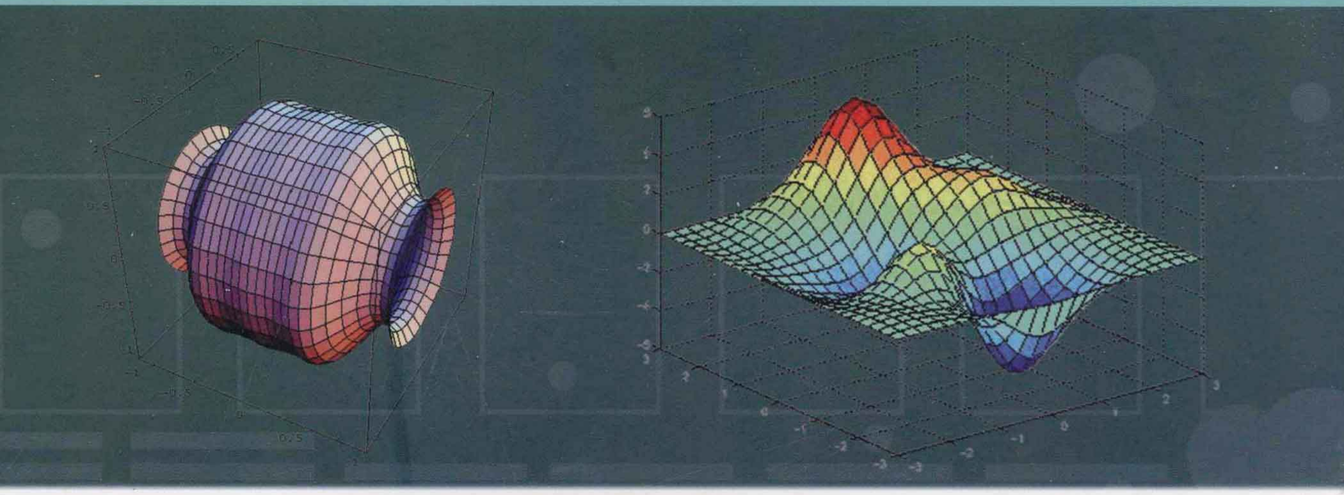

高等职业教育“十二五”规划教材

高职实用数学学习指导与技能训练

李志荣　翁方愚　主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

高等职业教育“十二五”规划教材

高职实用数学
学习指导与技能训练

主　编　李志荣　翁方愚

副主编　何闰丰　白　静

李秀琴　郭丽华

中国铁道出版社

CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本书是与主教材《高职实用数学》配套的学生学习用书. 各章内容由各节知识点归纳、分节习题,本章小结、本章检测题等组成. 本书一方面能帮助学生从总体上梳理和把握知识脉络,明确学习重点和教学基本要求,做到学习起来心中有数;另一方面,本书中各种类型的习题都来自生产、生活,都体现了以应用为目的的指导思想,题量少而精. 学生通过这些习题的训练,能达到事半功倍的效果. 此外,每道题后都留有适当的空白,方便学生解题.

本书适合与相应的主教材配套使用.

图书在版编目(CIP)数据

高职实用数学学习指导与技能训练/李志荣,翁方愚主编. —北京:中国铁道出版社,2010.8

高等职业教育"十二五"规划教材

ISBN 978-7-113-11608-8

Ⅰ.①高... Ⅱ.①李...②翁... Ⅲ.①高等数学—高等学校:技术学校—教学参考资料 Ⅳ.①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 143812 号

书　　名: 高职实用数学学习指导与技能训练

作　　者: 李志荣　翁方愚　主编

策划编辑: 李小军

责任编辑: 徐盼欣　　**读者热线电话:** 400-668-0820

责任印制: 李　佳　　**封面制作:** 李　路

出版发行: 中国铁道出版社(北京市宣武区右安门西街 8 号　　邮政编码:100054)

印　　刷: 中国铁道出版社印刷厂

开　　本: 787mm × 1092mm　1/16　　**印张:** 7.75　　**字数:** 178 千

版　　次: 2010 年 8 月第 1 版　2010 年 8 月第 1 次印刷

书　　号: ISBN 978-7-113-11608-8

定　　价: 14.00 元

前　言

本书是与主教材《高职实用数学》(李志荣、翁方愚主编)配套的学习指导与技能训练用书.目的是使学生通过对教材内容的反思和深化,理清知识脉络,掌握基础知识和常用的数学方法,提高分析问题和应用数学知识解决实际问题的能力.

本书共分两部分:

第一部分按照教材的顺序,以节为单位进行编写.内容包括各节知识点归纳、分节习题、本章小结、本章检测题等.此外,还编有总复习题、期末检测题,以供学生巩固所学知识.

第二部分为第一部分中习题及检测题的参考答案,可供学生自我检测.

本书所选的习题,突破了过去的纯数学的应试性训练模式.注重基础知识、基本方法;注重数学在生产、生活中的应用,为学生在专业课程学习和生产实践中应用数学做准备.

参加本书编写的有李志荣、翁方愚、何闰丰、白静、李秀琴、郭丽华.

本书的出版得到了中国铁道出版社的大力支持,在此表示衷心的感谢.

由于编者水平所限,疏漏与错误在所难免,敬请读者批评指正.

编者

2010 年 6 月

目　　录

第一部分　各章知识点归纳及技能训练

第二部分 参考答案

第一部分

各章知识点归纳及技能训练

1.1 函　　数

知识点归纳

1. 函数概念

(1)函数反映了变量间的确定性关系,即对于自变量的每一个值,因变量 y 总有确定的值与之对应.

(2)由于函数的独立要素有两个:定义域与对应法则,所以判断两个函数是否是同一个函数,必须从这两方面去考虑.两方面完全一致才能是同一个函数.

函数记号 $f(x)$ 有双重意思:可以表示一个函数,也可以表示函数的值.

2. 基本初等函数

对基本初等函数的定义域、值域、图像和特性应当熟记,它是今后学习的基础.

3. 复合函数与反函数

(1)在复合函数中最应注意的问题是关于定义域的问题.设函数 $y=f(x)$ 定义域为 D_1,函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 D,则必须有 $D_1\supset D$.

(2)复合函数的复合过程是由里到外,而分解过程则是由外往里.

4. 初等函数

由基本初等函数和常数函数经过有限次的四则运算和复合所构成并能由一个函数表达式表示的函数统称为初等函数.否则为非初等函数.

习题 1.1

一、选择题

1. 函数 $f(x)=\cos^2(3x+1)$ 的复合过程是(　　).

(A) $y=u^2,u=\cos v,v=3x+1$　　(B) $y=\cos^2u,u=3x+1$

(C) $y=u^2,u=\cos(3x+1)$　　(D) $y=\cos^2u,u=\cos v,v=3x+1$

2. 设函数 $f(x)=x^2$,函数 $\varphi(x)=2^x$,则 $f(\varphi(x))=$(　　).

(A) 2^{x^2}　　(B) x^{2^x}　　(C) x^{x^2}　　(D) 2^{2x}

3. $f(x)=\sin x$,则 $f(-\cos\pi)$ 的值是(　　).

(A) 1　　(B) 0　　(C) $\sin 1$　　(D) $\sin(-1)$

二、填空题

1. 若 $f(x)=x(x+2)$,则 $f(2)=$______.

2. 若 $f(x)=2+x,g(x)=x^3$,则 $f(g(x))=$______,$g(f(x))=$______.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}a+x & 当\ x<0\\ 4+x^2 & 当\ x\geqslant 0\end{cases}$,且 $f(-2)=6$,则 $a=$______.

三、解答题

1. 求函数 $y=\sqrt{2+x}+\dfrac{1}{\lg(1+x)}$ 的定义域.

2. 求函数 $y=\arccos\sqrt{2x}$的定义域.

3. 火车站收取行李费的规定如下:当行李不超过50kg时,按基本运费计算,收费0.30元/kg;当超过50kg时,超过部分按0.45元/kg收费.试求行李费(单位:元)与重量x(单位:kg)之间的函数关系式,并作出该函数的图像.

4. 有一边长为a的正方形铁片,从它的四个角截去相等的小正方形,然后折起各边,做成一个无盖的小盒子,求它的容积与截去的小正方形边长之间的函数关系,并指明定义域.

5. 一个物体作直线运动,已知阻力f的大小与物体运动的速度v成正比,但方向相反.当物体以1m/s的速度运动时,阻力为1.96×10^{-2}N,试建立阻力与速度之间的函数关系.

6. 设商品的需求量与价格之间的关系为线性关系,当$p=2$时$Q=37$;当$p=4$时$Q=34$.求该商品的需求函数.

7. 某市某天对鸡蛋的需求函数为$Q=65-9p$,供给函数为$Q=5p-5$(单位:Q为t,p为元/kg).求出均衡价格,并求出此时的需求量.

1.2 极　　限

知识点归纳

极限是高等数学的基础,微积分的很多内容如导数、定积分等都是特定意义下的极限,因此必须很好地理解和掌握这个概念.

1. 数列的极限

(1)数列极限是研究数列$\{x_n\}$当$n\to\infty$时,x_n的变化趋势,因此,它的极限状况与数列的前面有限项的取值情况无关,也与x_n是否等于a无关.

(2)从图像上看,数列的极限就是看数轴上代表数列每一项的点,最终能否"聚集"到一个定点a的附近,并且与a的距离要多小有多小.如果能,则是有极限;如果不能,则是极限不存在.由此也可看到极限不存在的两种情况,一种是虽然有很多点"聚集"到a的附近,但不论n多大,总还有点x_n与a的距离不能任意小;另一种是点x_n越走越远,最后无影无踪.

2. 函数的极限

(1)由于自变量x的变化方式一般可分为两种即:$x\to\infty$和$x\to x_0$,所以函数的极限也有两种类型:$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

(2)在研究函数$f(x)$在$x\to x_0$时的极限时,与函数$f(x)$在x_0的值无关,甚至$f(x)$可以在x_0无定义.

(3)掌握函数极限与函数左、右极限的关系,即:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0+0}f(x)=\lim_{x\to x_0-0}f(x)=A.$$

(4)函数的极限与自变量的趋向密切相关,即使同一个函数在自变量的不同趋向下,也往往有不同的极限或者极限不存在,例如$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$,$\lim\limits_{x\to1}e^x=e$,$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=\infty$.

习题 1.2

一、选择题

1. $\lim\limits_{n\to\infty}q^n$等于(　　)($q\in\mathbf{R}$).

(A)0

(B)1

(C)0或者1

(D)极限是否存在由q的值确定

2. 数列$1,\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\frac{1}{64},\cdots$的前$n$项和的极限是(　　).

(A)1　　(B)$\frac{3}{2}$　　(C)2　　(D)不存在

3. 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,则$f(x)$在$x_0$处(　　).

(A)必有定义,且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$　　(B)没有定义

(C)必有定义,但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不一定等于$f(x_0)$　　(D)可以没有定义

4. 极限$\lim\limits_{x\to2}\frac{|x-2|}{x-2}$是(　　).

(A)-1　　(B)1　　(C)-1　　(D)不存在

二、填空题

1. 设$f(x)=\ln(1+e)$,则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$______.

2. $\lim\limits_{x\to 1-0}\arcsin x=$__________;$\lim\limits_{x\to -1+0}\arccos x=$__________;$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\arctan x=$__________;$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\text{arccot}\, x=$__________.

3. 若$f(x)=\begin{cases}-x & 当\ x<0\\ 0 & 当\ x=0\\ x^2 & 当\ x>0\end{cases}$,则$\lim\limits_{x\to -0}f(x)=$__________,$\lim\limits_{x\to +0}f(x)=$__________,于是$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$__________.

1.3 极限的运算法则

知识点归纳

基本方法是运用极限的运算法则，特别方法有下面一些：

1. 利用函数的连续性求极限.

设 $f(x)$ 是初等函数，定义域为 (a,b)，若 $x_0 \in (a,b)$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

由于求函数值一般不需要技巧，因此，这种求极限方法非常容易掌握，它是求极限的首选方法.

2. 利用无穷小量与有界变量的乘积仍是无穷小性质求极限.

3. 利用无穷小量与无穷大量的倒数关系求极限.

4. 利用两个重要极限：$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$，$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$ 求极限.

5. 计算分式的极限时，如果分子与分母的极限都为 0，则基本方法是：①考虑运用 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ 来求极限；②采用分解因式以后约分的方法；③分子与分母同乘以分子（或分母）的有理化根式以后，再求极限.

6. 当 $x \to \infty$ 对于有理分式的极限有下面的结论（$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$）：

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} 0 & n < m \\ \dfrac{a_0}{b_0} & n = m \\ \infty & n > m \end{cases}$$

记住几个常用的基本极限：$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$；$\lim\limits_{x \to x_0} C = C$（$C$ 为常数）；$\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$；$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^\alpha} = 0$（$\alpha > 0$）.

习题 1.3

求下列极限

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x + 3}{x}$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2^{x+1}}{3 \cdot 2^x + 1}$

3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$

4. $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{\dfrac{x - 1}{x^2 - 1}}$

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 - 4x^2 - 3x - 1}{2 + 3x - x^3}$

6. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{3}{1 - x^3} \right)$

1.4 极限存在准则及两个重要极限

知识点归纳

对于两个重要极限的学习要求是能够熟练地运用它们来求极限,为此要把它们作为求极限的方法之一,默记在心.如果某道题形式上接近这两个重要极限,就要有意识地试一试.

下面两点对于解题是有帮助的:

(1)为突出两个重要极限的特点,把它们写成下面的形式:$\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\square}{\square}=1$,其中□表示的变量相同,且趋向于零.$\lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}$,其中□表示的变量相同且趋向于∞.

(2)一般来说含有三角函数的$\dfrac{0}{0}$型的极限可考虑运用$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$来求;对于$1^{\infty}$型的幂指数函数的极限,通常可运用$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$来求.

习题 1.4

一、选择题

1. 下列等式成立的是(　　).

(A)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^3}{x^3}=1$　　(B)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}=1$

(C)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\cos x)}{\cos x}=1$　　(D)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\arccos x)}{\arccos x}=1$

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$的值是(　　).

(A)e　　(B)e^{-1}　　(C)e^{3}　　(D)e^{-3}

二、填空题

1. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{2t}=$＿＿＿＿;$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)}{\tan x}=$＿＿＿＿;$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2\sin x}=$＿＿＿＿;$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\ln x)}{2\ln x}=$＿＿＿＿

2. $\lim\limits_{y\to 0}(1-y)^{\frac{1}{y}}=$＿＿＿＿;$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}=$＿＿＿＿;$\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{2}{y}}=$＿＿＿＿;$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}=$＿＿＿＿.

三、解答题

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$　　2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+3)}{\sin x}$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

4. $\lim\limits_{x \to \infty} x \cdot \sin \dfrac{1}{x}$

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1+x}{x} \right)^{2x}$

6. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \dfrac{2}{x} \right)^{x}$

7. $\lim\limits_{x \to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$

8. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+\frac{1}{2}}$

1.5 无穷小量与无穷大量

知识点归纳

1. 无穷小与无穷大的概念中，注意无穷小与绝对值很小的量的区别，无穷大与绝对值很大的量的区别.
2. 无穷小与无穷大之间有倒数关系.
3. 掌握具有极限的函数等于它的极限 A 与一个无穷小量之和，即 $f(x)=A+\alpha$.
4. 在极限计算中，等价无穷小可以互相替代，以简化计算.

习题 1.5

一、选择题

1. 当 $x\to 0$ 时，下列变量为无穷小量的是(　　).

(A) $\sin x$　　(B) $\tan(x+1)$　　(C) $\ln x$　　(D) $\dfrac{1}{e^x}$

2. 要使 $\dfrac{1}{2x+1}$ 为无穷大量，自变量 x 的变化趋势是(　　).

(A) $x\to -\dfrac{1}{2}$　　(B) $x\to\infty$　　(C) $x\to 0$　　(D) x 可任意变化

3. 当 $x\to 0$ 时，比 x 较高阶的无穷小量是(　　).

(A) $\dfrac{x}{10^{10}}$　　(B) $3x$　　(C) $\sqrt{x}$　　(D) x^2

4. 当 $x\to\infty$ 时，下列变量中为无穷小量的是(　　).

(A) x^2-2x　　(B) $\dfrac{x^2+1}{x+1}$　　(C) $\dfrac{x+1}{x^2+1}$　　(D) $x+3$

二、填空题

1. 函数 $y=1+3x$，当 $x\to$______时是无穷小量，当 $x\to$______时是无穷大量.
2. 函数 $y=x^2+4x+3$，当 $x\to$______时和 $x\to$______时是无穷小量.
3. 函数 $y=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$，当 $x\to$______时和 $x\to$______时是无穷大量.
4. 当 $x\to 1$ 时，$\dfrac{1}{1-x}$ 和 $\dfrac{2x}{1-x^2}$ 都是无穷______量，而 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2x}{1-x^2}\right)=$______.
5. 当 $x\to\infty$ 时，3^x 和 5^x 都是无穷______量，而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x}{5^x}=$______.

三、求下列极限

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x+2}$　　2. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$