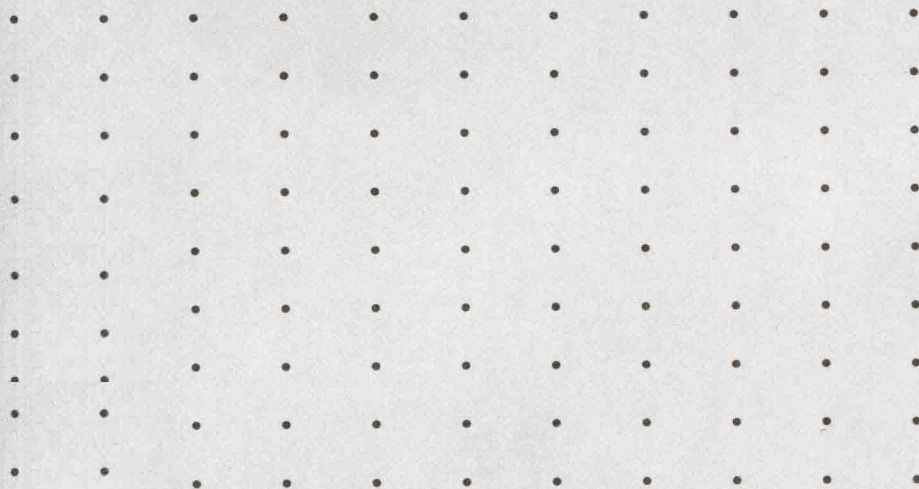


39

实分析中的反例

汪 林



39

实分析中的反例

汪 林



SHIFENXI ZHONG DE FANLI

内容简介

本书汇集了实分析中的大量反例，主要内容有集合、函数、微分、Riemann 积分、无穷级数、一致收敛、Lebesgue 测度和 Lebesgue 积分、有界变差函数和绝对连续函数。对平面点集、二元函数和二重积分方面的反例也做了介绍。

本书可供高等学校数学类各专业的本科生、研究生以及教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

实分析中的反例 / 汪林编著. -- 北京: 高等教育出版社, 2014.1

ISBN 978-7-04-038651-6

I. ①实… II. ①汪… III. ①实分析—研究 IV.

① O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 246556 号

策划编辑 赵天夫 责任编辑 赵天夫 封面设计 赵阳
版式设计 杜微言 责任印制 毛斯璐

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 北京中科印刷有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 25.25
字 数 530 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版 次 2014 年 1 月第 1 版
印 次 2014 年 1 月第 1 次印刷
定 价 49.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 38651-00

序言

在数学的教学和研究中,经常需要用反例来说明某个命题不真.而绝大多数的数学书籍,主要是致力于证明在某些条件下某一结论是真,很少谈到在另一些条件下某一结论是真还是错误的.即用来说明某些命题不真的反例则较少,这不利于学习的深入.因此,比较系统地汇集某个数学分支的反例,以弥补这方面的不足,无疑是很有益的.基于这一想法,作者把多年来在教学实践中积累的实分析方面的反例,重新加以整理、补充而编成了本书.

为了适合不同程度的读者的需要,本书编入了不同难易程度的各种例子.因而,即便是刚学完初等微积分的读者,也能从书中有所得益;而某些较难的例子(在本书的题号上加*号),甚至对专家来说,也不失其参考价值.本书所指的反例,它的含义比较广泛,譬如,“无处单调的绝对连续函数”就是“每个绝对连续函数必在某个非空子区间上单调”这一命题不成立的一个反例.

本书的取材,主要是从各种有关的书籍以及散见在各种数学杂志上的反例中挑选出来的;也有一些例子是作者在教学实践中提出并构造出来的;另外,也有部分例子取自 B. R. Gelbaum 和 J. M. H. Olmsted 合著的 *Counterexamples in Analysis* 一书(有中译本,高枚译).阅读本书所需的预备知识,编者假定读者已经掌握,因此,书中只准备了很少的说明.每一章都以引言开始,用来明确所用的记号、术语和定义,也陈述了一些有关的定理,这些定理或者是构造某些反例时要用到,或者是为了衬托某个反例.此外,在许多例子的后面,以“注”的形式把这个反例与某个正面的命题相比较,以便读者更好地了解到这个命题的条件所起的作用和所举反例的意义.

中国科学院学部委员、业师程民德教授仔细地审阅了书稿并提出了许多具体而又十分宝贵的意见;A. C. Thompson 教授^①给作者以很大的鼓励,并提供了一些例子;云南大学卫念祖教授、陶锜教授始终关怀本书的编写和支持;杨华康、杨富

^①A. C. Thompson 系加拿大数学教授,1979年9月至1980年7月曾在我国讲学,并在南京大学主持了一个泛函分析讨论班.

春、丁彦恒、李小娥、刘正荣等同志阅读了本书的部分书稿,并提出了许多有益的建议;本书的责任编辑同志仔细地审读了书稿全文,并且对本书各个部分作了核对,对他提出的意见,作者也作了考虑.

对上面提到的所有的人,作者表示深深的谢意.

由于作者水平有限,加之定稿时间匆促,一定存在不少缺点,殷切期望专家和读者予以批评指教.

汪林

初稿 1983 年 3 月

定稿 1985 年 7 月于云南大学

在学习和研究数学的过程中,经常需要从正面肯定某个命题的成立,或从反面否定某个命题不成立,从而更有利于学习的深入.因此本书自出版发行后,就受到读者的欢迎和好评,经有关专家推荐再版.出版社对书中的部分疏漏进行了修正.由于作者的水平有限,书中仍有可能存在不妥之处,敬请专家和读者予以批评和指正.

汪林

2013 年 10 月于昆明

现代数学基础 图书清单

注：书号前缀为 978-7-04-0xxxxx-x

	书号	书名	著译者
1	21717-9	代数和编码 (第三版)	万哲先 编著
2	22174-9	应用偏微分方程讲义	姜礼尚、孔德兴、陈志浩
3	23597-5	实分析 (第二版)	程民德、邓东皋、龙瑞麟 编著
4	22617-1	高等概率论及其应用	胡迪鹤 著
5	24307-9	线性代数与矩阵论 (第二版)	许以超 编著
6	24465-6	矩阵论	詹兴致
7	24461-8	可靠性统计	茆诗松、汤银才、王玲玲 编著
8	24750-3	泛函分析第二教程 (第二版)	夏道行 等编著
9	25317-7	无限维空间上的测度和积分 —— 抽象调和分析 (第二版)	夏道行 著
10	25772-4	奇异摄动问题中的渐近理论	倪明康、林武忠
11	27261-1	整体微分几何初步 (第三版)	沈一兵 编著
12	26360-2	数论 I —— Fermat 的梦想和类域论	[日] 加藤和也、黒川信重、斎藤毅 著
13	26361-9	数论 II —— 岩泽理论和自守形式	[日] 黒川信重、栗原将人、斎藤毅 著
14	38040-8	微分方程与数学物理问题 (中文校订版)	[瑞典] 纳伊尔·伊布拉基莫夫 著
15	27486-8	有限群表示论 (第二版)	曹锡华、时俭益
16	27431-8	实变函数论与泛函分析 (上册, 第二版修订本)	夏道行 等编著
17	27248-2	实变函数论与泛函分析 (下册, 第二版修订本)	夏道行 等编著
18	28707-3	现代极限理论及其在随机结构中的应用	苏淳、冯群强、刘杰 著
19	30448-0	偏微分方程	孔德兴
20	31069-6	几何与拓扑的概念导引	古志鸣 编著
21	31611-7	控制论中的矩阵计算	徐树方 著
22	31698-8	多项式代数	王东明 等编著
23	31966-8	矩阵计算六讲	徐树方、钱江 著
24	31958-3	变分学讲义	张恭庆 编著
25	32281-1	现代极小曲面讲义	[巴西] F. Xavier、潮小李 编著

续表

	书号	书名	著译者
26	32711-3	群表示论	丘维声 编著
27	34675-6	可靠性数学引论 (修订版)	曹晋华、程侃 著
28	34311-3	复变函数专题选讲	余家荣、路见可 主编
29	35738-7	次正常算子解析理论	夏道行
30	34834-7	数论——从同余的观点出发	蔡天新
31	36268-8	多复变函数论	萧荫堂、陈志华、钟家庆
32	36168-1	工程数学的新方法	蒋耀林
33	34525-4	现代芬斯勒几何初步	沈一兵、沈忠民
34	36472-9	数论基础	潘承洞 著
35	36950-2	Toeplitz 系统预处理方法	金小庆 著
36	37037-9	索伯列夫空间	王明新
37	37252-6	伽罗瓦理论——天才的激情	章璞 著
38	37266-3	李代数 (第二版)	万哲先 编著
39	38651-6	实分析中的反例	汪林

网上购书: academic.hep.com.cn, www.china-pub.com, www.joyo.com, www.dangdang.com

其他订购办法:

各使用单位可向高等教育出版社读者服务部汇款订购。书款通过邮局汇款或银行转账均可。

购书免邮费, 发票随后寄出。

单位地址: 北京西城区德外大街 4 号

电 话: 010-58581118/7/6/5/4

传 真: 010-58581113

通过邮局汇款:

地 址: 北京西城区德外大街 4 号

户 名: 高等教育出版社销售部综合业务部

通过银行转账:

户 名: 高等教育出版社有限公司

开 户 行: 交通银行北京马甸支行

银行账号: 110060437018010037603

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010) 58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010) 82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

目 录

第一章 集合	1
0. 引言	1
1. 集 A 与 B , 使 $A^\circ \cup B^\circ \neq (A \cup B)^\circ$	4
2. 集 A 与 B , 使 $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$	4
3. 集序列 $\{A_n\}$, 使 $\cap_{n=1}^\infty A_n^\circ \neq (\cap_{n=1}^\infty A_n)^\circ$	5
4. 集序列 $\{A_n\}$, 使 $\overline{\cup_{n=1}^\infty A_n} \neq \overline{\cup_{n=1}^\infty A_n}$	5
5. 集 A 与 B , 使 $(A \cap B)' \neq A' \cap B'$	5
6. 集序列 $\{A_n\}$, 使 $(\cup_{n=1}^\infty A_n)' \neq \cup_{n=1}^\infty A_n'$	6
7. 使 $(\overline{F}^\circ) \neq F$ 的闭集 F	6
8. 使 $(\overline{G})^\circ \neq G$ 的开集 G	6
9. 集 A, B 与映射 f , 使得 $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$	6
10. 集 A, B 与映射 f , 使 $B \subset A$ 而 $f(A \setminus B) \neq f(A) \setminus f(B)$	7
11. $f(A) \subset f(B)$ 不蕴涵 $A \subset B$ 的映射 f	7
12. 不闭的 F_σ 型集	7
13. 不开的 G_δ 型集	7
14. 一个不可数的实数集, 它的每个闭子集都是可数的	7
15. 直线上的仅由边界点所组成的不可数集	7
16. 直线上的一个离散子集, 它的闭包是一个不可数集	7
17. 一个正实数无穷集 E , 对于它, 不存在 $\alpha > 0$, 使 $E \cap (\alpha, +\infty)$ 是无穷集	8
18. 一个集, 它的直到 $n-1$ 阶导集非空, 而 n 阶导集是空集	8
19. 集 E , 它的各阶导集 $E', E'', \dots, E^{(n)}, \dots$ 两两相异, 且 $\cap_{n=1}^\infty E^{(n)} = \emptyset$	8
20. 集 A , 它的各阶导集 $A', A'', \dots, A^{(n)}, \dots$ 两两相异, 且 $\cap_{n=1}^\infty A^{(n)} \neq \emptyset$	9
21. 集 S 和开集 $G_k, k = 1, 2, \dots$, 使 G_k 在 S 中稠密, 而 $\cap_{k=1}^\infty G_k$ 在 S 中不稠密	9
22. 直线上的两个不相交的处处稠密的不可数集	9
23. 直线上的一个两两不相交的处处稠密的不可数集	9

24. 直线上的一列两两不相交的处处稠密的不可数集.	10
25. 直线上的一个处处稠密的渐缩集序列 $\{E_n\}$, 满足 $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$	10
26. 一个渐缩的非空有界开集序列, 其交是空集.	10
27. 一个渐缩的无界闭集序列, 其交是空集.	10
28. 一个紧集, 它的导集是可数集.	11
29. 两个完备集, 其交不是完备集.	11
30. 可数个完备集, 其并不是完备集.	11
31. 完备的疏集.	11
32. 无理数的完备疏集.	12
33. 一个疏集序列, 其并是稠密集.	12
34. 两个不相交的疏集, 其中任一集的每个点都是另一集的聚点.	12
35. 一个第二纲的集, 它的余集不是第一纲的集.	12
36. 一个有界闭集被诸闭区间覆盖而不能从中取出有限子覆盖.	12
37. $[0, 1]$ 中的两个不相交的稠密集 A 与 B , 满足 $[0, 1] = A \cup B$, 且对任何 $\alpha, \beta (0 \leq \alpha < \beta \leq 1)$, 交集 $(\alpha, \beta) \cap A$ 与 $(\alpha, \beta) \cap B$ 都具有连续统的势.	13
38. 任给势小于 $\aleph$ 的实数子集 Q , 有实数 a , 使对每一 $x \in Q$, $x + a$ 皆为无理数	13
第二章 函数	15
0. 引言.	15
1. 一个发散序列 $\{a_n\}$, 使 $\{ a_n \}$ 收敛.	17
2. 两个非负的发散序列, 其积却收敛于零.	17
3. 两个非负的发散序列, 其和却是一个收敛序列.	17
4. 算术平均值收敛的发散序列.	18
5. 不是有界变差的收敛序列.	18
6. 对每个正整数 p , 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+p} - a_n) = 0$ 的发散序列 $\{a_n\}$	18
7. 对任意严格递增的正整数序列 $\{\phi_n\} = \{\phi(n)\}$, 能使 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{\phi(n)} - a_n) = 0$ 的发散序列 $\{a_n\}$	19
8. 函数 f , 对于它, 存在函数 g 使 $g \circ f = I$, 而不存在函数 h , 使 $f \circ h = I$	19
9. 函数 f , 对于它, 存在无穷多个 g 适合 $f \circ g = g \circ f$	20
10. 在某点对称连续而不连续的函数.	20
11. 函数 f , 使 f 在 x_0 的任何邻域内都是无界的, 但当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 并不趋于无穷大.	20
12. 没有最小正周期的非常值周期函数.	21
13. 一个处处不连续的非常值周期函数, 它具有最小正周期.	21
14. 存在一个没有最小正周期的周期函数, 它的值域是可数集.	21
15. 存在一个没有最小正周期的周期函数, 它的值域是不可数集.	22
16. 存在两个具有不同周期的周期函数, 其和仍是一个周期函数.	22
17. 存在两个具有最小正周期的函数, 它们之间无可公度的周期, 但其和 (积) 仍为周期函数.	23

18. 存在一个非周期函数 f , 使 $ f $ 是周期函数.	25
19. 处处有限而又处处局部无界的函数.	26
20. 一个无处连续函数, 其绝对值却处处连续.	26
21. 有唯一一个连续点的函数.	26
22. 关于乘积函数连续性的例子.	26
23. 关于复合函数连续性的例子.	27
24. 两个正则函数, 构成非正则的复合函数.	28
25. $[0, 1]$ 的一个闭子集 X_0 及 X_0 到 X_0 上的两个可换连续映射 f, g , 不存在 f, g 的可换连续扩张.	29
26. 函数 $y = f(u), u = g(x)$ 适合 $\lim_{u \rightarrow A} f(u) = B, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$, 但 $\lim_{x \rightarrow a} f[g(x)]$ 不存在.	29
27. 函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$, 其复合函数 $f[g(x)]$ 处处连续, 并适合 $\lim_{u \rightarrow b} f(u) = c, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b, \lim_{x \rightarrow a} f[g(x)] \neq c$	30
28. 函数 $f_n(x) (n = 1, 2, \cdots)$ 在 x_0 均连续, 而 $f(x) = \sup_n f_n(x)$ 在 x_0 间断.	30
29. 一个无处连续函数, 其反函数却处处连续.	31
30. 有限区间上的一个一对一的连续函数, 其反函数不连续.	31
31. 不能作为任何连续函数序列的极限的函数.	31
32. $[0, 1]$ 上的一个函数 f , 它的连续点所成之集在 $[0, 1]$ 中稠密, 但 f 不是某个连续函数序列的极限.	32
33. $[0, 1]$ 上的一个具有不可数间断点的函数, 它却是某个连续函数序列的极限.	32
34. 函数序列 $\{f_k^{(n)}\}$, 对于任意固定的 n , 当 $k \rightarrow \infty$ 时 $\{f_k^{(n)}(x)\}$ 处处收敛于 $f^{(n)}(x)$, 而当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\{f^{(n)}(x)\}$ 处处收敛于 $f(x)$, 但 $\{f_k^{(n)}(x)\}$ 的任何子列并不处处收敛于 $f(x)$	33
35. 仅在有点间断的严格递增的函数.	34
36. 在 Cantor 集上连续而在它的邻接区间上无处连续的函数.	35
37. 在 Cantor 集上无处连续而在它的邻接区间上连续的函数.	36
38. 在任意给定的 F_σ 型集上间断的函数.	37
39. $[0, 1]$ 上的一个函数 f , 它的连续点所成之集 A 与间断点所成之集 B 在 $[0, 1]$ 内都稠密, 且对任何开区间 $(\alpha, \beta) \subset [0, 1]$, 交集 $A \cap (\alpha, \beta)$ 与 $B \cap (\alpha, \beta)$ 都具有连续统的势.	37
40. 不能在全轴上作连续扩张的有界集上的有界连续函数.	38
41. 以一个任意的非紧集为定义域的连续的无界函数.	38
42. $(0, +\infty)$ 上的一个实值函数 f , 它在无穷多个点上连续, 且对每一 $x \in (0, +\infty)$, $f(x) = 0$ 当且仅当 $f(2x) \neq 0$	38
43. $[0, +\infty)$ 上的一个连续且有界的函数, 它在 $[0, +\infty)$ 上不一致连续.	39
44. 两个一致连续的函数, 其积不一致连续.	39
45. 一个一致连续的函数, 其反函数不一致连续.	39
46. 两个间断函数, 其最小值函数却是一致连续的.	39
47. 在开区间 I_1 与 I_2 上均一致连续, 但在 $I_1 \cup I_2$ 上不一致连续的函数.	40

48. 两个单调函数 f, g , 其中 f 连续而 g 间断, 但复合函数 $f \circ g$ 却是连续的单调函数.	40
49. 两个区间之间一个无处单调的一一对应.	41
50. 两个严格递增的函数, 其积不是单调函数.	41
51. 无处单调的连续函数.	41
52. 以一个任意的非紧集为定义域的连续的有界函数, 它没有极值.	42
53. 定义域为紧集的没有局部极值的有界函数.	42
54. 有无穷多个局部极大值而无局部极小值的函数.	42
55. 处处取得局部极小值的非常值函数.	43
56. 在每个区间上有一个真正局部极大的函数.	43
57. 具有介值性质的间断函数.	44
58. 两个具有介值性质的函数, 其和却没有介值性质.	45
59. 定义在 $[0, 1]$ 内而取值于 $[0, 1]$ 中的一个无处连续函数, 它在每个任意小的非空子区间上都取尽 $[0, 1]$ 中的一切值.	45
60. 一个无处连续的开函数, 它在任何区间上都不具有介值性质.	46
61. 一个无处连续函数 f , 而具有性质 $f(x+y) = f(x) + f(y)$	46
62. 若干个半连续函数, 它们的和是一个无处半连续的函数.	47
63. 两个半连续函数, 其最小值函数并不半连续.	48
64. 无处半连续的函数.	48
65. 无处连续而又处处半连续的函数.	48
66. 一个收敛的上半连续函数序列, 其极限函数并不上半连续.	48
67. 一个不连续映射, 使开集的像是开集.	49
68. 一个连续映射, 使某个无界闭集的像不是闭集.	49
69. 一个疏集 A , 以及从 A 到单位闭区间 $[0, 1]$ 上的一个连续映射.	50
第三章 微分	51
0. 引言.	51
1. 仅在一点连续并可微的函数.	52
2. 存在一个可微函数 f , 而其绝对值函数 $ f $ 并不可微.	52
3. 一个无处可微函数 f , 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} n[f(x + \frac{1}{n}) - f(x)]$ 存在.	52
4. 关于乘积函数可微性的例子.	53
5. 关于复合函数可微性的例子.	53
6. 处处有导数 (不必有限) 的不连续函数.	54
7. 两个在点 x_0 均可微, 而使 $\max\{f, g\}$ 与 $\min\{f, g\}$ 在 x_0 都不可微的函数 f 和 g	55
8. $[a, b]$ 上的函数 f , 它满足 Rolle 定理的三个条件中任两个条件, 但不存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = 0$	55
9. 函数 f , 它在 $[a, b]$ 上有连续的导函数 f' , 但对 $[a, b]$ 内某点 ξ , 不存在 x_1, x_2 , 使得 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$, $x_1 < \xi < x_2$	56

10. 中值定理失效的可微复值函数.	56
11. L'Hospital 法则失效的复值函数的不等式.	57
12. 一个在某点有极值的无穷可微函数, 它的各阶导数在该点的值全都是零.	57
13. 一个连续函数, 它在原点的每个邻域内有无穷多个局部极值.	58
14. 函数 f , 使 $\lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)]/h^2$ 存在而 $f''(x)$ 不存在.	58
15. $[0, 1]$ 上的一个可微函数, 其导数在无理点连续而在有理点间断.	59
16. $[0, 1]$ 上的一个可微函数, 其导数在已给的非空完备疏集上无处连续.	59
17. 一个具有连续导数的严格递增函数, 其导数在已给的完备疏集上恒为零.	60
18. 一个严格递增的连续函数, 它不处处可微.	60
19. 一个单调函数, 其导函数并不单调.	61
20. R^1 上的一个严格单调的有界可微函数 f , 使 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) \neq 0$	61
21. 一个在某点有极值的可微函数, 它在该点的左右两侧都不是单调的.	62
22. 一个可微函数 f , 使 $f'(x_0) > 0$, 但 f 在包含点 x_0 的任何开区间内都不是单调的.	62
23. 函数 f , 使 $f(x)$ 与 $\bar{f}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) - f(x-h)]/(2h)$ 在 $x = x_0$ 都连续而 $f'(x_0)$ 并不存在.	62
24. 一个可微函数 f , 当 x 为有理数时, $f(x)$ 为有理数, 而 $f'(x)$ 为无理数.	63
25. $(0, 1)$ 上的一个可微函数 f , 使 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \infty$, 但 $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = \infty$ 并不成立.	63
26. $(0, 1)$ 上的一个可微函数 f , 使 f 在 $(0, 1)$ 上有界而 f' 在 $(0, 1)$ 上无界.	63
27. 在已知点 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 没有导数的连续函数.	64
28. 在无理点可微而在有理点不可微的连续函数.	64
29. 处处连续而无处可微的函数.	65
30. 处处连续而仅在一点可微的函数.	68
31. 任给 G_δ 型的可数集 E , 可构造非减函数 f , 其导数满足条件: $f'(x) = \infty$ ($x \in E$), $f'(x) = 0$ ($x \notin E$).	69
32. 无处存在单侧导数 (有限或无穷) 的连续函数.	69
33. $[0, 1]$ 上的一个无穷可微函数 f , 使 $\{x: f(x) = 0\}$ 为不可数的疏集.	72
34. 函数 f , 使 $f \in H^\alpha[a, b]$, 而 $f \notin H^\beta[a, b]$, $0 < \alpha < \beta$	72
35. 函数 f , 使 $f \in H^1(-\infty, +\infty)$, 而对任何 α ($0 < \alpha < 1$), $f \notin H^\alpha(-\infty, +\infty)$	72
36. 满足 α 阶 Hölder 条件的无处可微的连续函数.	72
37. 不满足任何阶 Hölder 条件的可微函数.	73
38. 处处可微而无处单调的函数.	73
39. 在每个非空区间上都能取得局部极大值和局部极小值的可微函数.	77
40. 满足 Lipschitz 条件而无处单调的函数.	77
第四章 Riemann 积分.	79
0. 引言.	79
1. 函数 f , 使 $ f $ (R) 可积而 f 不 (R) 可积.	80

2. 没有原函数的 (R) 可积函数.	81
3. 在任何区间上都没有原函数的 (R) 可积函数.	81
4. 在闭区间上有原函数但不 (R) 可积的函数.	81
5. 以任意零测度的 F_σ 集作为间断点集的 (R) 可积函数.	82
6. 与 (R) 可积函数对等但本身并不 (R) 可积的函数.	82
7. 一个 (R) 可积函数, 在某个可数集上任意改变它的值 (但这些数值全体要组成有界集合), 而不影响它的可积性.	82
8. 复合函数是否 (R) 可积的各种实例.	83
9. 两个函数 f 与 g , 使 f^2 与 g^2 皆 (R) 可积而 $(f+g)^2$ 并不 (R) 可积.	85
10. 一个有界函数序列的极限, 它在任何非空区间上都不 (R) 可积.	86
11. 一个 (R) 可积函数序列, 其上确界函数并不 (R) 可积.	86
12. 积分的极限不等于极限的积分的函数序列.	86
13. 一个 (R) 可积函数 f , 使 $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ 处处可微, 但在一个稠密集上, $g'(x) \neq f(x)$	87
14. 一个 (R) 可积函数 f , 使 $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ 不处处可微.	87
15. 函数 f 和 g , 使得 f 在 $[a, b]$ 上 (R) 可积, g 在 $[a, b]$ 上不变号且 (R) 可积, 而在 (a, b) 中不存在满足等式 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$ 的 ξ	88
16. 函数 f 和 g , 使 $\int_a^c f(x)dg(x)$ 和 $\int_c^b f(x)dg(x)$ 均存在, 而 $\int_a^b f(x)dg(x)$ 不存在 $(a < c < b)$	88
17. 函数 f 和 g , 使 $\int_a^b f(x)dg(x)$ 存在, 但改变 f 在某个点的值, $\int_a^b f(x)dg(x)$ 就不存在.	89
18. $(0, 1)$ 上的一个无界函数, 其广义 (R) 积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 不是对应的积分和式 $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限.	89
19. $(0, 1)$ 内的一个单调函数 f , 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n})$ 存在而 f 并不广义 (R) 可积.	90
20. 收敛而不绝对收敛的广义积分.	90
21. 函数 f 和 g , 使 f 广义 (R) 可积而 g 有界, 但 fg 并不广义 (R) 可积.	91
22. $[0, +\infty)$ 上的一个函数, 它在 $[0, +\infty)$ 的任何有限子区间上取正值、有界、可积, 并且积分 $\int_0^{+\infty} (f(x))^\alpha dx$ 当 $\alpha = 1$ 时收敛, 而当 α 为不等于 1 的实数时发散.	92
23. 函数 f , 使 $ f $ 广义 (R) 可积而 f^2 并不广义 (R) 可积.	92
24. $[1, +\infty)$ 上的一个函数 f , 使 f^2 广义 (R) 可积而 $ f $ 并不广义 (R) 可积.	93
25. 在 $[1, +\infty)$ 上广义 (R) 可积的正值连续函数 f , 使 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq 0$	93
26. 广义积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛而在每个区间 $[a, +\infty)$ ($a > 0$) 上 $f(x)$ 是无界、非负连续函数.	94
27. 一个有理函数 R , 使对任何在 $(-\infty, +\infty)$ 上广义 (R) 可积函数 f , 都有 $\int_{-\infty}^{+\infty} f[R(x)]dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$	94
28. Cauchy 主值为有限的发散广义积分.	94

第五章 无穷级数	95
0. 引言	95
1. 一个收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散	97
2. 一个发散的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛	97
3. 一个发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使对每一 $k \geq 2$, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} a_{k^n}$ 都收敛	97
4. 一个收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}/\sqrt{n}$ 发散	98
5. 一个发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ 收敛	98
6. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛且 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n/a_n = 1$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 却发散	98
7. 任给一个发散的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 可以找到一个收敛于零的正数序列 $\{c_n\}$, 使 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ 仍然发散	98
8. 任给一个收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 可以找到一个收敛于零的正数序列 $\{c_n\}$, 使 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/c_n$ 仍然收敛	99
9. 给定使 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 的正数序列 $\{b_n\}$, 有一个正项发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 适合 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 0$	100
10. 给定使 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 的正数序列 $\{b_n\}$, 有一个正项收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 适合 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = +\infty$	100
11. 给定一个满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ 的正数序列 $\{c_n\}$, 有一个正项收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和一个正项发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 能使 $a_n/b_n = c_n$	100
12. 任给正数 s , 可以找到一个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使对任何正数 σ ($0 < \sigma \leq s$), 都可以用一个无穷子级数来表示: $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \sigma$	100
13. 一个正项级数, 使任何正有理数都是它的有限个不同项之和	101
14. 通项趋于零而发散的交错级数	102
15. 一个发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 其部分和序列有界且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$	103
16. 根检法失效的级数	103
17. 比检法失效的级数	103
18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ 存在而 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n$ 不存在的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	104
19. 两个收敛级数, 其 Cauchy 乘积级数发散	104
20. 两个条件收敛级数, 其 Cauchy 乘积级数绝对收敛	105
21. 两个发散级数, 其 Cauchy 乘积级数绝对收敛	105
22. 一个发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使当 $p = 1, 2, 3, \dots$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}) = 0$	106
23. 具有发散重排的收敛级数	106
24. 存在一个发散级数, 用重排不可能加快其发散程度	107
25. 存在一个发散级数, 用重排可以任意减慢其发散程度	108
26. 一个实数序列 $\{a_n\}$, 使级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^l$ 当 $l = 5$ 时发散, 而当 l 不等于 5 的任何奇正数时收敛	109
27. 一个收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使形如 $a_k + a_{k+l} + a_{k+2l} + a_{k+3l} + \dots$ 的子级数 (下标成等差级数, k, l 为正整数) 都收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 并不绝对收敛	109

28. 一个收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使形如 $a_k + a_{kl} + a_{kl^2} + \cdots$ 的子级数 (下标成几何级数, $k \leq 1, l \leq 2$ 均为正整数) 都收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 并不绝对收敛.	109
29. 任意地划分奇正整数集为两个没有公共元素的子集 D 和 C , 一个实数序列 $\{a_n\}$, 使当 $l \in C$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^l$ 收敛, 而当 $l \in D$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^l$ 发散.	110
30. 对于任一条件收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和任一实数 x , 存在序列 $\{\varepsilon_n\}$, 其中 $ \varepsilon_n = 1, n = 1, 2, \cdots$, 能使 $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n = x$	110
31. 非绝对收敛级数, 适当地引进括号后变成绝对收敛级数.	110
32. 收敛而不绝对收敛的无穷乘积.	111
33. 一个发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ 收敛.	111
34. 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2$ 都发散, 而无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ 却收敛.	112
35. $[1, +\infty)$ 上的正值连续函数 f , 使 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散.	113
36. $[1, +\infty)$ 上的正值连续函数 f , 使 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 发散而 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛.	113
37. 给定 $[0, 1)$ 上满足条件 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ 的正值连续函数 f , 可构造具有非负系数的幂级数 P , 适合 $P(x) < f(x)$ 且 $\lim_{x \rightarrow 1} P(x) = +\infty$	114
38. $[0, 1)$ 上的一个适合条件 $f(0) > 0$ 且 $\int_0^1 f(x)dx = +\infty$ 的递增连续函数 f , 使对任何具有非负系数的幂级数 P , 若 $P(x) \leq f(x)$, 则 $\int_0^1 P(x)dx < +\infty$	114
39. 一个函数, 它的 Maclaurin 级数处处收敛, 但仅在一点与这个函数相合.	115
40. 一个函数, 它的 Maclaurin 级数仅在一处收敛.	116
第六章 一致收敛	119
0. 引言.	119
1. 在各个 $E_k (k = 1, 2, \cdots)$ 上一致收敛, 而在 $\cup_{k=1}^{\infty} E_k$ 上不一致收敛的函数序列.	120
2. 一个在紧集上一致有界的连续函数序列, 而不存在逐点收敛的子列.	120
3. 一个一致有界且处处收敛的连续函数序列, 它没有一致收敛的子列.	121
4. 一个有界函数序列, 它处处收敛于一个无界函数.	121
5. 一个不一致有界的函数序列, 它处处收敛于一个有界函数.	122
6. 一个连续函数序列的非一致极限, 它在一个稠密集上无处连续.	122
7. 一个连续函数序列, 它的非一致极限也是一个连续函数.	123
8. 一个递减的连续函数序列, 它处处收敛于某个连续函数, 但并不一致收敛.	124
9. 一个无处连续的函数序列, 它一致收敛于一个处处连续的函数.	124
10. 收敛而无处一致收敛的连续函数序列.	124
11. 一个各项间断的函数项级数收敛于一个连续函数, 但无处一致收敛.	125
12. 一个正整数序列 $a_1 < a_2 < \cdots$ 及紧集 C , 使对任意 $x \in C, \sin a_n x \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 而 $\{\sin a_n x\}$ 在 C 上并不一致收敛.	126
13. 给定 $[0, +\infty)$ 上的实值函数 f , 适合 $f(0) = 0, f(1) \neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0$, 可构造正整数序列 $\{a_n\}$ 及紧集 C , 使 $\{f(a_n x)\}$ 在 C 上收敛而非一致收敛.	127
14. 两个一致收敛的函数序列, 其乘积序列不一致收敛.	127
15. 一个连续函数序列 $\{f_n\}$, 它在 $[0, 1]$ 上一致收敛于 f , 然而, f_n 的弧长的极限不等于 f 的弧长.	127

16. 通项一致趋于零但不一致收敛的函数项级数.	127
17. 通用的连续函数序列.	128
18. 一个一致收敛的函数项级数, 具有不一致收敛的重排.	129
19. 一个一致收敛的函数项级数, 却无处绝对收敛.	129
20. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 绝对并一致收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) $ 并不一致收敛.	130
21. 一个绝对并一致收敛的函数项级数, 它无任何正项数值优级数.	131
22. 一个一致收敛的可微函数序列, 其导函数序列的极限不等于极限函数的导数.	132
23. 一个一致收敛的无穷可微函数序列, 其导函数序列无处收敛.	133
24. 一个非一致收敛的可微函数序列, 其导函数序列的极限等于极限函数的导数.	133
25. $[0, +\infty)$ 上的一个一致收敛于零的广义 (R) 可积函数序列 $\{f_n\}$, 而使数列 $\{\int_0^{+\infty} f_n(x)dx\}$ 发散.	133
26. $[1, +\infty)$ 上的一个一致收敛的广义 (R) 可积函数序列, 其极限函数并不广义 (R) 可积.	134
第七章 点集的测度.	135
0. 引言.	135
1. 一个渐缩的可测集序列 $\{E_n\}$, 使 $m(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} mE_n$	137
2. 一个含于有限区间中的可测集序列 $\{E_n\}$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} mE_n$ 存在, 但 $m(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E_n) \neq m(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E_n)$	137
3. 一个可测集序列 $\{E_n\}$, 使 $m(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E_n) < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} mE_n$	138
4. 测度为零的不可数集.	138
5. 任给实数 a ($0 < a < 1$), 在 $[0, 1]$ 中可构造一个测度为 a 的完备疏集.	139
6. 直线上的一个稠密开集, 它的余集的测度为无穷大.	139
7. 一个开集, 它的测度不等于它的闭包的测度.	139
8. 一个可数的疏集, 其闭包具有正测度.	140
9. 使得每个实数都是凝聚点的零测度集.	140
10. $[0, 1]$ 中测度等于 1 的第一纲集.	140
11. $[0, 1]$ 中测度等于零的第二纲集.	140
12. $[0, 1]$ 内一个两两不相交的完备疏集序列, 其并集的测度为 1.	140
13. $[0, 1]$ 中测度为零的不可数的稠密集.	141
14. $[0, 1]$ 中的一个可测集 E , 使对任一非空开区间 $I \subset [0, 1]$, 恒有 $m(I \cap E) > 0, m(I \cap E^c) > 0$	141
15. 不可测集.	143
16. 一个两两不相交的集序列 $\{A_n\}$, 使 $m^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} m^*A_n$	145
17. 一族可测集, 其并集不可测.	145
18. 一族可测集, 其交集不可测.	146
19. 一个有界的零测度集 E , 使 $E + E$ 为一不可测集.	146
20. R^1 的一个子集 A , 使 A 和 A^c 的每一可测子集其测度均为零.	147
21. 对每一有理数 a , 使 $\{x: f(x) = a\}$ 均为不可测集的函数 f	148