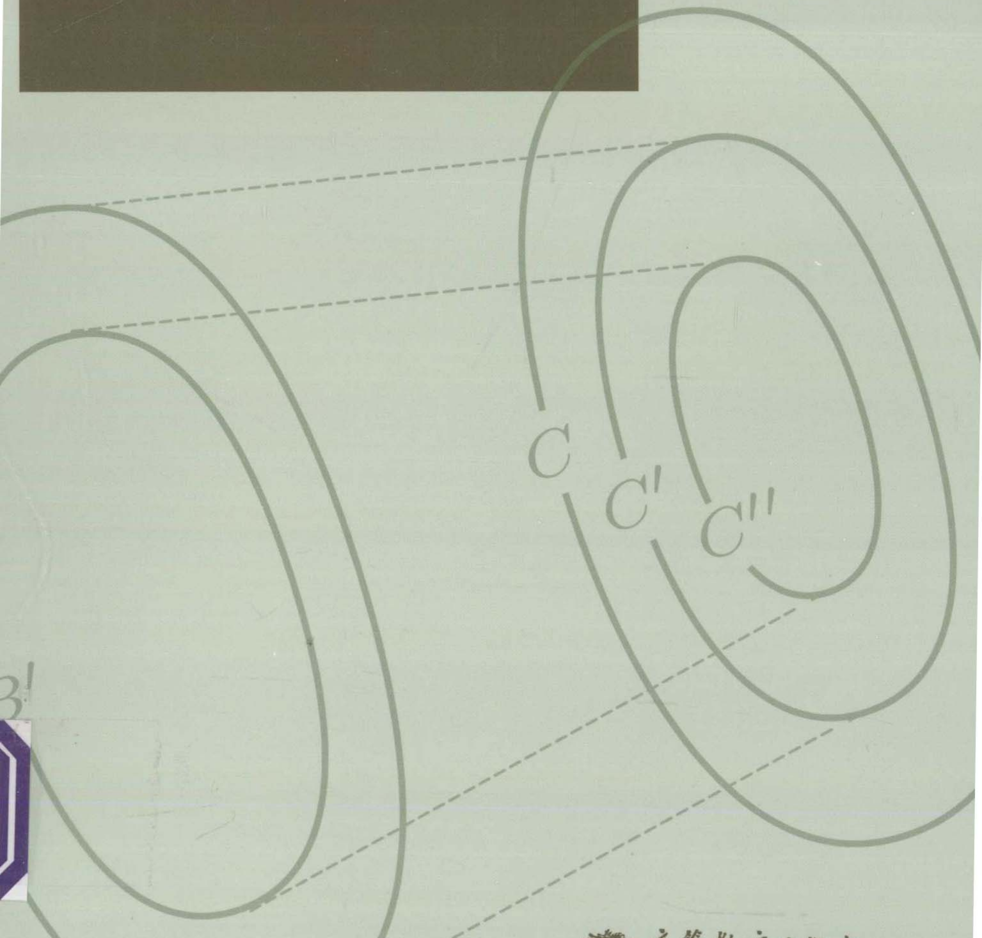
STML 大学生数学图书馆 STUDENT MATHEMATICAL LIBRARY 2

集合论基础

□ A. Shen, N. K. Vereshchagin 著
□ 陈光还 译



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

集合论的主要概念（基数、序数、超限归纳）对于所有数学家都是最基础的，并非仅限于研究数理逻辑或集合论拓扑的专家。通常分析、代数或拓扑学的课程只会给出基础集合论的一个概貌，然而事实上它足够重要、有趣和简单，值得慢慢地学习品味。

本书使得读者能够以悠闲品味的方式学习集合论的内容，它适用于广大范围的各类读者，从本科生直至那些想要最终掌握超限归纳并且理解它为何总被 Zorn 引理替代的专业数学家。

本书介绍了“朴素”（非公理化）集合论的所有主要内容：函数、基数、有序集和良序集、超限归纳及其应用、序数、序数上的运算。本书还包括对 Cantor-Bernstein 定理、Cantor 的对角构造、Zorn 引理、Zermelo 定理和 Hamel 基的讨论和证明。此外，书中还给出了150 多道问题，循序渐进地揭示了集合论基本思想和方法，内容全面完整，具有很好的可读性。

ISBN 978-7-04-037914-3

9 787040 379143 >

定价 29.00 元

数学

academic.hep.com.cn

大学生数学图书馆
STUDENT MATHEMATICAL LIBRARY

集合论基础

A. Shen, N. K. Vereshchagin 著
陈光还 译

JIHELUN JICHU

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

International Press

图书在版编目（C I P）数据

集合论基础 /（俄罗斯）沈（Shen, A.),（俄罗斯）韦列夏金（Vereshchagin, N. K.）著；陈光还译 . -- 北京：高等教育出版社，2013. 9

书名原文：Basic set theory

ISBN 978-7-04-037914-3

Ⅰ. ①集… Ⅱ. ①沈… ②韦… ③陈… Ⅲ. ①集论 Ⅳ. ① O144

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 164429 号

策划编辑 李 鹏　　责任编辑 李 鹏　　封面设计 赵 阳　　版式设计 余 杨
责任校对 陈 杨　　责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	高教社（天津）印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	889 mm × 1194 mm 1/32		http://www.landraco.com.cn
印　　张	3.875	版　　次	2013 年 9 月第 1 版
字　　数	100 千字	印　　次	2013 年 9 月第 1 版印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	29.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　37914-00

《大学生数学图书馆》丛书序

改革开放以后, 国内大学逐渐与国外的大学增加交流. 无论到国外留学或邀请国外学者到中国访问的学者每年都有增长, 这对中国的科学现代化大有帮助. 但是在翻译外国文献方面的工作尚不能算多. 基本上所有中国的教科书都还是由本国教授撰写, 有些已经比较陈旧, 追不上时代了. 很多国家, 例如俄罗斯、日本等, 都大量翻译外文书本来增长本国国民的阅读内容, 对数学的研究都大有裨益. 高等教育出版社和美国国际出版社在征求海内外众多专家学者的意见的基础上, 组织了《大学生数学图书馆》丛书, 这套丛书选取海内外知名数学家编写的数学专题读物, 每本书内容精炼, 涵盖了相关主题的所有重要内容.

我们希望这套翻译书能够使我们的大学生从更多的角度来看数学, 丰富他们的知识. 本丛书得到了作者本人及海外出版公司的诸多帮助, 我们谨此鸣谢.

丘成桐 (Shing-Tung Yau)

2013 年 6 月

引言

本书是作者在多年来于国立莫斯科大学力学数学系给学生上课的几本笔记的基础上写成的. (我们希望扩展这套丛书:《演算与语言》和《可计算函数》两书已在准备之中.)

集合论的主要概念 (基数、序数、超限归纳) 是那些数学专家应当懂得的 (尽管他 (或她) 不是数理逻辑专家或者集合论拓扑专家). 通常这些概念会在数学分析、代数或拓扑学教材的主要内容之前被简要地讨论. 然而这是不合适的 —— 这个论题足够有趣、重要和简单, 值得慢慢地学习品味.

呈现在这里的就是这样一个从容不迫的论述, 我们认真考虑到了广泛的读者群: 从优秀的高中生到数学专家 (如果他或她想在假期中弄明白什么是已经被 Zorn 引理取代了的超限归纳法). 想更深入地了解集合论的读者可以阅读其他专著 (在参考文献中我们列出了一些).

很高兴借此机会对我们的老师 Vladimir Andreevich Uspensky 表达深深地谢意, 他的教材、著作和评论对我们 (以及本书) 的影响

也许比我们认识到的还要多得多.

我们要向 AMS (美国数学会) 和 Sergei Gelfand 致谢 (是他建议把本书翻译成英文), 我们还要感谢 Yuri Burman, 在翻译本书的过程中他给予我们许多帮助.

最后, 我们要感谢所有听讲者和讨论班的参加者, 以及本书初版的读者.

我们将感谢读者找出本书所有的错误和打字失误 (并请通过 E-mail 发送到 ver@mccme.ru 或 shen@mccme.ru).

A. Shen, N. K. Vereshchagin

目录

第一章 集合及其基数

§1. 集 合

我们来回忆集合的几个运算和记号:

- 集由元素组成. 记号: $x \in M$ 表示 x 是集 M 的一个元素 (x 属于 M).
- 如果 A 的每个元素也都是 B 的元素, 则说集 A 是集 B 的一个子集 ($A \subset B$). 这时 B 称为 A 的一个*超集*.①
- 如果两个集 A 与 B 由同样的元素组成, 则说 A 与 B 相等 ($A = B$) (即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$).
- 如果 A 是 B 的一个子集, 并且 $A \neq B$, 则 A 称为 B 的一个真子集 (记号: $A \subsetneq B$).
- 空集 $\varnothing$ (也称零集) 不含元素. 它是任何集合的子集.
- 两个集 A 与 B 的交集 $A \cap B$ 由既属于 A 又属于 B 的所有元

①一般中国学者把子集记为 $A \subseteq B$, 而把真子集记为 $A \subset B$, 这与俄国学者的习惯不同. —— 译者注

素组成:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

- A 与 B 的并集 $A \cup B$ 由 A 的所有元素和 B 的所有元素组成(没有其他元素):

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

- A 与 B 的差集 $A \backslash B$ 由属于 A 而不属于 B 的元素组成:

$$A \backslash B = \left\{ x | \, x \in A \text{ 且 } x \notin B \right\}.$$

有一个特例: 如果 B 是 A 的子集, 则差 $A \backslash B$ 也称作 B 在 A 中的补集.

- 对称差 $A \triangle B$ 由严格属于集 A 与 B 之一的所有元素组成:

$$A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

- 我们用 $\{a, b, c\}$ 表示包含 a, b, c 而没有其他元素的集合. 元素 a, b, c 可以相同[①], 这时 $\{a, b, c\}$ 就由一个或两个元素组成. 这个记号也用于省略形式. 例如, 序列 $a_0, a_1, \ldots$ 所有元素的集合表示为 $\{a_0, a_1, \ldots\}$ (有时甚至记为 $\{a_i\}$). 更为精确的形式记号是 $\{a_i | i \in \mathbb{N}\}$, 其中 $\mathbb{N}$ 是所有自然数的集合 ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$).

相对来说, 集合是新概念. 它在 19 世纪末 Cantor 比较集合的基数性时才出现; 参见本章第 3 节. 集合的概念逐渐简化, 甚至进入了高中数学. 教师不再说方程 $x^2 + 1 = 0$ 无解, 而说这个方程的所有解的集合是空集, 等等. 有些教师甚至试着解释集 $\varnothing$ 与集 $\{\varnothing\}$ 的差别, 后者的唯一元素是空集, 不过收效甚微. 现代化高中课程的思想要求从一开始就要采用集合论的语言, 这导致了很多问题.

不过, 我们还是假定读者熟悉集合论语言, 下面将自由地使用这种语言. 这里给出一些自测题, 希望其中绝大多数对读者都是容易的.

①在中国的教科书中, 集合的元素要求具有相异性. —— 译者注

问题 1. 考虑国际象棋手中的最老的数学家和数学家中的最老的国际象棋手. 他们可能是两个不同的人吗?

问题 2. 对棋手中最好的数学家和数学家中最好的棋手来问同样的问题.

问题 3. 十分之一的数学家是棋手而六分之一的棋手是数学家. 哪一类人 (数学家或棋手) 较多? 这两类人人数之比是多少?

问题 4. 是否存在集 A, B 和 C, 使得 $A\cap B\neq\varnothing, A\cap C=\varnothing$ 并且 $(A\cap B)\setminus C=\varnothing$?

问题 5. 对于任意的集合 A, B, C, 下面的 (a)–(f) 哪些是真公式: (a) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$; (b) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$; (c) $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup B$; (d) $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap B$; (e) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$; (f) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$?

问题 6. 对前述问题中的真公式, 从定义开始给出形式证明. (你的证明应如下进行: "我们必须证明左边等于右边. 令 x 为左边集合中的任意元素. 则 ……. 因此, x 属于右边的集合. 另一方面, 令 …….")

对那些非真公式给出反例.

问题 7. 证明对称差运算是结合的: $A\triangle(B\triangle C)=(A\triangle B)\triangle C$ 对任意的 A, B 和 C 都对. (提示: 模 2 加法是结合的.)

问题 8. 证明 $(A_1\cap\cdots\cap A_n)\triangle(B_1\cap\cdots\cap B_n)\subset(A_1\triangle B_1)\cup\cdots\cup(A_n\triangle B_n)$ 对任意集合 $A_1,\ldots,A_n$ 和 $B_1,\ldots,B_n$ 都成立.

问题 9. 考虑含有集合变元和运算 $\cap,\cup,\setminus$ 的左边与右边相等的式子. 证明如果对于某些集这个等式为假, 那么它对于至多包含一个元素的某些集也为假.

问题 10. 由集合变元 A 与 B, 应用并、交、差可以得到多少个不同的表达式? (变元和运算可以应用多次. 若两个表达式对于

所含集合变元的每个值它们都有相同的值, 则这两个表达式就被看作相同的.) 对三个集合和 n 个集合求解同样的问题. (一般情况下答案是: 2^{2^n-1}.)

问题 11. 如果只允许用 $\cup$ 和 $\cap$, 求同一问题的解. (对于 $n=2$ 和 $n=3$, 问题易解; 然而对于任意的 n 却没有解的一般公式. 这个问题也称为 "计算 n 元单调 Boole 函数".)

问题 12. 一个 n 元集有多少子集?

问题 13. 设 A 有 n 个元素, 而 $B \subset A$ 有 k 个元素. 试求使得 $B \subset C \subset A$ 的不同的集 C 的个数.

问题 14. 集 U 含有 $2n$ 个元素. 选取 A 的 k 个子集, 它们中没有一个是另一个的子集. k 的最大值是多少? (提示: 当所有的子集都有 n 个元素时, k 即达到最大. 事实上, 设想下面的过程: 我们从空集开始随机地一个接一个地添加元素直到得到 U. 在这过程中, 至多一个选定集合可能出现. 另一方面, 这个过程中所选定某些集合出现的期望数又能使用期望的线性性计算出来. 既然所有给定大小的集合是等概率出现的, 则 Z 含有 n 个元素时, 上述过程偶遇某个集 $Z \subset U$ 的概率即为最小.)

§2. 基 数

有限集 A 的基数定义为它的元素的个数. 集 A 的基数表示为 $\#A$ 或 $|A|$. 这个记号将扩展到无限集 (见下面). 下面给出由几个集的基数以及它们所有交的基数求出并的基数的公式.

定理 1. (包含 – 排斥原则)

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|;$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$$
$$-|A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

一般地, $|A_1\cup\cdots\cup A_n|$ 等于

$$\sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i\cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i\cap A_j\cap A_k| - \cdots .$$

证明. 可对 n 进行归纳来证明这个公式, 不过我们想提供一个更有趣的证明. 令 U 为 $A_1,\ldots,A_n$ 的任意一个超集. 集 $X\subset U$ 的特征函数为 χ_X, 它在 U 上定义为: 当 $x\in X$ 时 $\chi_X(x)=1$, 当 $x\notin X$ 时 $\chi_X(x)=0$. 用特征函数可以表达集合论运算. 例如, 两个集 A 与 B 的交的特征函数是 A 与 B 特征函数的积: $\chi_{A\cap B}(u)=\chi_A(u)\chi_B(u)$. 如果 B 是 A 在 U 中的补, 则对所有 $x\in U$ 都有 $\chi_B(x)=1-\chi_A(x)$.

集 $X\subset U$ 的基数是 χ_X 所有值的和:

$$|X| = \sum_u \chi_X(u).$$

集的并 $A_1\cup\cdots\cup A_N$ 是它们补集的交集的补集, 因而有

$$\chi_{A_1\cup\cdots\cup A_n} = 1-(1-\chi_{A_1})\cdots(1-\chi_{A_n}).$$

右边等于

$$\sum_i \chi_{A_i} - \sum_{i<j} \chi_{A_i}\chi_{A_j} + \sum_{i<j<k} \chi_{A_i}\chi_{A_j}\chi_{A_k} - \cdots .$$

对 U 的所有元素求和 (等式的两边是定义在 U 上的整数值函数) 就给出了包含 – 排斥原则. □

问题 15. 证明 $|A_1\triangle\cdots\triangle A_n|$ 等于

$$\sum_i |A_i| - 2\sum_{i<j} |A_i\cap A_j| + 4\sum_{i<j<k} |A_i\cap A_j\cap A_k| - \cdots$$

(系数是 2 的幂).

其他一些初等组合的定理列在下面作为练习. 我们最感兴趣的是下面这个原理:

‖ 如果两集合 A 和 B 一一对应, 则 $|A| = |B|$.

两集合之间一一对应的意思是第一个集合的每个元素恰好对应着第二个集合的一个元素 (反之亦真).

这里有一些问题用到这个原理.

问题 16. 在圆周上有 1000 个白点和一个黑点. 计算以白点为顶点的三角形的个数. 计算以三个白点一个黑点为顶点的凸四边形的个数. 哪个数大? (解: 两数相等, 因为每个四边形恰好对应着一个由这个四边形的三个白顶点组成的三角形.)

问题 17. 给定基数为 100 的集, 计算它的 57-子集的个数, 即基数为 57 的子集的个数, 再计算基数为 43 的子集的个数. 哪个大? (提示: $57 + 43 = 100$.)

问题 18. 证明所有长度为 n 的二进制串的个数等于集 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的所有子集的个数. (提示: 每个子集 $X \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ 对应于它的特征序列; 这个序列的第 i 个元素等于 1 当且仅当 $i \in X$.)

问题 19. 证明由 k 个 1 和 $n-k$ 个 0 组成的长度为 n 的二进制序列的个数等于一个 n-集的 k-子集的个数.

一个 n-集的 k-子集的个数表示为 $\binom{n}{k}$ 并称作一个 n-集的 k-组合数, 也叫做二项式系数并出现在二项展开式中.

问题 20. 证明

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

问题 21. 证明

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

问题 22. 令 U 为任意有限集. 证明基数为偶数的子集 $X \subset U$ 的个数等于基数为奇数的子集 $X \subset U$ 的个数. (提示: 取定某个 $u \subset U$, 考察仅仅区别在 u 的子集对.)

问题 23. 证明

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

(提示: 应用前面问题的结果.)

问题 24. 证明 *Newton* 二项展开式:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n} b^n.$$

问题 25. 考察一个非结合的 n 项积. 有若干种方式插入指明运算顺序的圆括号. 证明不同方式的数目等于按对角线对凸 $(n+1)$ 角形进行三角剖分的数目. (例如, 积 abc 可以是 $(ab)c$ 或者 $a(bc)$; 而对于四边形有两种方法用对角线将它割成两个三角形. 对于积 $abcd$ 和一个五边形则有 5 种可能.) 这些数被称为 *Catalan* 数.

§3. 相 等 基 数

如果两个集合 A 和 B 之间存在着一一对应, 我们就说 A 和 B 有相同的基数 (A 的每个元素恰好对应着 B 的一个元素, 反之亦真). 记为: $A \simeq B$.

显然, 两个有限集 A 和 B 有相同的基数当且仅当 $|A| = |B|$ (A 的元素个数等于 B 的元素个数). 然而, 这个定义对无限集也适用. 例如, 我们来证明闭区间 $[0,1]$ 和 $[0,2]$ 有相同的基数. 事实上, 映射 $x \mapsto 2x$ 就是一个 $[0,1]$ 和 $[0,2]$ 之间的一一对应.

问题 26. 证明任意两个区间 (a,b) 和 (c,d) 都有相同的基数.

问题 27. 证明任意两个圆有相同的基数. 证明任意两个圆盘有相同的基数.

问题 28. 证明 $[0,1) \simeq (0,1]$.

下面的问题也许要难一些: 证明 $(0,1) \simeq (0,+\infty)$. 可如下进行, 注意到映射 $x \mapsto 1/x$ 是 $(0,1)$ 与 $(1,+\infty)$ 之间的一一对应. 再注意到映射 $x \mapsto (x-1)$ 是 $(1,+\infty)$ 与 $(0,+\infty)$ 之间的一一对应. 因此它们的复合, 也就是映射 $x \mapsto (1/x)-1$ 是 $(0,1)$ 与 $(0,+\infty)$ 之间的一一对应. 证毕.

更一般地, 可以说关系"有相同的基数"是一个等价关系. 这就是说这个关系是自反的 (对任何 A 都有 $A \simeq A$)、对称的 (如果 $A \simeq B$ 则 $B \simeq A$) 和可传递的 (如果 $A \simeq B$ 及 $B \simeq C$ 则 $A \simeq C$). 上面我们就是以 $B = (1,+\infty)$ 为中间集应用了可传递性.

其他的例:

- 数字 0 和 1 组成的所有无穷序列的集合与自然数集 $\mathbb{N}$ 的所有子集组成的集合基数相同. (事实上, 对每个序列 $a_0a_1a_2\ldots$ 考察使 $a_i = 1$ 的所有 $i \in \mathbb{N}$ 的集. 例如序列 00000... 对应于空集, 序列 11111... 对应于集 N, 而序列 10101010... 对应于所有偶数集.)
- 数字 0, 1, 2, 3 组成的所有无穷序列集与 0 和 1 组成的所有无穷序列集有相同的基数. (事实上, 可将 0, 1, 2, 3 编码为 00, 01, 10, 11, 而逆映射将 0 与 1 的序列分解成长度为 2 的块, 于是每个块可替换成四个数字 0, 1, 2, 3 之一.)
- 数字 0, 1, 2 组成的所有无穷序列集与 0 和 1 组成的所有无穷序列集有相同的基数. (一个朴素的处理: 将数字 0, 1, 2 的所有序列集介于两个基数相同的集合之间 (即数字 0, 1 的所有序列集和数字 0, 1, 2, 3 的所有序列集), 因而有相同的基数. 这个论证确实成立; 可参见本章第 5 节 Cantor-Bernstein 定理. 然而, 只要把 0, 1, 2 编码成块 0, 10, 11, 就能清楚地建立一一对应, 容易看到每个 0 与 1 组成的无穷序列都能从左到右唯一地