·同济五版·

线性代数
习题详解

张天德◎主编

XIANXING DAISHU
XITI XIANGJIE

中国政法大学出版社

·同济五版·

线性代数
习题详解

张天德◎主编

中国政法大学出版社

2013·北京

图书在版编目（CIP）数据

线性代数（同济五版）习题详解 / 张天德主编. 一北京：中国政法大学出版社，2013.9
ISBN 978-7-5620-4968-5

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-题解 Ⅳ. ①O151.2-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第203818号

书　　名	线性代数（同济五版）习题详解
出版发行	中国政法大学出版社(北京市海淀区西土城路25号)
	北京100088信箱8034分箱　邮编100088　fada.sf@sohu.com
	http://www.cuplpress.com　(网络实名：中国政法大学出版社)
	(010)58908433(编辑部)　58908325(发行部)　58908334(邮购部)
承　　印	固安华明印刷厂
规　　格	787mm×1092mm　1/16
印　　张	10.25
字　　数	155千字
版　　本	2013年9月第1版　2013年9月第1次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5620-4968-5/O
定　　价	16.80元

前 言

大学期间，如何学好数学？考研准备期，又该如何复习好数学呢？虽然考研数学没有指定的教材，全国各高校的教材又是五花八门，百家争鸣，但总体来讲，值得我们关注的，也是我在此重点推荐的，是如下四本书：同济大学数学系主编的《高等数学（上册）》（第六版）、《高等数学（下册）》（第六版）、《线性代数》（第五版）和浙江大学编写的《概率论与数理统计》（第四版）。这四本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，亦是最接近考研数学的权威教材。所以，我建议同学们用这套书做大学数学的学习和考研复习之用。

那么，如何才能使用好这套书呢？大家应该有所共识：数学学习得好与坏，那是需要通过做题去检验的。做什么题？就做这套书的课后习题。为了使同学们能真正用好这套书，能真正掌握解题的方法，我们组织了一批在本科教学一线和考研辅导一线的老师、专家，共同编写了与此相配套的四本图书，包括：《高等数学习题详解（上册）》、《高等数学习题详解（下册）》、《线性代数习题详解》、《概率论与数理统计习题详解》。在体例方面，本系列图书章节的划分与设置均与教材保持一致。每章内容包括：概念网络图；习题详解；单元小结。通过概念网络图对本章知识进行体系总结；在习题详解部分，提供准确的解题思路和方法，并对相应的考试要求加以提示；在单元小结中，对本章知识要点予以准确概括和提炼，并对基本方法进行说明。

总之，本系列图书汇集了编者丰富的教学经验，将一些典型例题及解题方法与技巧融入书中，配合权威教材所附习题的解答和分析，帮助学生融会贯通相关知识，提高学习效率。

本系列丛书编写过程中，参考了同济大学数学系主编的《高等数学（上册）》（第六版）、《高等数学（下册）》（第六版）、《线性代数》（第五版）和浙江大学编写的《概率论与数理统计》（第四版）以及教育部考试中心编写的《考研数学考试大纲》等，在此感谢诸多相关作者的辛勤工作，同时也要感谢中国政法大学出版社。限于水平，本书在编写过程中难免出现不妥之处，敬请广大读者给予指正。

编　者

目录

第 一 章

行 列 式

一、概念网络图

- 行列式
  - 概念
    - 全排列及其逆序
    - 对换改变排列的奇偶性
    - 二阶、三阶、n阶行列式定义
  - 性质
    - $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$
    - 两行（列）互换，行列式变号
    - 一行（列）为零，或两行（列）成比例$\Rightarrow |\boldsymbol{A}|=0$
    - 拆项
    - 提公因子 k（$k\neq 0$）
    - 某行（列）的k倍加到另一行（列），其值不变
  - 展开式
    - 余子式 M_{ij}，代数余子式 A_{ij}，$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$
    - $|\boldsymbol{A}| = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}A_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$
    - $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0(i\neq k);\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ij} = 0(k\neq j)$
  - 行列式计算——利用性质及展开定理
  - 克莱默法则
    - 法则：$|\boldsymbol{A}|\neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解
    - 推论
      - $|\boldsymbol{A}|\neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有唯一零解
      - $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解$\Rightarrow |\boldsymbol{A}|=0$

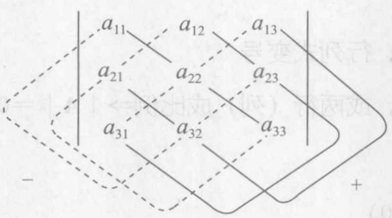
二、习题详解

1. 利用对角线法则计算下列三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

【说明】 计算三阶行列式的对角线法则（又称“沙路法”）是指：三阶行列式共 6 项，每项均为不同行、不同列的三个元素的乘积再冠以正负号. 其规律如图所示：实线（主对角线及其平行连线）取正号；虚线（副对角线及其平行连线）取负号.



解 (1) 原式$=2\times(-4)\times3+0\times(-1)\times(-1)+1\times1\times8-1\times(-4)\times(-1)$
$-0\times1\times3-2\times(-1)\times8$
$=-24+0+8-4-0+16=-4.$

(2) 原式$=acb+bac+cba-c^3-b^3-a^3=3abc-(a^3+b^3+c^3).$

(3) 原式$=1\times b\times c^2+1\times c\times a^2+1\times a\times b^2-1\times b\times a^2-1\times a\times c^2-1\times c\times b^2$
$=bc^2+ca^2+ab^2-ba^2-ac^2-cb^2=bc^2-cb^2+ab^2-ac^2+a^2c-ba^2$
$=b(c^2-cb+ab)-a(c^2-ac+ab)$
$=b(c^2-cb+ab-ac)-a(c^2-ac+ab-bc)$
$=(b-a)(c^2-cb+ab-ac)=(b-a)[c(c-b)+a(b-c)]$
$=(b-a)(c-a)(c-b).$

(4) 原式$=x\times(x+y)\times y+y\times x\times(x+y)+(x+y)\times y\times x-(x+y)^3-y^3-x^3$
$=3xy(x+y)-(x+y)^3-y^3-x^3$
$=3x^2y+3xy^2-(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)-x^3-y^3$
$=-2(x^3+y^3).$

【评注】 (1) 对角线法则只适用于三阶行列式，其他各阶行列式均不适用.

(2) 在计算三阶行列式的其他方法都无效时，对角线法则是最基本的方法，应想到它，虽然它的计算量可能较大.

2. 按自然数从小到大为标准次序，求下列各排列的逆序数：

(1) 1234； (2) 4132；

(3) 3421； (4) 2413；

(5) $13\cdots(2n-1)\,24\cdots(2n)$； (6) $13\cdots(2n-1)\,(2n)\,(2n-2)\cdots2$.

【说明】 不妨设 n 个元素是 $1, 2, \cdots, n$ 这 n 个自然数，并规定由小到大为标准次序（顺排）. 设

$$p_1p_2\cdots p_n$$

为这 n 个自然数的一个排列. 考虑 p_i $(i=1, 2, \cdots, n)$，如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 t_i（个），就说 p_i 这个元素的逆序数为 t_i（个）. 全体元素的逆序数的总和记成 $t(p_1p_2\cdots p_n)$，则

$$t(p_1p_2\cdots p_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n.$$

解 (1) 排列 1234，全部是标准次序（全部顺排）. 故逆序数总和为

$$t(1234)=0.$$

(2) 在排列 4132 中，

4 排在首位，前面没有其他的数，逆序数为 0；

1 的前面有一个数 4 比 1 大，故逆序数为 1；

3 的前面有一个数 4 比 3 大，故逆序数为 1；

2 的前面有两个数 3，4 比 2 大，故逆序数为 2.

故总逆序数为

$$t(4132)=0+1+1+2=4.$$

【评注】 下面用横线画出排列中逆序的两个数. 则题 (2) 可表示成

$$4\quad 1\quad 3\quad 2$$

则横线的根数即是总逆序数，即

$$t(4132)=4.$$

(3) 排列 3421 的逆序有

$$3\quad 4\quad 2\quad 1$$

故　$t\,(3421)=5$.

(4) 排列 2413 的逆序有

$$2\quad 4\quad 1\quad 3$$

故　$t\,(2413)=3$.

(5) $13\cdots(2n-1)$ 全部顺排；

2 的前面有 3，5，…，$(2n-1)$ 共 $n-1$ 个数比 2 大，逆序数为 $n-1$；

4 的前面有 5，…，$(2n-1)$ 共 $n-2$ 个数比 4 大，逆序数为 $n-2$；

……

$(2n-2)$ 的前面有 $(2n-1)$ 共 1 个数比 $(2n-2)$ 大，逆序数为 1；

$2n$ 最大，前面没有比 $2n$ 大的数，逆序数为 0.

故排列 $13\cdots(2n-1)\ 24\cdots(2n)$ 的逆序数为

$$t\,(13\cdots(2n-1)\ 24\cdots(2n))=1+2+\cdots+n-1=\frac{n\,(n-1)}{2}.$$

(6) $13\cdots(2n-1)(2n)$ 全部顺排，逆序数为 0；

$(2n-2)$ 的前面有数 $(2n-1)$，$(2n)$ 共 2 个数比 $(2n-2)$ 大，逆序数为 2；

$(2n-4)$ 的前面有数 $(2n-3)$，$(2n-1)$，$(2n)$，$(2n-2)$ 共 4 个数比 $(2n-4)$ 大，逆序数为 4；

……

2 的前面有数 3，…，$(2n-1)$，$(2n)$，…，4 共 $2n-2$ 个数比 2 大，逆序数为 $2n-2$；

故排列 $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots2$ 的逆序数为

$$\begin{aligned}t(13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots2)&=2+4+\cdots+(2n-2)\\&=\frac{(2n-2+2)(n-1)}{2}\\&=n(n-1).\end{aligned}$$

【评注】 上述计算逆序数的方法是“向前看”法，即看每个数的前面有几个数比它大，则该数的逆序数就是几. 同样也可以采取“向后看”的方法，看每个数的后面有几个数比它小，则该数的逆序数就是几.

3. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

解　设四阶行列式为

$$\begin{vmatrix} \underline{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \underline{a_{23}} & a_{24} \\ a_{31} & \underset{\sim}{a_{32}} & a_{33} & \boxed{a_{34}} \\ a_{41} & \boxed{a_{42}} & a_{43} & \underset{\sim}{a_{44}} \end{vmatrix}.$$

由定义：该行列式全部展开共有 4！＝24 项，每项由不同行、不同列的四个元素相乘，且冠以符号，其中含有因子 a_{11}（在第 1 行）a_{23}（在第 2 行）的项，另两个元素应取自第 3 行、第 4 行及第 2 列、第 4 列，故为

$$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} \text{ 及 } a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}.$$

正负号：因其行下标已经是标准次序，故正负号取决于列下标的逆序数. 故四阶行列式中含有 $a_{11}a_{23}$的项为

$$(-1)^{t(1324)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}=(-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}=-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44};$$
$$(-1)^{t(1342)}a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}=(-1)^2 a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}=a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}.$$

4. 计算下列各行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$.

【说明】 为了表明行列式（矩阵）的变换过程，本书中约定：

$r_i \leftrightarrow r_j$	行列式(矩阵)第 i 行与第 j 行互换；
$c_i \leftrightarrow c_j$	行列式(矩阵)第 i 列与第 j 列互换；
kr_i	行列式(矩阵)第 i 行乘 k；
kc_i	行列式(矩阵)第 i 列乘 k；
$r_i \pm kr_j$	行列式(矩阵)第 i 行加(减)第 j 行的 k 倍；
$c_i \pm kc_j$	行列式(矩阵)第 i 列加(减)第 j 列的 k 倍.

解 (1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-2c_1]{c_2-2c_1} \begin{vmatrix} 4 & -7 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -7 & 2 & -4 \\ -15 & 2 & -20 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_2-2r_3]{r_1-2r_3} - \begin{vmatrix} -9 & 0 & -18 \\ -17 & 0 & -34 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -9 & -18 \\ -17 & -34 \end{vmatrix} = 0.$$

【评注】 观察行列式中元素的规律性，选择合适的性质及展开定理，是计算行列式的基本思路. 本题中利用 $a_{21}=1$ 消 a_{22}，a_{24} 为零，再展开较方便.

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2=r_4} 0.$

(3) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} = adf \begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix} = abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1} abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4abcdef.$$

(4) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}$

$$= a\left(b\begin{vmatrix} c & 1 \\ -1 & d \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & d \end{vmatrix}\right) + cd + 1$$

$$= a\,[b(cd+1)+d] + cd + 1$$

$$= abcd + ab + ad + cd + 1.$$

5. 求解下列方程：

(1) $\begin{vmatrix} x+1 & 2 & -1 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$； (2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 0$，其中 a，b，c 互不相等.

解 (1) $\begin{vmatrix} x+1 & 2 & -1 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2} \begin{vmatrix} x+3 & 2 & -1 \\ x+3 & x+1 & 1 \\ 0 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = (x+3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ 0 & 1 & x+1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_2-r_1}(x+3)\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\0 & x-1 & 2\\0 & 1 & x+1\end{vmatrix}$$

$$=(x+3)\left[(x-1)(x+1)-2\right]=(x+3)(x^2-3)$$

$$=0.$$

故方程的解（根）为：$x_1=-3$，$x_2=\sqrt{3}$，$x_3=-\sqrt{3}$.

（2）将第 1 列中元素 x，x^2，x^3 消为零.

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\x & a & b & c\\x^2 & a^2 & b^2 & c^2\\x^3 & a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix}\xlongequal[i=4,\ 3,\ 2]{r_i-xr_{i-1}}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & a-x & b-x & c-x\\0 & a(a-x) & b(b-x) & c(c-x)\\0 & a^2(a-x) & b^2(b-x) & c^2(c-x)\end{vmatrix}$$

$$=(a-x)(b-x)(c-x)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\a & b & c\\a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}=0.$$

因为 a，b，c 互不相等，故

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\a & b & c\\a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}=(c-a)(c-b)(b-a)\neq 0.$$（见本章习题第 1 题第（3）小题）

故方程的解（根）为：$x_1=a$，$x_2=b$，$x_3=c$.

【评注】（1）方程左端是范德蒙德行列式，可直接得出结果

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\x & a & b & c\\x^2 & a^2 & b^2 & c^2\\x^3 & a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix}=(c-x)(c-a)(c-b)(b-x)(b-a)(a-x)=0.$$

因 a，b，c 互不相等，则方程的解为 $x_1=a$，$x_2=b$，$x_3=c$.

（2）由观察，当 $x=a$ 或 b 或 c 时，分别有第 1、2 列，第 1、3 列，第 1、4 列相等，行列式为 0，且按第 1 列展开，方程是关于 x 的一元三次方程. 故方程有三个根，且根为 $x_1=a$，$x_2=b$，$x_3=c$.

6. 证明：

（1）$$\begin{vmatrix}a^2 & ab & b^2\\2a & a+b & 2b\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(a-b)^3;$$

(2) $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$;

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$;

(5) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$.

证 (1) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-2c_2+c_3} \begin{vmatrix} a^2-2ab+b^2 & ab & b^2 \\ 0 & a+b & 2b \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^2(a+b-2b)$

$= (a-b)^3$.

(2) $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax & ay+bz & az+bx \\ ay & az+bx & ax+by \\ az & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ay+bz & az+bx \\ bz & az+bx & ax+by \\ bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$

$= a\begin{vmatrix} x & ay+bz & az \\ y & az+bx & ax \\ z & ax+by & ay \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} y & bz & az+bx \\ z & bx & ax+by \\ x & by & ay+bz \end{vmatrix}$

$= a^2\begin{vmatrix} x & ay & z \\ y & az & x \\ z & ax & y \end{vmatrix} + b^2\begin{vmatrix} y & z & bx \\ z & x & by \\ x & y & bz \end{vmatrix}$

$= a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}$

$= a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$

$$=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.$$

(3) $$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{c_3-c_1\\ c_4-c_1}]{c_2-c_1} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_4-3c_2]{c_3-2c_2} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2a+1 & 2 & 6 \end{vmatrix}=0.$$

(4) **法一** $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-ar_2\\ r_2-ar_1}]{r_4-a^2r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ 0 & b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2(b+a) & c^2(c+a) & d^2(d+a) \end{vmatrix} \xlongequal[r_2-br_1]{r_3-b(b+a)r_2}$$

$$(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c^2(c+a)-bc(b+a) & d^2(d+a)-bd(b+a) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} c-b & d-b \\ c(c-b)(a+b+c) & d(d-b)(a+b+d) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c(a+b+c) & d(a+b+d) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)[ad+bd+d^2-(ac+bc+c^2)]$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$$

$$=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d).$$

法二　由范德蒙德行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix}$$

$$=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a)$$

$$=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

题目所求行列式是 D 的 M_{45}，D 按第 5 列展开，x^3 的系数为 $A_{45}=(-1)^{4+5}M_{45}=-M_{45}$.

由上式知 x^3 的系数是

$$-(a+b+c+d)(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d),$$

故 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}=(a+b+c+d)(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$

(5) 用数学归纳法证明.

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}=x^2+a_1x+a_2$ 命题成立.

假设对于 $(n-1)$ 阶行列式命题成立，即

$$D_{n-1}=x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-2}x+a_{n-1}$$

则 D_n 按第一列展开，有

$$D_n=xD_{n+1}+a_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

$$=xD_n+a_n.$$

$$=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

∴ 对于 n 阶行列式命题成立.

7. 设 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$，把 D 上下翻转、或逆时针旋转 90°、或依副对角线翻转，依次得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix},D_3=\begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix},$$

证明：$D_1=D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$，$D_3=D$.

证 $D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[\substack{r_{i+1}\leftrightarrow r_i\ (i=n-2,\ \cdots,\ 1) \\ \cdots \\ r_2\leftrightarrow r_1}]{r_{i+1}\leftrightarrow r_i\ (i=n-1,\ \cdots,\ 1)} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D;$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \\ a_{1(n-1)} & a_{2(n-1)} & \cdots & a_{n(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_{i+1}\leftrightarrow r_i\ (i=n-2,\ \cdots,\ 1) \\ \cdots \\ r_2\leftrightarrow r_1}]{r_{i+1}\leftrightarrow r_i\ (i=n-1,\ \cdots,\ 1)} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{行列互换}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D=D_1.$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{nn} & a_{(n-1)n} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n(n-1)} & a_{(n-1)(n-1)} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{(n-1)1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_{i+1}\leftrightarrow r_i\ (i=n-2,\ \cdots,\ 1) \\ \cdots \\ r_2\leftrightarrow r_1}]{r_{i+1}\leftrightarrow r_i\ (i=n-1,\ \cdots 1)} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{n1} & a_{(n-1)1} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n(n-1)} & a_{(n-1)(n-1)} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ a_{nn} & a_{(n-1)n} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{行列互换}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \\ a_{(n-1)1} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_{i+1}\leftrightarrow r_i\ (i=n-2,\ \cdots,\ 1)\\ \cdots\\ r_2\leftrightarrow r_1}]{r_{i+1}\leftrightarrow r_i\ (i=n-1,\ \cdots 1)} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\ (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D.$$

8. 计算下列各行列式（D_k 为 k 阶行列式）：

（1）$D_n=\begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}$，其中主对角线上元素都是 a，未写出的元素都是 0；

（2）$D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$；

（3）$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$；

【提示】 利用范德蒙行列式的结果.

（4）$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}$，其中未写出的元素都是 0；

（5）$D_n=\det\ (a_{ij})$，其中 $a_{ij}=|i-j|$；

（6）$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$，其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$.

解 （1）本题元素 0 较多，直接展开是方便的.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}_{n\times n}=a\begin{vmatrix} a & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a \end{vmatrix}+(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$