李殿璞 编著

非线性控制系统理论基础（第2版）

清华大学出版社

李殿璞　编著

非线性控制系统理论基础（第2版）

清华大学出版社
北京

内容简介

本书讲授非线性系统理论。非线性系统理论与线性系统理论相平行、相对应，但更具一般性。非线性系统理论所使用的主要数学工具微分几何方法已被证明是分析和设计非线性系统的卓有成效的和强有力的工具。本书便于教学使用，内容由浅入深，概念清晰，理论严谨，有重新构建的更为合理的体系结构，侧重于系统地介绍基础理论，同时也兼顾实际应用。为使读者时刻掌握学习的主动性和更便于自学使用，本书除在每章节前对内容作概括介绍外，还对每个定理、命题、例题都给出方法提示或目标指示。

本书可作为理工科院校控制科学与工程学科、电气工程学科和诸多相关学科专业博士研究生和硕士研究生的教材，也可供初涉非线性理论领域的读者作为入门教材和自学教材使用，还可供相关学科的科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

非线性控制系统理论基础/李殿璞编著. --2 版. --北京：清华大学出版社，2014

ISBN 978-7-302-34126-0

Ⅰ. ①非…　Ⅱ. ①李…　Ⅲ. ①非线性控制系统－理论－高等学校－教材　Ⅳ. ①TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 243508 号

责任编辑：孙　坚　洪　英
封面设计：傅瑞学
责任校对：刘玉霞
责任印制：沈　露

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　邮　　编：100084
　　社 总 机：010-62770175　　邮　　购：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京富博印刷有限公司
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：32.5　　**字　　数**：791 千字
版　　次：2006 年 9 月第 1 版　2014 年 3 月第 2 版　　**印　　次**：2014 年 3 月第 1 次印刷
印　　数：1～2000
定　　价：65.00 元

产品编号：054129-01

第 2 版前言

与线性系统理论相对应，本书的内容是非线性系统理论。同线性系统理论一样，非线性系统理论建立在状态空间分析方法的基础上。非线性系统理论所使用的主要数学工具是微分几何。微分几何方法已被证明是分析和设计非线性系统的卓有成效的和强有力的工具，正如拉氏变换、复变函数理论和线性代数对于早期和近代的线性系统理论一样。鉴于微分几何方法对于研究非线性系统理论的重要性，以及至今尚缺少一本研究生所需要的非线性几何理论的入门教材的现状，提供一本内容由浅入深、概念清晰、理论严谨，侧重于系统地介绍基础理论，同时也兼顾实际应用，深度适当、体系结构合理的教材十分必要。本书还要能适应读者进一步研修提高和深入进行理论研究工作，能显著提高读者文献阅读能力的需要，以及满足初涉非线性理论领域的其他方面的广大读者进行自学的需要。本书就是为适应这些需要而奉献给广大研究生和相关领域的科技工作者朋友的。

学习经典性著作一直被认为是深入学习非线性理论的必经之路和基本功。本书同时也是一部名著或经典的解读和阐释教材，主要参考 A. Isidori 的经典名著 *Nonlinear Control Systems* 写成，几乎涵盖了该书的所有主要基础内容。

为便于教学，本书对原有体系框架加以改造、整理，构建了非线性控制系统几何理论的一种更为严谨、合理、概念清晰的结构框架体系。所有内容被分门别类，重新组织，尽可能地做到条分缕析、各就各位，成为一个层次分明和有条有理的系统。相信这对非线性控制系统理论的学习、理解、教学、教材组织、深入研究都会带来极大的方便。

为使读者时刻掌握学习的主动性和更便于自学，本书除在每章前对内容作概括介绍外，还对每个定理、引理，每个命题、例题都随时随地提供方法提示或目标指示。为方便检索，书后附有基于重要词语和概念的索引。

虽然不能奢望学习非线性理论之路不崎岖、不艰辛，但不能不修路。希望本书能给走在征途上的相关学科专业的硕士生、博士生和科技工作者、科技管理者们提供一条更为平直的路。

本书大体上分为 4 个部分，构成基本完整的体系。第一部分是微分拓扑和微分几何基本概念和数学基础部分，包括第 1～4 章，重点介绍切向量、对偶向量、切空间、对偶空间、向量场、对偶向量场、李导数、李积、李括号、李代数、不变分布、不变最小分布等基本概念。第

二部分讨论非线性控制系统的基本性质,包括第5～9章,介绍非线性系统能控性、能观测性、分布可积性和系统的能控和能观性分解、输入-输出的级数表示等。第三部分讨论单入单出非线性系统的精确线性化理论,包括第10～20章,介绍非线性系统坐标变换、相对阶、零动态、扰动解耦、前馈控制、状态观测器、工业控制应用实例、中心流形理论、奇异扰动的几何理论等。第四部分讨论多入多出非线性系统的精确线性化理论,包括第21～28章,介绍线性化方法、多种工业控制应用实例、通过动态扩充改变相对阶、静态和动态反馈下的非交互控制加稳定性。前三部分属于基础性教学,第四部分属于课外阅读和提高部分,也可供课堂教学使用。为使基础知识掌握得更牢固,前三部分除少数章节外,每章后都附有习题。并在书后提供了习题答案供参考。

为便于灵活地组织教学,本书采用小章节结构编排。各章节尽量做到有独立性,构成一个独立的教学单元,以便于按教学需要加以取舍。各章节统一按理论结构体系而非按其用途命名,章节内容归并也服从理论结构体系要求,而不首先追求章节内容分量均衡。

本书前6章是基本教学部分。第7～20章是专题教学部分,可划分为8个教学专题,即第7、8章的系统分解为专题一,第9章的输入-输出映射为专题二,第10、11章的单入单出线性化为专题三,第12章的零动态为专题四,第13～15章的渐近镇定和渐近跟踪为专题五,第16～18章的扰动解耦、状态观测器和线性化实例为专题六,第19章的中心流形理论为专题七,第20章的奇异扰动为专题八。最后一部分第21～28章可划分为6个专题,即第21～23章的多入多出线性化为专题九,第24章的多入多出线性化实例为专题十,第25章的动态扩充相对阶为专题十一,第26章的静态反馈下的非交互控制加稳定性为专题十二,第27章的动态反馈下的非交互控制加稳定性为专题十三,第28章的受控不变分布和无相对阶系统的扰动解耦为专题十四。

本书可根据不同的教学要求选择不同的教学实施方案。前6章基础部分应作扼要和重点讲授,掌握了基础部分之后应已具有自学能力,可进入以后各章的专题教学阶段。理论和实用全面完整的教学实施约需48～64学时,即便如此也不必要面面俱到地讲授,讲、读、练、讨论相结合的教学方式较为适宜。理论和实用兼顾只作一般要求的基础教学约需32学时,可只讲授前6章,再加上第10～12章,必要时讲授第13、19章和第14、20章。有所侧重的教学实施约需32～48学时。侧重理论的教学实施可再加上第7～9章的内容。侧重应用的教学实施可再加上第21～25章的内容。

感谢清华大学出版社在本书出版过程中给予的各方面的指导和帮助,同时也感谢孙玉兰、李效峰两位志愿者在书稿录入和校对方面所做的大量工作。

由于编著者的学养所限,写作时间紧迫,书中难免有疏漏和不当之处,请读者不吝赐教,欢迎批评指正,以便在重印或再版时更正,使本书更臻完善。

编著者

2014年1月

目 录

第1章

切向量和对偶向量

本书第1～4章为后续各章提供微分拓扑和微分几何数学基础。本章介绍微分拓扑和微分几何的一些基本知识和基本概念。1.1节和1.2节讲述光滑流形、光滑映射、切向量、切空间、对偶向量、对偶切空间、正交对偶向量、全微分对偶向量、零化子等概念。1.3节重点讲述切向量映射和对偶向量映射的定义和有关映射公式，后者包括切向量映射的局部坐标表示和向量表示、对偶向量映射的局部坐标表示和向量表示。1.4节讲述微分流形间基本映射形式，建立微分同胚、浸入子流形和嵌入子流形概念。本章主要参考文献：[1,15,16,19,96～101,103～106]。

1.1　切向量和切空间

1.1.1　切向量

在定义切向量之前，首先给出光滑函数的定义。注意在本节、本章以至全书的叙述中都将按国际非线性学术界表达惯例，向量将一律用白斜体字母表示。

定义1.1　设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集（即 A 内每点都可找到一个完全属于 A 的邻域），$f:A\to\mathbb{R}$ 是一个函数。f 在点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in A$ 的值记为 $f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。如果 f 对 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的任意阶偏导数存在且连续，则称函数 f 是 C^∞ **类函数**（function of class C^∞），简称 f 是一个 C^∞ 函数或称 f 是一个**光滑函数**（smooth function）。如果函数 f 是 C^∞ 的，且对任意指定点 $x^\circ\in A$，存在 x° 的一个邻域 U，使对所有 $x\in U$，f 在 x° 的 Taylor 级数展开式都收敛到 $f(x)$，则称 f 是一个 C^ω **函数**或称 f 是一个**解析函数**（analytic function）。

定义1.2　一流形 N 上有定义的所有光滑函数的集合，记为 $C^\infty(N)$。在流形 N 上一点 p 的邻域有定义的所有光滑函数的集合，记为 $C^\infty(p)$。

下面着手定义切向量。

定义1.3　设 N 是一个 n 维光滑子流形，$C^\infty(p)$ 是在 N 上 p 点有定义的光滑函数集合，$v:C^\infty(p)\to\mathbb{R}$ 是定义在 $C^\infty(p)$ 上的泛函（算子），如果 v 有下列性质（也称求导性质）：

(1) 线性性

$$\begin{aligned} v(\lambda+\gamma) &= v(\lambda)+v(\gamma), & \forall\lambda,\gamma\in C^\infty(p) \\ v(a\lambda) &= av(\lambda), & \forall a\in\mathbb{R},\forall\lambda\in C^\infty(p) \end{aligned} \tag{1.1}$$

(2) 符合 Leibnitz 规则

$$v(\lambda\gamma)=\gamma(p)v(\lambda)+\lambda(p)v(\gamma) \tag{1.2}$$

则称 v 是定义在流形 N 上某点 p 的一个**切向量**(tangent vector)。

下面对定义 1.1～1.3 作一些概念性说明。

(1) **流形**(manifold)是拓扑学和微分几何中的重要概念。不过,为不涉及过多的数学基础,此处不准备作严格的定义。从概念上说,一个 n 维流形可理解为由多个同为 n 维的曲面(或超曲面)经拼接所得到的曲面(或超曲面)。

(2) 流形的一个特征是,它的一个局域可以与一个 n 维欧氏空间之间建立起点与点间的一对一映射关系,它的每个局域可以分别与各自的一个 n 维欧氏空间之间建立起点与点间的一对一映射关系,并可在此基础上建立起通用于各局域的流形局部坐标系,从而变成可度量的(metrizable)。

(3) 具有微分结构的流形被称为**微分流形**(differential manifold)。这里所说的微分结构,是指参与拼接的曲面(或超曲面)彼此拼接得是如此之好,以至于流形作为一整体与 n 维欧氏空间之间的映射能达到任意次可微的程度,即达到光滑的程度。因此微分流形也称为**光滑流形**(smooth manifold)或简称**流形**。微分流形可理解为是由多个同为 n 维的光滑曲面(或超曲面)经拼接所得到的光滑曲面(或超曲面),也就是有任意阶导数的 n 维曲面(或超曲面)。

(4) 定义在流形 N 上的光滑函数 $\lambda(p)$ 就是定义在流形 N 的局部坐标系上的函数。对于一个光滑流形而言,其各阶导数都存在。

(5) 光滑函数 $\lambda(p)$ 在某方向上的变化率,一般称为**方向导数**(directional derivative)。方向导数取值是一实数。算子 v 表示求方向导数的操作,故其映射关系可表示为 $v: C^\infty(p) \to \mathbb{R}$。

(6) 求导的方向在函数 $\lambda(p)$ 的定义域上表示,即指的是流形局部坐标平面(或超平面)上定的方向,而不是指在 $\lambda(p)$ 曲面的切平面(或超切平面)上定的方向。

切向量和方向导数有密切关系,但这是两个不同的概念。切向量被定义为一个抽象的泛函(算子),指的是 $C^\infty(p)$ 至欧氏空间 $\mathbb{R}$ 的一个映射,而方向导数则指的是该映射的像值。下面用一个例子做具体的解释。

例 1.1 (流形 $\mathbb{R}^n$ 上的切向量,切向量和方向导数的差异) 设 $\lambda(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的 C^∞(光滑)函数,$\lambda(x)$ 在点 x 的方向导数(即 $\lambda(x)$ 在定义域一定方向上的坡度或变化率)定义为

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}\right)_x \tag{1.3}$$

式中,v_i 是表示方向的系数。方向可以是给定的方向,也可以是某个体现函数 $\lambda(x)$ 自身性质的方向。

比如,$\lambda(x)$ 在点 x 的**梯度**(gradient)被定义为向量

$$\operatorname{grad} \lambda(x)|_x = \left(\left.\frac{\partial \lambda}{\partial x_1}\right|_x \quad \cdots \quad \left.\frac{\partial \lambda}{\partial x_n}\right|_x \right)^{\mathrm{T}}$$

$\lambda(x)$ 在点 x 的方向导数在此方向有最大坡度值 $|\operatorname{grad} \lambda(x)|_x|$ 梯度方向是 $\lambda(x)$ 上升最陡的方向,所体现的就是函数 $\lambda(x)$ 自身的性质。

如果把式(1.3)改写成

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}\right)_x = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_x\right) \lambda(x_1, \cdots, x_n)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial}{\partial x_n} \right)_x \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \lambda(x_1, \cdots, x_n) = v(\lambda(x)) \tag{1.4}$$

$\underbrace{\text{切向量的基底}\quad\text{方向向量}}_{\text{切向量}}$ 光滑函数 方向导数

可见方向导数可拆成三部分。方向导数的前面两部分，即切向量的基底(基底将在 1.1.2 节定义)和方向向量合称为切向量。此切向量完全符合式(1.1)和式(1.2)的切向量定义。

方向的表示方法一般有两种。一种是用**方向余弦**向量$(\cos\alpha_1 \quad \cdots \quad \cos\alpha_n)^{\mathrm{T}}$表示，另一种是用方向数向量$(v_1 \quad \cdots \quad v_n)^{\mathrm{T}}$表示。切向量的方向一般都用后一种表示。方向数向量归一化后等于方向余弦向量。也可以说方向数向量等于方向余弦向量外乘一个常数。该常数表示向量的长度或大小。所以通常所说的方向向量不仅指方向，还可能包括其长度。切向量的方向和大小都是点的函数。在不同点上，不仅方向可能不同，而且外乘的常数(向量的长度)也可能会随之不同。尽管方向数向量有外乘常数，不仅表示方向，但为方便，以后仍将把它们和方向余弦向量一样看待，一律笼统地称为方向向量。

此外，还应特别提请读者注意的是，在后续章节中，在很多情况下，可能只给出方向向量部分，而省去基底部分，这时常把仅存的方向向量部分称为切向量。

1.1.2 切空间

定义 1.4 子流形 N 上所有定义在点 p 的切向量 v 的集合，记为 T_pN。

有必要再次向读者强调，点 p 是在流形的局部坐标平面(或超平面)上，而不是在函数 $\lambda(p)$ 的切平面(或超切平面)上。各切向量 v 是指在流形的局部坐标平面(或超平面)上的切向量，而不是指 $\lambda(p)$ 的切平面(或超切平面)上的切向量。

定义 1.5 在集合 T_pN 上定义"加"和"数乘"运算为

$$\begin{aligned} (v_{\cdot} + v_{\cdot\cdot})(\lambda) &= v_{\cdot}(\lambda) + v_{\cdot\cdot}(\lambda), & \forall\, v_{\cdot}, v_{\cdot\cdot} \in T_pN \\ (a\, v_{\cdot})(\lambda) &= a\, v_{\cdot}\,(\lambda), & \forall\, a \in \mathbb{R}, \forall\, v_{\cdot} \in T_pN \end{aligned} \tag{1.5}$$

定义两种运算之后，就构成了线性空间或称向量空间 T_pN，称它为流形 N 上 p 点的**切空间**(tangent space)。

定义 1.6 $\left.\dfrac{\partial}{\partial \phi_1}\right|_p, \cdots, \left.\dfrac{\partial}{\partial \phi_n}\right|_p$ 被称为张成切空间 T_pN 的一组**基**，或称**基底**(bases)。

在此基底下，切空间 T_pN 中的切向量可一般地表示为

$$v = v_1 \left.\frac{\partial}{\partial \phi_1}\right|_p + \cdots + v_n \left.\frac{\partial}{\partial \phi_n}\right|_p = \left(\frac{\partial}{\partial \phi_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial}{\partial \phi_n} \right)_p \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

在定义 1.6 中，$(\phi_1, \cdots, \phi_n)$表示流形 N 上点 p 附近的局部坐标。如上面强调的，切空间自然处于流形局部坐标平面(或超平面)上，而不是在函数 $\lambda(p)$ 的切平面(或超平面)上。

例 1.2 (一个二元函数的切向量及其方向表示) 考虑二元光滑函数 $\lambda(x) = x_1^2 + 4x_2^2$。相应的切向量定义为

$$v = \left(v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \right)_x \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

(1) 求函数 $\lambda(x)=x_1^2+4x_2^2$ 在 x_1 轴上点 $x^\circ=(4,0)$ 处的方向导数，方向取 $v_1=1,v_2=0$。所求方向导数

$$v(\lambda(x^\circ))=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2}\end{pmatrix}_{x^\circ}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}\lambda(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2}\end{pmatrix}_{x^\circ}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(x_1^2+4x_2^2)=8$$

按梯度定义，$\lambda(x)$ 在点 $x^\circ=(4,0)$ 的梯度被定义为向量

$$\operatorname{grad}\lambda(x)\big|_{x^\circ}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\lambda}{\partial x_1} & \frac{\partial\lambda}{\partial x_2}\end{pmatrix}^{\mathrm T}_{x^\circ=(4\ \ 0)}=\begin{bmatrix}2x_1\\8x_2\end{bmatrix}_{x^\circ=(4\ \ 0)}=\begin{bmatrix}8\\0\end{bmatrix}=8\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

可见 $v=(1\quad 0)^{\mathrm T}$ 是 $\lambda(x)$ 在点 $x^\circ=(4,0)$ 处上升最陡的方向，最大坡度值 $|\operatorname{grad}\lambda(x)|_{x^\circ}|=8$。

(2) 求函数 $\lambda(x)=x_1^2+4x_2^2$ 在 $-x_1$ 轴上点 $x^\circ=(-4,0)$ 处的方向导数，方向取 $v_1=-1,v_2=0$。所求方向导数

$$v(\lambda(x^\circ))=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2}\end{pmatrix}_{x^\circ}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}\lambda(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2}\end{pmatrix}_{x^\circ}\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}(x_1^2+4x_2^2)=8$$

按梯度定义，$\lambda(x)$ 在点 $x^\circ=(-4,0)$ 的梯度被定义为向量

$$\operatorname{grad}\lambda(x)\big|_{x^\circ}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\lambda}{\partial x_1} & \frac{\partial\lambda}{\partial x_2}\end{pmatrix}^{\mathrm T}_{x^\circ=(-4\ \ 0)}=\begin{bmatrix}2x_1\\8x_2\end{bmatrix}_{x^\circ=(-4\ \ 0)}=\begin{bmatrix}-8\\0\end{bmatrix}=8\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$$

可见 $v=(-1\quad 0)^{\mathrm T}$ 是 $\lambda(x)$ 在点 $x^\circ=(-4,0)$ 处上升最陡的方向，最大坡度值 $|\operatorname{grad}\lambda(x)|_{x^\circ}|=8$。

(3) 求函数 $\lambda(x)=x_1^2+4x_2^2$ 在 x_2 轴上点 $x^\circ=(0,4)$ 处的方向导数，方向取 $v_1=0,v_2=1$。所求方向导数

$$v(\lambda(x^\circ))=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2}\end{pmatrix}_{x^\circ}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}\lambda(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2}\end{pmatrix}_{x^\circ}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(x_1^2+4x_2^2)=32$$

按梯度定义，$\lambda(x)$ 在点 $x^\circ=(0,4)$ 的梯度被定义为向量

$$\operatorname{grad}\lambda(x)\big|_{x^\circ}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\lambda}{\partial x_1} & \frac{\partial\lambda}{\partial x_2}\end{pmatrix}^{\mathrm T}_{x^\circ=(0\ \ 4)}=\begin{bmatrix}2x_1\\8x_2\end{bmatrix}_{x^\circ=(0\ \ 4)}=\begin{bmatrix}0\\32\end{bmatrix}=32\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

可见 $v=(0\quad 1)^{\mathrm T}$ 是 $\lambda(x)$ 在点 $x^\circ=(0,4)$ 处上升最陡的方向，最大坡度值 $|\operatorname{grad}\lambda(x)|_{x^\circ}|=32$。

(4) 求函数 $\lambda(x)=x_1^2+4x_2^2$ 在点 $x^\circ=(2\sqrt2,2\sqrt2)$ 处的方向导数，取方向余弦型方向向量为 $v_1=\sqrt2/2,v_2=\sqrt2/2$。所求方向导数

$$v(\lambda(x^\circ))=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2}\end{pmatrix}_{x^\circ}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}\lambda(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2}\end{pmatrix}_{x^\circ}\begin{bmatrix}\sqrt2/2\\\sqrt2/2\end{bmatrix}(x_1^2+4x_2^2)=20$$

按梯度定义，$\lambda(x)$ 在点 $x^\circ=(2\sqrt2,2\sqrt2)$ 的梯度被定义为向量

$$\operatorname{grad}\lambda(x)\big|_{x^\circ}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\lambda}{\partial x_1} & \frac{\partial\lambda}{\partial x_2}\end{pmatrix}^{\mathrm T}_{x^\circ=(2\sqrt2\ \ 2\sqrt2)}=\begin{bmatrix}2x_1\\8x_2\end{bmatrix}_{x^\circ=(2\sqrt2\ \ 2\sqrt2)}$$

$$=\begin{bmatrix}4\sqrt2\\16\sqrt2\end{bmatrix}=4\sqrt{34}\begin{bmatrix}1/\sqrt{17}\\4/\sqrt{17}\end{bmatrix}$$

可见 $v=(1/\sqrt{17}\quad 4/\sqrt{17})^{\mathrm T}$，而非 $(\sqrt2/2\quad \sqrt2/2)^{\mathrm T}$，才是 $\lambda(x)$ 在点 $x^\circ=(2\sqrt2,2\sqrt2)$ 处上升最陡的方向，最大坡度值 $|\operatorname{grad}\lambda(x)|_{x^\circ}|=4\sqrt{34}\approx23.3$。

1.2　对偶向量和对偶切空间

1.2.1　切向量的对偶向量

定义 1.7　设 T_pN 是一个 n 维线性空间，在此空间上定义一个实线性泛函(算子)

$$v^*: T_p \to \mathbb{R}$$

线性是指它满足

$$\begin{aligned} v^*(v_1+v_2) &= v^*(v_1)+v^*(v_2), & \forall v_1, v_2 \in T_p \\ v^*(av_1) &= av^*(v_1), & \forall a \in \mathbb{R}, \forall v_1 \in T_pN \end{aligned} \tag{1.7}$$

此 v^* 被称为(空间 T_pN 中所有切向量的)**对偶向量**(covector)。

按此定义，所谓对偶向量，就是能使一个 n 维切向量变换为一个实数的同维行向量。这里读者会想到两个同维向量做点积可以得到一个实数的事实，所以对偶向量可理解为所有能与切向量做点积的同维行向量。

1.2.2　切空间的余切空间

定义 1.8　子流形 N 上 p 点有定义的所有对偶向量的集合记为 T_p^*N。

定义 1.9　在集合 T_p^* 上定义"加"和"数乘"运算：

$$\begin{aligned} (v_1^*+v_2^*)(v) &= v_1^*(v)+v_2^*(v), & \forall v_1^*, v_2^* \in T_p^* \\ (av_1^*)(v) &= av_1^*(v), & \forall a \in \mathbb{R}, \forall v_1^* \in T_p^* \end{aligned} \tag{1.8}$$

定义两种运算之后，构成了实线性空间或称实向量空间 T_p^*N，称它为流形 N 上 p 点切空间 T_p 的**对偶切空间**或**余切空间**(cotangent space)。

1.2.3　对偶切空间的基底

命题 1.1　(切空间和对偶切空间同维)　n 维切空间 T_p 的线性对偶切空间 T_p^* 是 n 维的。

此定理显然成立，因为如不同维，则在任何情况下都不可能满足对偶的定义 $v^*: T_p \to \mathbb{R}$。

定义 1.10　对偶切空间的一组基底被记为 $\mathrm{d}\phi_1|_p, \cdots, \mathrm{d}\phi_n|_p$。如果它还满足

$$\mathrm{d}\phi_i\Big|_p\left(\frac{\partial}{\partial\phi_j}\Big|_p\right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \qquad \forall i, j = 1, \cdots, n \tag{1.9}$$

则称 $\mathrm{d}\phi_1|_p, \cdots, \mathrm{d}\phi_n|_p$ 是切空间基底 $\dfrac{\partial}{\partial\phi_1}\Big|_p, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial\phi_n}\Big|_p$ 的一组**对偶基**或称**对偶基底**(dual bases)。

在定义 1.10 中，$(\phi_1, \cdots, \phi_n)$ 表示流形 N 上 p 点附近的局部坐标。另外应提请读者注意的是，在本书的讨论中，以后凡提到对偶切空间基底，都无例外地指的是对偶基底，满足式(1.9)。

在对偶基下，空间 T_p^*N 中的对偶向量可一般地表示为

$$v^* = v_1^*\,\mathrm{d}\phi_1|_p + \cdots + v_n^*\,\mathrm{d}\phi_n|_p = (v_1^* \ \cdots \ v_n^*)\begin{bmatrix}\mathrm{d}\phi_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}\phi_n\end{bmatrix}_p \tag{1.10}$$

由于

$$v = v_1 \frac{\partial}{\partial \phi_1}\bigg|_p + \cdots + v_n \frac{\partial}{\partial \phi_n}\bigg|_p = \left(\frac{\partial}{\partial \phi_1} \cdots \frac{\partial}{\partial \phi_n}\right)_p \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

是定义在切空间 T_pN 上的泛函(算子),可将其展开并实施下面的运算(求切向量的运算常称为做**切映射**(tangent mapping),下面的运算常称为做**对偶映射**(dual mapping))

$$v^*(v) = (v_1^* \, \mathrm{d}\phi_1 \,|_p + \cdots + v_n^* \, \mathrm{d}\phi_n \,|_p)(v) \tag{1.11}$$

将 v 代入得

$$\begin{aligned} v^*(v) &= (v_1^* \quad \cdots \quad v_n^*) \begin{bmatrix} \mathrm{d}\phi_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}\phi_n \end{bmatrix}_p \left[\left(\frac{\partial}{\partial \phi_1} \cdots \frac{\partial}{\partial \phi_n}\right)_p \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \right] \\ &= (v_1^* \quad \cdots \quad v_n^*) \begin{bmatrix} \mathrm{d}\phi_1\left(\frac{\partial}{\partial \phi_1}\right) & \cdots & \mathrm{d}\phi_1\left(\frac{\partial}{\partial \phi_n}\right) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{d}\phi_n\left(\frac{\partial}{\partial \phi_1}\right) & \cdots & \mathrm{d}\phi_n\left(\frac{\partial}{\partial \phi_n}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \\ &= v_1^* v_1 + \cdots + v_n^* v_n = \langle v^*, v \rangle \end{aligned} \tag{1.12}$$

式(1.12)表明,对偶向量 v^* 对切向量 v 的泛函运算,是两个有不同基底的同维向量间的运算,其运算结果等于两个方向向量的点积。注意基底各分量间的运算在这里给出的定义是

$$\mathrm{d}\phi_i\left(\frac{\partial}{\partial \phi_j}\right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

作为上式的一些简单退化情况,这里给出两个退化公式:

(1) 如果切向量 $v=(0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0)^{\mathrm{T}}$,仅第 i 个分量 $v_i=1$,则由式(1.12),得

$$v^*\left(\frac{\partial}{\partial \phi_i}\bigg|_p\right) = v_i^* \tag{1.13}$$

(2) 如果对偶向量 $v^*=(0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0)$,仅第 i 个分量 $v_i^*=1$,则由式(1.12),得

$$\mathrm{d}\phi_i \,|_p(v) = v_i \tag{1.14}$$

1.2.4 正交对偶向量

定义 1.11 切向量 v 和对偶向量 v^* 相互间满足正交条件

$$v^*(v) = \langle v^*, v \rangle = [v_1^* \quad \cdots \quad v_n^*] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1^* v_1 + \cdots + v_n^* v_n = 0 \tag{1.15}$$

时,称该对偶向量 v^* 是切向量 v 的**正交对偶向量**(orthogonal covector)或**零化对偶向量**(annihilative covector)。

1.2.5 全微分对偶向量(微分Ⅰ型)

一个对偶向量的方向向量($v_1^* \quad \cdots \quad v_n^*$),除必须与切向量同维外,其选择是很自由的,可以有多种选择。注意到某函数 $\lambda(\phi)$ 的全微分式

$$\mathrm{d}\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial \phi_1}\mathrm{d}\phi_1 + \cdots + \frac{\partial \lambda}{\partial \phi_n}\mathrm{d}\phi_n$$