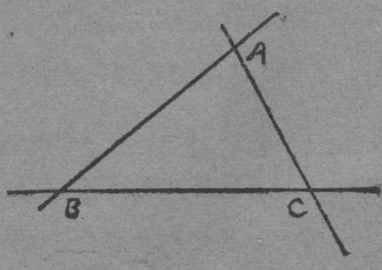
(題意) 含直線AB及點C作平面，祇能作一平面。



證 含AB作任意之平面以AB為軸而迴轉之，將其所作之平面增廣至無限，得過任何點，故得過C點，故含AB直線及C點有一平面，而此平面之前後均不含C點。故如題云。

2 於三點相交之三直線在同一平面上。

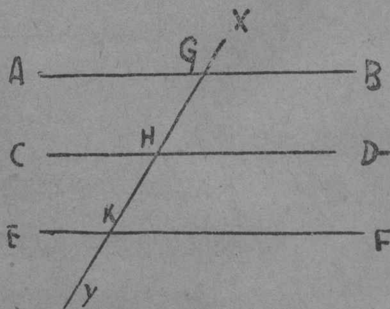
證 三直線之交點，為A,B,C,含直線A,B,及點C之平面，有一面惟限於一



，設此平面爲P,則直線AC,BC,其上二點A,C及B,C在平面P上，即三直線AB,BC,CA,在同一平面P上。

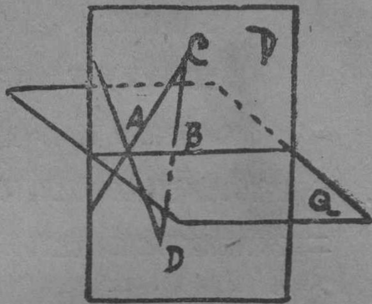
3. 互相平行之多數直線，相交於一直線時，則此等直線均在同一平面上。

證　今三平行直線AB,CD,EF相交於一直線XY之G,H,K點，則XY在AB,CD所定平面上，換言之，CD在AB,XY所定之平面上，同樣EF亦在AB,XY所定之平面上，同樣任何之平行線均在此平面上。



4. 二平面相交，其交處爲一直線。

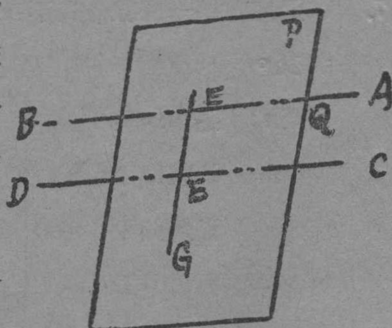
證　P,Q爲二平面，共有一點A,則共有過A點之一直線，此直線以外之點，則非共有，在P平面上通過A點，任意引二直線AC,AD,若其一在Q面上，則二平面共有過A點之一直線，否則



連結CD與Q面交於B點，而CD在P上，卽B點亦在P上，故兩平面共有A,B二點，由是共有AB直線，又若共有AB直線外之點，則含一直線與其外一點有二平面P,Q是與含一直線及此直線外之一點祇能作一平面之理不合，故二平面之交處爲一直線。

5. 一平面交於二平行線之一，則亦必交於他一。

(題意) A B, C D, 平面P交其A B於E,亦必交於CD。



證 平行線AB,CD之面Q,與P共有E點，故共有直線EG,而E