



高职高专经济类与管理类规划教材

J I N G J I S H U X U E

经济数学

◎ 金慧萍 主编



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高职高专经济类与管理类规划教材

经济数学

主 编 金慧萍
副主编 陈沛森 罗晓芳 王联荣
潘 媛 吴金勇 张胜兵



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学/金慧萍主编. —杭州:浙江大学出版社, 2011. 6

ISBN 978-7-308-08620-2

I. ①经… II. ①金… III. ①经济数学 IV.
①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 071172 号

经济数学

金慧萍 主编

责任编辑 石国华

封面设计 刘依群

出版发行 浙江大学出版社

(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)

(网址: <http://www.zjupress.com>)

排 版 杭州星云光电图文制作工作室

印 刷 富阳市育才印刷有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 19.25

字 数 468 千

版 印 次 2011 年 6 月第 1 版 2011 年 6 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-308-08620-2

定 价 32.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88925591

前言

经济数学从狭义上讲就是高职院校经济类与管理类专业的高等数学,它是一门公共基础课程,也是培养经济类与管理类专门人才的重要课程之一。经济数学为读者学习相关专业课程和解决实际问题提供了必不可少的数学知识和数学方法,有助于培养读者的概括能力、推理能力、创新能力及解决实际问题的能力。学习经济数学,除了提高读者自身素质,为终身学习打好一定基础外,还有一个重要的目的就是应用经济数学为实际服务。

本教材共分十一章,内容包括函数、极限与连续,导数、微分及应用,不定积分、定积分及应用,微分方程及应用,多元函数的微分学,无穷级数,线性代数及应用,概率统计初步,Matlab 数学实验简介等(标有“*”号的内容为选学内容)。教材中每一章都配有知识结构导图、本章小结、每节习题及每章综合练习等,方便读者的学习。本教材具有以下特点:

1. 理论知识,够用为度。注重思想的起源与发展,淡化理论的论证与推理,却不失知识的系统性和连贯性,让读者形成良好的思维品质。

2. 知识处理,联系实际。为了避免因数学知识的抽象枯燥而影响学习数学的兴趣,在数学知识的处理上,遵循“问题引入→产生数学→解决问题”的思路,体现数学知识来自于实际。

3. 例子选取,结合专业。为了提高读者学习相关专业课程能力和解决实际问题能力,在例子选取上,结合实际,结合专业,突出经济应用。

另外,渗入数学家故事及数学史的阅读材料,以便培养读者热爱数学,并得到意志品质的熏陶;引入数学软件,解决繁琐的计算与作图,极大地提高了读者利用计算机求解数学模型的能力。

参加本教材编写工作的有金慧萍、陈沛森、罗晓芳、王联荣、潘媛、吴金勇、张胜兵等七位同志,其中陈沛森负责第一、二、三章,金慧萍负责第四、五、六章,潘媛负责第八、九、十章,吴金勇负责第七、十一章,罗晓芳参与第二、三章部分内容的编写,王联荣参与第四、五章部分内容的编写,张胜兵参与第八章部分内容的编写,金慧萍负责本教材的框架、结构及安排,金慧萍和陈沛森还承担了本教材的全部审稿工作。《经济数学》课程为 2010 年度浙江省高等学校省级精品课程建设项目。

限于编者水平,同时编写时间较仓促,书中难免存在不妥之处,希望读者批评指正。

编者

2010 年 10 月

目 录

第1章 函数、极限与连续	1
本章知识结构导图	1
阅读材料:美丽的数学	1
1.1 预备知识	2
1.1.1 集 合	2
1.1.2 实数集	3
1.1.3 实数的绝对值	3
1.1.4 区间与邻域	3
1.2 函 数	4
1.2.1 函数的概念	4
1.2.2 函数的几个重要特性	6
1.2.3 初等函数	8
1.2.4 经济活动中常见的函数举例	11
习题 1.2	15
1.3 数列的极限与函数的极限	16
1.3.1 中国古代数学家的极限思想	16
1.3.2 数列的极限	17
1.3.3 函数的极限	19
习题 1.3	22
1.4 极限的性质	23
1.4.1 极限的性质	23
1.4.2 极限的四则运算	23
习题 1.4	26
1.5 两个重要的极限	27
1.5.1 重要极限 I : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	27
1.5.2 重要极限 II : $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	28
习题 1.5	29
1.6 无穷小量与无穷大量	30

1.6.1 无穷小量与无穷大量的概念	30
1.6.2 无穷小量的性质	30
* 1.6.3 无穷小量阶的比较	31
习题 1.6	31
1.7 函数的连续性	31
1.7.1 函数 $y=f(x)$ 的连续与间断	32
1.7.2 连续函数的性质及初等函数的连续性	33
1.7.3 闭区间上连续函数的性质	34
1.7.4 经济和管理中函数的连续性	35
习题 1.7	35
本章小结	36
综合练习	37
第2章 导数与微分	39
本章知识结构导图	39
阅读材料:数学家费马(Fermat)	39
2.1 导数的概念	40
2.1.1 问题的引入	40
2.1.2 导数的定义	41
2.1.3 导数的几何意义	42
2.1.4 左、右导数	42
2.1.5 函数的可导与连续的关系	43
习题 2.1	43
2.2 导数的基本公式与求导法则	44
2.2.1 导数的基本公式	44
2.2.2 导数的四则运算法则	45
2.2.3 复合函数的求导法则	46
2.2.4 两种求导法	47
2.2.5 高阶导数	50
习题 2.2	51
2.3 函数的微分	52
2.3.1 问题的引入	52
2.3.2 微分的定义	53
2.3.3 微分的几何意义	53
2.3.4 微分在近似计算中的应用	54
2.3.5 微分基本公式和微分的运算法则	55
习题 2.3	56
本章小结	57

综合练习	58
第3章 导数的应用	60
本章知识结构导图	60
阅读材料:数学家拉格朗日(Lagrange)	60
3.1 微分中值定理与洛必达法则	61
3.1.1 罗尔(Rolle)中值定理	61
3.1.2 拉格朗日(Lagrange)中值定理	61
3.1.3 柯西(Cauchy)中值定理	62
3.1.4 洛必达法则	63
习题 3.1	66
3.2 函数的极值	67
3.2.1 函数的单调性	67
3.2.2 函数的极值	68
3.2.3 函数的最大值和最小值	70
习题 3.2	71
* 3.3 曲线的凹凸性与拐点	72
3.3.1 曲线的凹凸性及其判定法	72
3.3.2 拐点及其求法	73
3.3.3 曲线的渐近线	74
3.3.4 函数图像的描绘	74
习题 3.3	76
3.4 微分学在经济领域中的应用	76
3.4.1 边际问题	76
3.4.2 弹性问题	77
3.4.3 最优化问题	78
习题 3.4	81
本章小结	81
综合练习	82
第4章 不定积分	85
本章知识结构导图	85
4.1 原函数与不定积分的概念	85
4.1.1 原函数	85
4.1.2 不定积分的概念	86
4.1.3 不定积分的性质与基本积分公式	87
习题 4.1	90
4.2 不定积分的计算	90
4.2.1 第一类换元积分法(凑微分法)	90

* 4.2.2 第二类换元积分法	93
4.2.3 分部积分法	95
习题 4.2	97
本章小结	98
综合练习	99
第5章 定积分及其应用	102
本章知识结构导图	102
阅读材料:数学家莱布尼兹(Leibniz)	102
5.1 定积分的概念	103
5.1.1 问题的引入	103
5.1.2 定积分的概念	104
5.1.3 定积分存在的条件	105
5.1.4 定积分的几何意义与经济意义	105
5.1.5 定积分的性质	106
习题 5.1	107
5.2 微积分学的基本定理	107
5.2.1 变上限的定积分与原函数存在定理	107
5.2.2 牛顿-莱布尼兹(Newton-Leibniz)公式	108
习题 5.2	110
5.3 定积分的计算方法	110
5.3.1 定积分的换元积分法	111
5.3.2 定积分的分部积分法	112
习题 5.3	113
5.4 定积分的应用	113
5.4.1 用定积分求平面图形的面积	113
5.4.2 定积分在经济中的应用	115
习题 5.4	115
本章小结	116
综合练习	117
第6章 微分方程及其应用	121
本章知识结构导图	121
阅读材料:微分方程的简介	121
6.1 利用微分方程建立数学模型	122
6.1.1 种群增长的马尔萨斯(Malthus)模型	123
6.1.2 种群增长的逻辑斯谛(Logistic)模型	123
6.1.3 捕猎-食饵模型	124
6.2 微分方程的基本概念	124

习题 6.2	125
6.3 一阶微分方程	126
6.3.1 可分离变量的微分方程	126
6.3.2 齐次型的微分方程	128
6.3.3 一阶线性微分方程	130
习题 6.3	133
6.4 二阶常系数线性微分方程	134
6.4.1 二阶常系数线性齐次微分方程	134
6.4.2 二阶常系数线性非齐次微分方程	136
习题 6.4	138
6.5 微分方程在经济领域中的应用举例	138
6.5.1 关于商品需求方面	138
6.5.2 关于连续复利方面	139
6.5.3 关于未来预测方面	140
习题 6.5	141
本章小结	142
综合练习	143
第 7 章 多元函数的微分学	146
本章知识结构导图	146
阅读材料:数学家笛卡尔 (Descartes)	146
7.1 空间直角坐标系	147
7.1.1 空间直角坐标系	147
7.1.2 空间两点间的距离	147
习题 7.1	148
7.2 多元函数的概念	148
7.2.1 二元函数的概念	148
7.2.2 二元函数的极限与连续	150
习题 7.2	151
7.3 多元函数的偏导数与全微分	151
7.3.1 多元函数的偏导数	151
7.3.2 高阶偏导数	153
7.3.3 全微分	154
习题 7.3	155
7.4 多元函数的复合函数偏导数	155
7.4.1 中间变量是一元函数的情况	155
7.4.2 中间变量是多元函数的情况	156
习题 7.4	157

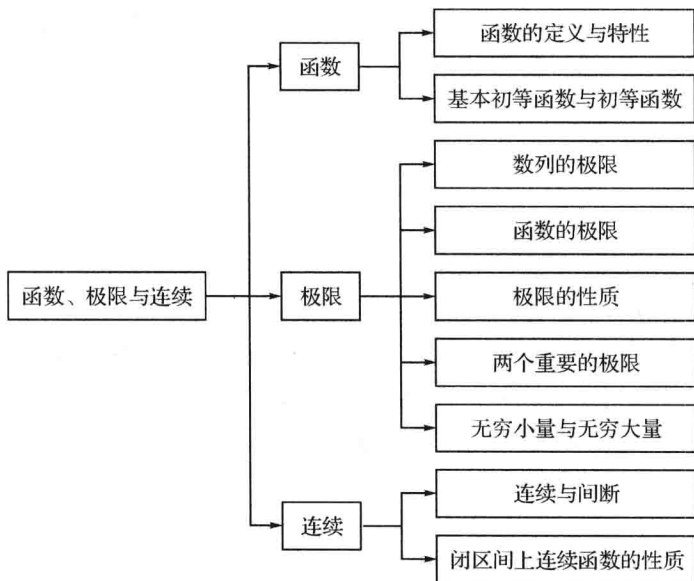
7.5 多元函数的极值	157
7.5.1 多元函数的极值	157
7.5.2 多元函数的最值	159
* 7.5.3 条件极值	160
习题 7.5	161
7.6 数学建模案例	161
7.6.1 人、狗、鸡、米问题	161
7.6.2 无差别曲线(Indifference Curve)	162
思考题 7.6	163
本章小结	163
综合练习	164
第8章 无穷级数	166
本章知识结构导图	166
阅读材料:数学家泰勒(Taylor)	166
8.1 常数项级数	167
8.1.1 常数项级数的概念	167
8.1.2 正项级数收敛性判别法	170
8.1.3 任意项级数、绝对收敛和条件收敛	173
习题 8.1	174
8.2 幂级数	176
8.2.1 幂级数的概念与性质	176
* 8.2.2 函数的幂级数展开	179
习题 8.2	182
8.3 级数在近似计算的应用举例	183
习题 8.3	184
8.4 数学建模案例:银行复利问题	184
8.4.1 复利法计算本利和	185
8.4.2 现值	185
8.4.3 年金和年金终值	185
8.4.4 年金现值	186
习题 8.4	187
本章小结	187
综合练习	188
第9章 线性代数及其应用	191
本章知识结构导图	191
阅读材料:数学家克莱姆(Cramer)	191
9.1 行列式	192

9.1.1 行列式的定义	192
9.1.2 行列式的性质	195
习题 9.1	200
9.2 矩阵的概念及计算	201
9.2.1 矩阵的概念	201
9.2.2 矩阵的运算	202
习题 9.2	206
9.3 矩阵的初等变换	207
9.3.1 初等变换的概念	207
9.3.2 矩阵的秩	210
习题 9.3	211
9.4 逆矩阵	212
9.4.1 逆矩阵概念	212
9.4.2 逆矩阵的求法	213
9.4.3 逆矩阵的运算性质	215
习题 9.4	216
9.5 线性方程组	216
9.5.1 线性方程组的概念与克莱姆法则	216
9.5.2 解线性方程组的消元法	220
习题 9.5	224
本章小结	225
综合练习	226
第 10 章 概率与统计初步	232
本章知识结构导图	232
10.1 随机事件与概率	232
10.1.1 随机事件的概念与关系	232
10.1.2 概率的定义	236
10.1.3 概率的基本性质与基本公式	238
习题 10.1	241
10.2 随机变量	242
10.2.1 常见的一维离散型随机变量与应用	242
10.2.2 常见的一维连续型随机变量及应用	246
习题 10.2	250
10.3 随机变量的数字特征	251
10.3.1 随机变量的数学期望	251
10.3.2 随机变量的方差	254
习题 10.3	256

10.4 数理统计基础	256
10.4.1 数理统计中的几个概念和几个简单的分布	257
10.4.2 假设检验的基本思想和正态总体的假设检验	260
10.4.3 参数估计	265
习题 10.4	270
本章小结	272
综合练习	275
第 11 章 MATLAB 简介	278
本章知识结构导图	278
11.1 MATLAB 基础知识	278
11.1.1 MATLAB 数学软件基本知识介绍	278
11.1.2 MATLAB 常用函数与计算	280
11.2 用 MATLAB 软件解方程、求极限、导数、积分、微分方程	281
11.2.1 用 MATLAB 软件解方程	281
11.2.2 用 MATLAB 软件求极限	282
11.2.3 用 MATLAB 软件求导数	283
11.2.4 用 MATLAB 软件求积分	283
11.2.5 用 MATLAB 软件解微分方程	284
11.3 向量、矩阵及其运算	284
11.3.1 向量的表示及运算	284
11.3.2 矩阵的表示及运算	286
11.3.3 解线性方程组	288
11.4 MATLAB 图形处理	289
11.4.1 二维图形	290
11.4.2 三维图形	293
11.5 优化工具箱简介	294
11.5.1 无约束最小值	294
11.5.2 线性规划	295

第1章 函数、极限与连续

本章知识结构导图



阅读材料

美丽的数学

中国古代著名哲学家庄子说：“判天地之美，析万物之理。”这是学习与研究数学的指导思想和最高美学原则。

古希腊柏拉图派的领军人物，哲学家、评论家普洛克拉斯(Proclus, 410—485)指出：“数学是这样一种东西：她提醒你有无形的灵魂，她赋予她所发现的真理以生命；她唤醒心神，澄净智慧；她给我们的内心思想添辉；她涤尽我们有生以来的蒙昧与无知。”“哪里有数，哪里就有美。”

数学追求的目标是，从混沌中找出秩序，使经验升华为规律，将复杂还原为基本。所有这些美的标志，美是真理的光辉。那么，什么是美呢？美有两条标准：一、“一切绝妙的美都显示出奇异的均衡关系”(培根)；二、“美是各部分之间以及各部分与整体之间固有的和谐”(海森堡)。

数学的美具体表现在：简单、对称、和谐、统一、普遍、典型、完备和奇异等。数学中的对称美是很明显的，如一切平面图形中最为完美的对称是圆形，一切立体图形中最为完美的对称是球形，再如 $11 \times 11 = 121$, $111 \times 111 = 12321$, $1111 \times 1111 = 1234321$, $\dots$ ，无不体现出对

称的美妙.同时数学又是相当和谐简洁的,如出身大不相同又十分重要的五个数 $0, 1, \pi, e, i$ 能和谐共处在一个简洁的等式中,即欧拉公式 $e^{\pi i} + 1 = 0$.从数的产生到数量关系的形成,再到各种演算的法则,无不体现着数学的一种平衡和谐的美.正数与负数、实数与复数、从平面上的圆方程 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ 到空间的球面方程 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ 等等,都具有一种形式上的美.加与减、乘与除、乘方与开方、函数与反函数,那是数学内在的平衡的美.正因为数学具有这种形式到内容美的品质,才使她发展得如此完善,并成为“科学的大门和钥匙”.——培根(R. Bacon, 美国哲学家、科学家和教育改革家)

1.1 预备知识

这里我们将对集合、实数集、区间与邻域等作一简单介绍.并鉴于初学者在学习本课程前所掌握的初等数学的差异,我们还适当地介绍或复习初等数学中的一些重要结果和公式,供学习者选用.

1.1.1 集 合

集合是数学中一个基本的概念,我们可通过例子来理解它.某一个教室里的学生构成一个集合;太阳及围绕太阳运动的星体构成集合,称为太阳系;所有有理数构成集合,称为有理数集;全体实数也构成一个集合,称为实数集,等等.

一般地,集合(简称集)就是具有某种属性的事物的全体.集合一般用大写字母 $A, B, C, \dots$ 来记,而组成这个集合的事物称为该集合的元素,一般用小写字母 $a, b, c, \dots$ 来记.

事物 a 是集合 A 的元素记作 $a \in A$ (读作 a 属于 A);

事物 a 不是集合 A 的元素记作 $a \notin A$ (读作 a 不属于 A).

很显然,事物 a 与集合 A 的关系是:要么 $a \in A$, 要么 $a \notin A$.

集合一般有两种表示法,即列举法和描述法.所谓列举法就是集合中的所有元素都一一列出来的方法,而描述法就是通过给出元素的特性来表示集合的方法.

例如,由 $2, 4, 6, 8, 10$ 五个数所构成的集合 A , 用列举法表示为 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, 而用描述法表示为 $A = \{2n \mid n \leq 5, n \in \mathbb{Z}^+\}$; 又例如,满足方程 $x^2 + 4x + 3 = 0$ 的全体根的集合 A , 用列举法表示为 $A = \{-1, -3\}$, 用描述法表示为 $A = \{x \mid x^2 + 4x + 3 = 0\}$.

由此可见,一个集合可以有不同的表示法,即集合的表示法不是唯一的.

只含有一个元素的集合也叫单元集;不含有任何元素的集合叫空集,记为 $\emptyset$.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 与 $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

可以看出 A 中的每一个元素都是 B 中的元素,我们称 A 为 B 的子集,并记作 $A \subset B$.

设 A, B 是两个集合,如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称 A 与 B 相等,记作 $A = B$. 很明显,两个集合只有含相同元素时才相等.

设集合 A, B, C , 如果 $x \in C$, 有 $x \in A$ 或 $x \in B$, 则称 C 为 A 与 B 的并集,记为: $C = A \cup B$, 显然有 $A \subset C$ 且 $B \subset C$. 例如 $\{1, 2, 3\} \cup \{1, 2, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

设集合 A, B, C , 如果 $x \in C$, 有 $x \in A$ 且 $x \in B$, 则称 C 为 A 与 B 的交集,记为: $C = A \cap B$, 可以看出 C 是由 A, B 的公共元素所构成的,显然有 $C \subset A$ 且 $C \subset B$. 例如 $\{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 4, 5\} = \{1, 2\}$.

【例 1.1】 设集合 $A = \{0, 1, 2\}$, 试求 A 的所有子集.

【解】 A 的子集有 2^3 个, 即 $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}$.

特别要注意, 在考虑集合 A 的所有子集时不要漏掉集合 A 本身和空集 $\emptyset$.

1.1.2 实数集

经济数学这门课程主要是在实数范围之内讨论问题的, 因此对于实数或实数集必须有比较清晰的认识. 在这里我们将对此作一简单的介绍.

人们对实数的认识是逐步发展的, 首先是自然数 $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ 其全体记为 $\mathbf{N}$, 并称之为自然数集. 随着客观事物的发展, 从自然数集扩充到有理数集, 任一有理数都可以表示成 $\frac{p}{q}$ (p, q 为整数, 且 $q \neq 0$), 用 $\mathbf{Q}$ 来表示有理数集. 显然有理数集的引进解决了许多实际问题, 但对如何表示方程 $x^2 = 2$ 的根这一问题却无能为力. 前人在有理数集基础上引进了实数集的概念, 实数包括有理数与无理数, 通常用 $\mathbf{R}$ 来表示实数集.

有关实数的许多性质诸如有序性、稠密性及连续性都可通过数轴直观地加以解释. 数轴可如下确定: 在一条直线上取定一点, 记作 O , 称其为原点; 取直线的一个方向为正向, 并用箭头表示; 再取一个单位长度, 就可构成数轴. 数轴上的任意一点 P , 都对应一个实数 x . 这个实数 x 是这样确定的: 若 P 与原点 O 重合, 则 $x = 0$; 若 P 不与原点 O 重合, 首先用所取的单位长度量出线段 OP 的长度 $|OP|$, 如果有向线段 OP 与数轴正向相同, 则 $x = |OP|$; 如果有向线段 OP 与数轴正向相反, 则 $x = -|OP|$. 反之, 任给一个实数 x , 都可以在数轴上找到一个点 P , 使该点 P 所对应的实数为 x . 这样, 数轴上的点与实数之间建立起一一对应关系 (如图 1.1 所示).

实数集合等价于数轴上点的集合. 在今后的讨论中, 我们总把点与实数同等看待.

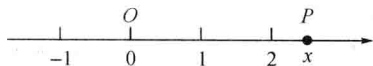


图 1.1

1.1.3 实数的绝对值

对任意实数 x , 其绝对值用 $|x|$ 表示, 并且当 $x \geq 0$ 时有 $|x| = x$; 当 $x < 0$ 时有 $|x| = -x$. 绝对值 $|x|$ 有明显的几何意义: 实数 x 的绝对值等于数轴上点 x 到原点 O 的距离. 绝对值有如下几个主要性质 (以下的 x, y 为任意实数):

- (1) $-|x| \leq x \leq |x|$;
- (2) $|x + y| \leq |x| + |y|$;
- (3) $||x| - |y|| \leq |x - y|$;
- (4) $|xy| = |x| |y|$;
- (5) $|\frac{y}{x}| = \frac{|y|}{|x|} (x \neq 0)$.

1.1.4 区间与邻域

在实数集合 $\mathbf{R}$ 的子集中, 区间是我们讨论问题时经常涉及的. 所谓区间就是数轴上介于某两点之间的一切点所构成的集合, 这两个点称为区间的端点. 如果端点都是定数, 则称为有限区间 (并称两端点之差的绝对值为区间长度), 否则称为无限区间. 常见的区间有:

- | | |
|-----|--|
| 开区间 | $(a, b) = \{x \mid a < x < b\};$ |
| 闭区间 | $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\};$ |

半开半闭区间	$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\};$ $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\};$
无穷区间	$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\};$ $(a, +\infty) = \{x \mid x > a\};$ $(-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\};$ $(-\infty, a) = \{x \mid x < a\};$ $(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}.$

通常用大写字母如 I 表示某个给定的区间.

为了今后讨论问题在表达上的方便,还要介绍有关邻域的概念.

设 $a \in \mathbf{R}, \delta > 0$ 且 $\delta \in \mathbf{R}$, 则

集合

$$\{x \mid |x - a| < \delta\},$$

称为点 a 的 δ -邻域, 记作 $U(a, \delta)$, 也即 $U(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta)$, 这是以点 a 为中心, 区间长度为 2δ 的开区间, 正数 δ 叫做邻域的半径.

集合

$$\{x \mid 0 < |x - a| < \delta\},$$

称为点 a 的 δ -空心邻域, 记作 $U^0(a, \delta)$, 也即 $U^0(a, \delta) = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$.

另外, 点 a 的左邻域和右邻域定义为 $U^-(a, \delta) = (a - \delta, a]$ 和 $U^+(a, \delta) = [a, a + \delta)$.

当不必指明邻域半径时, 上述记号中的正数 δ 可省略, 即邻域、空心邻域、左邻域和右邻域可简记为 $U(a), U^0(a), U^-(a)$ 和 $U^+(a)$.

【例 1.2】 求不等式 $x^2 + x - 12 > 0$ 的解集, 并用区间表示出来.

【解】 先对不等式左端分解因式, 原不等式为

$$(x - 3)(x + 4) > 0,$$

即有 $x - 3 > 0$ 或 $x + 4 < 0$, 即 $x > 3$ 或 $x < -4$. 故原不等式的解集为 $(-\infty, -4) \cup (3, +\infty)$.

1.2 函 数

初等数学的研究对象基本上是不变的量, 即通常所讲的常量. 而经济数学研究的主要对象是变量及变量之间的关系(即函数). 函数是经济数学最基本的概念之一, 本章从讨论函数的概念开始, 通过对一般函数特性的概括, 引出初等函数, 为学习经济数学打下基础.

1.2.1 函数的概念

在研究自然的、社会的以及经济活动的某个过程时, 常常会碰到各种不同的量, 如时间、速度、温度、成本和利润等. 这些量一般可分成两类, 其中一类量在所研究过程中保持不变, 这种量被称为常量; 而另一类量在所研究过程中总是变化着的, 我们把它叫做变量.

例如, 单价为 5 元的足球彩票的销售额 y (元) 与销量 x (张) 之间的关系 $y = 5x$ 中, 显然销售额 y 和销量 x 是变量, 且 y 依赖于 x , 也即当 x 在自然数集 $\mathbf{N}$ 中任意取定时, 由上式就可确定 y 的数值.

又如, 圆的面积公式 $S = \pi R^2$ 中, π 是常量, 面积 S 和半径 R 是变量, 且 S 随着 R 的变化而变化, 即变量 S 依赖于变量 R .

再如,自由落体的变化规律 $h = \frac{1}{2}gt^2$ 中,加速度 g 是常量,距离 h 和时间 t 是变量,且 h 是随着 t 的变化而变化,即变量 h 依赖于变量 t ;

抽去以上这些例子中所考虑的量的实际意义,它们都表达了两个变量之间的相互依赖关系,这种关系给出了一种对应法则.根据这一对应法则,当其中一个变量在其变化范围内任取一个值时,另一个变量就有相应的值与之对应.两个变量之间的这种对应关系就是函数概念的实质.

1. 函数的定义

【定义 1.1】 设 D 是非空实数集,如果对于任意的 $x \in D$,按照某个对应法则 f ,都有唯一的一个实数 y 与之对应,则称 y 是定义在 D 上的关于 x 的函数,记作 $y = f(x)$.

其中 x 叫做自变量, y 叫做因变量, x 的取值范围 D 叫做这个函数的定义域,当 x 在取遍 D 内的所有实数时,对应的函数值 y 的全体 $W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 叫做这个函数的值域.

2. 函数的几点说明

(1) 函数的两个要素

从函数的定义可知,定义域与对应法则是函数的两个要素.只有两个函数具有相同的定义域和相同的对应法则时,它们才是相同的函数,否则就不是相同函数.

例如,对数函数 $y = \log_a x^2$ 与 $y = 2\log_a x$ 不能视为相同函数.因为 $y = \log_a x^2$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,而 $y = 2\log_a x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,两者的定义域不相同,所以不能视为相同函数.当然在它们的公共定义域 $(0, +\infty)$ 内,两者完全一致.

(2) 函数的定义域

函数的定义域就是指使得函数有意义的自变量的取值范围,为此求函数的定义域时应遵守以下原则:

分式中分母不能为零;

开偶次方根时被开方数非负;

对数中的真数大于零;

三角函数中要注意 $\tan x$ 与 $\cot x$ 的定义域;

反三角函数中要注意 $\arcsin x$ 与 $\arccos x$ 的定义域;

对于实际问题的函数,应保证符合实际意义.

【例 1.3】 求函数 $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\ln(2-x)}$ 的定义域.

【解】 从函数式子中可看出需考虑:根式内非负、分母不为零、对数真数大于零等三种情况,取它们的公共部分,即求不等式组
$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2-x > 0 \\ \ln(2-x) \neq 0 \end{cases}$$
 的解集,得 $D = [-1, 1) \cup (1, 2)$.

(3) 函数的图像

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D ,任取 $x \in D$ 得到对应的函数值 y ,则实数对 (x, y) 在 xOy 平面内确定了一点 $P(x, y)$,我们称集合(平面上点的集合)

$$C = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

为函数 $y = f(x)$ 的图像(或图形).

例如,函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图像(如图 1.2 所示),它表示的是第 I 和第 III 象限内的两支双曲线.