普通高等教育"十二五"规划教材

矩阵论

Matrix Theory

庞 晶 周凤玲 张 余 主编

化学工业出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

矩　阵　论

庞　晶　周凤玲　张　余　主　编

化学工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书系统地介绍了矩阵理论的基本内容、方法及部分应用．全书共分7章，主要介绍线性空间与线性变换、内积空间、矩阵的相似标准形、矩阵分解、矩阵分析、特征值估计、广义逆矩阵等内容．书后附有MATLAB的基本操作及对应于前7章部分例题或习题的MATLAB应用实例．各章后均配有一定数量的习题并附有参考答案．

本书内容丰富、论述严谨，可作为一般高等院校工科硕士研究生和工程硕士生的教材以及本科高年级学生的选修课教材，也可供工程技术或研究人员自学及参考使用．

图书在版编目（CIP）数据

矩阵论/庞晶，周凤玲，张余主编．—北京：化学工业出版社，2013.9

普通高等教育"十二五"规划教材

ISBN 978-7-122-18319-4

Ⅰ.①矩… Ⅱ.①庞…②周…③张… Ⅲ.①矩阵论-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.21

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第205819号

责任编辑：陶艳玲　马　波　　　　装帧设计：张　辉

责任校对：吴　静

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）

印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司

装　　订：三河市宇新装订厂

787mm×1092mm　1/16　印张11¾　字数288千字　2013年11月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：28.00元

编写人员名单

主　编　庞　晶　周凤玲　张　余

参　编　（以姓氏笔画为序）

包曙红　刘　薇　侯　睿　曹　艳

前言

矩阵理论具有极为丰富的内容，在数学以及其它科学技术领域都有十分重要的应用．近年来，由于计算机的发展，特别是MATLAB等数学计算软件的普及，矩阵理论的重要性愈加显著，应用日益广泛，这是因为用矩阵理论和方法来解决现代工程技术中的各种问题，不仅表述简洁、便于进行研究，而且具有适合计算机处理的特点．可以说，矩阵理论已成为从事科学研究和工程设计的科技人员必备的数学工具之一．

本书从线性代数的基础理论出发，结合工科实际，较系统地介绍矩阵理论的基本内容、方法及某些应用．全书共7章，主要介绍线性空间与线性变换、内积空间、矩阵的相似标准形、矩阵分解、矩阵分析、特征值估计、广义逆矩阵等内容．附录部分为MATLAB的基本操作及对应于前7章部分例题或习题的MATLAB应用实例，以期提高读者在工程应用中使用计算机处理矩阵及相关计算的能力．

鉴于本书的读者是高等院校的工科研究生、工程硕士生、大学本科高年级学生及科技工作者，因此在编写时既重视基本的理论，也注重应用．对于必要的理论推导和分析，尽量使其清晰和简明；对个别理论则不苛求推导，侧重于介绍方法和应用，使读者在较短时间内掌握近现代矩阵理论相当广泛而又很基本的内容．具有线性代数基础的读者均可阅读本书，修完全书约需50学时，带“*”的内容可作为选修．

本书的编写得到了内蒙古工业大学研究生院和理学院的大力支持，编者在此深表谢意！

由于编者的水平有限，书中如有疏漏和不妥之处，敬请读者指正！

编者

2013.9

目 录

第 1 章　线性空间与线性变换

本章所讨论的内容既是已有线性代数知识的深化，也是学习现代矩阵论的基础．线性空间与线性变换是矩阵分析中经常用到的两个极其重要的概念，也是通常几何空间概念的推广和抽象.

1.1　线性空间的概念

在线性代数里，我们知道 n 维向量对向量的加法、向量的数乘这两种运算保持封闭，并且 n 维向量的线性运算满足八条规则．事实上对于矩阵、一元多项式等也都具有加法和数乘的线性运算，这种线性运算也满足八条规则，这里对各种具体线性系统的一种统一的抽象，就得出线性空间的概念.

如果数集 P 中任意两个数作某一运算后的结果仍在 P 中，我们就称数集 P 对于这个运算是封闭的．对加、减、乘、除（除数不为零）的四则运算封闭的数集 P 称为**数域**.

最常见的数域有理数域 $\boldsymbol{Q}$、实数域 $\boldsymbol{R}$、复数域 $\boldsymbol{C}$. 实数域和复数域是工程上较常用的两个数域.

此外，还有其它很多数域．如

$$Q(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in Q\}.$$

不难验证，$Q(\sqrt{2})$ 对实数四则运算封闭，所以 $Q(\sqrt{2})$ 也是一个数域．而整数集合 $\boldsymbol{Z}$ 就不是数域．数域有一个简单性质，即所有的数域都包含有理数域作为它的一部分．特别是，每个数域都包含整数 0 和 1.

下面给出线性空间的定义.

定义 1.1　设 V 是一个非空集合，P 是一个数域．在集合 V 的元素之间定义一种代数运算，叫做**加法**，记为“$+$”：给出了一个法则对于 V 中任意元素 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，在 V 中都有唯一的一个元 $\boldsymbol{v}$ 与它们对应，称 $\boldsymbol{v}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 的和，记为 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$.

在数域 P 与集合 V 的元素之间还定义一种代数运算，称为**数量乘法（数乘）**，记为“$\cdot$”：对于数域 P 中任一数 k 和 V 中任一元 $\boldsymbol{\alpha}$，在 V 中都有唯一的一个元 $\boldsymbol{\delta}$ 与它们对应，称 $\boldsymbol{\delta}$ 为 k 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的数乘，记为 $\boldsymbol{\delta}=k\cdot\boldsymbol{\alpha}$. 如果加法与数乘这两种运算在 V 中是**封闭**的，即

$$\forall\,\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}\in V,\qquad \text{有 } \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V;$$

$$\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in \boldsymbol{V},\ k\in P,\qquad \text{有 } k\cdot\boldsymbol{\alpha}\in V.$$

而且满足如下八条规则：

(1) 交换律 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$；

(2) 结合律 $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$，$\boldsymbol{\gamma}\in V$；

(3) 零元律 $\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in V$，$\exists\,\boldsymbol{0}\in V$，有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{\alpha}$，（$\boldsymbol{0}$ 称为**零元素**）；

(4) 负元律 $\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in V$，$\exists\,\boldsymbol{\beta}\in V$，有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$，（$\boldsymbol{\beta}$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**负元素**，记为 $-\boldsymbol{\alpha}$）；

(5) $\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in V$，$1\in P$，有 $1\cdot\alpha=\alpha$；

(6) $k\cdot(l\cdot\boldsymbol{\alpha})=(kl)\cdot\boldsymbol{\alpha}$，$l\in P$；

(7) $(k+l)\cdot\boldsymbol{\alpha}=k\cdot\boldsymbol{\alpha}+l\cdot\boldsymbol{\alpha}$;

(8) $k\cdot(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\cdot\boldsymbol{\alpha}+k\cdot\boldsymbol{\beta}$

则称集合 V 为数域 P 上的**线性空间**.

线性空间中的元素也称为向量，这里所指的向量比线性代数中 n 维向量的含义更为广泛. 线性空间有时也称向量空间. 当数域 P 为实数域时，V 就称为实线性空间；P 为复数域，V 就称为复线性空间.

注意：(1) 线性空间不能离开某一数域来定义. 实际上，对于不同数域，同一个集合构成的线性空间会不同，甚至一种能成为线性空间而另一种不能成为线性空间. (2) 两种运算、八条规则必须满足. 数域 P 中的运算是具体的四则运算，而 V 中所定义的加法运算和数乘运算则可以十分抽象.

例 1.1 下列集合按照通常运算法则，均构成线性空间.

(1) 由全体实数组成的集合 $\boldsymbol{R}$，在实数域上构成一个实线性空间. 全体复数组成的集合 $\boldsymbol{C}$，在复数域上构成一个复线性空间.

(2) 由全体实 n 维向量组成的集合，在实数域 $\boldsymbol{R}$ 上构成一个实线性空间，记为 $\boldsymbol{R}^n$；由全体复 n 维向量组成的集合，在复数域 $\boldsymbol{C}$ 上构成一个复线性空间，记为 $\boldsymbol{C}^n$.

(3) 矩阵空间由全体 $m\times n$ 矩阵组成的集合，在数域 P 上构成一个线性空间，记为 $\boldsymbol{R}^{m\times n}$ [而其中秩为 $r(r>0)$ 的全体矩阵所成的集合 $\boldsymbol{R}_r^{m\times n}$ 则不构成线性空间，为什么?].

(4) 闭区间 $[a,b]$ 上的全体连续函数组成的集合，在数域 P 上构成线性空间记为 $\boldsymbol{C}[a,b]$.

例 1.2 问当 $b\neq 0$ 时，相容的线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解的全体 $S=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^n\}$ 是否构成线性空间?

解 对于任意的 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in S$，有 $\boldsymbol{Ax}_1=\boldsymbol{b},\boldsymbol{Ax}_2=\boldsymbol{b}$.

但是

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{Ax}_1+\boldsymbol{Ax}_2=2\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{b},$$

所以 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2\notin S$，即 S 关于加法运算不封闭，故 S 不是线性空间.

例 1.3 设 $\boldsymbol{R}^+=\{$全体正实数$\}$，其“加法”及“数乘”运算定义为

$$x+y=xy,\ k\cdot x=x^k$$

则 $\boldsymbol{R}^+$ 是实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的线性空间.

证明 首先需要证明两种运算的封闭性

若 $x>0$，$y>0$，$k\in\boldsymbol{R}$，则有

$$x+y=xy\in\boldsymbol{R}^+\quad k\cdot x=x^k\in\boldsymbol{R}^+\quad \text{封闭性得证.}$$

然后验证八条规则.

(1) $x+y=xy=yx=y+x$;

(2) $x+(y+z)=x(yz)=(xy)z=(x+y)+z$;

(3) 1 是零元素：$x+1=x\cdot 1(x+\boldsymbol{0}=x\rightarrow\boldsymbol{0}=1)$;

(4) $\dfrac{1}{x}$是 x 的负元素：$x+\dfrac{1}{x}=x\cdot\dfrac{1}{x}=1\quad(x+y=\boldsymbol{0})$;

(5) $k\cdot(x+y)=(xy)^k=x^ky^k=k\cdot x+k\cdot y$ (数因子分配律);

(6) $(k+l)\cdot x=x^{k+l}=x^kx^l=(k\cdot x)+(l\cdot x)$ (分配律);

(7) $k\cdot(l\cdot x)=(x^l)^k=x^{kl}=(kl)\cdot x$ (结合律);

(8) $l \cdot x = x^1 = x$ （恒等律）.

由此可证，$\boldsymbol{R}^+$ 是实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的线性空间，证毕.

线性空间**基本性质**：

(1) 零元素是唯一的，任一元素的负元素也是唯一的；

(2) $0\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，$(-1)\boldsymbol{x}=(-\boldsymbol{x})$.

证明　方法一，反证法.

(1) 设存在两个零元素 $\boldsymbol{0}_1$ 和 $\boldsymbol{0}_2$，则由于 $\boldsymbol{0}_1$ 和 $\boldsymbol{0}_2$ 均为零元素，按零元律有

$$\boldsymbol{0}_1+\boldsymbol{0}_2=\boldsymbol{0}_1=\boldsymbol{0}_2+\boldsymbol{0}_1=\boldsymbol{0}_2 \quad \text{（交换律）}$$

所以

$$\boldsymbol{0}_1=\boldsymbol{0}_2$$

即 $\boldsymbol{0}_1$ 和 $\boldsymbol{0}_2$ 相同，与假设相矛盾，故只有一个零元素.

(2) 假设 $\exists \boldsymbol{x}\in V$，有两个负元素 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{z}$，则根据负元律有

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}$$

因此

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{y}+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}$$

即 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{z}$ 相同，故负元素唯一.

方法二，直接法.

(1) 设 $\boldsymbol{w}=0\boldsymbol{x}$，则 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{w}=1\boldsymbol{x}+0\boldsymbol{x}=(1+0)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$，故 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$.

(2) 设 $\boldsymbol{w}=(-1)\boldsymbol{x}$，则 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{w}=1\boldsymbol{x}+(-1)\boldsymbol{x}=[1+(-1)]\boldsymbol{x}=0\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

故 $\boldsymbol{w}=-\boldsymbol{x}$. 证毕

线性空间中线性相关性概念与线性代数中向量组线性相关性概念类似.

线性组合：$\forall\, \boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m\in V, c_1,c_2,\cdots,c_m\in P$

$$c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{x}_m=\sum_{i=1}^{m}c_i\boldsymbol{x}_i$$

称为元素组 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 的一个**线性组合**.

线性表示：V 中某个元素 $\boldsymbol{x}$ 可表示为其中某些元素组的线性组合，则称 $\boldsymbol{x}$ 可由该元素组**线性表示**.

定义 1.2　设 V 是数域 P 上的线性空间，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 是 V 的一组向量，如果 P 中有一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{x}_n=0 \tag{1.1}$$

成立，则称向量组 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ **线性相关**；否则称**线性无关**.

因为式(1.1) 所述的概念仅与向量的线性运算有关，而与向量自身的属性无任何关联，所以在 $\boldsymbol{R}^n$ 中所讨论的向量相应的结论可以不加改变地移到线性空间中来.

同样，还可以引入最大线性无关向量组及秩的概念，只是这里的向量不局限于 n 维向量而是更广义的.

定义 1.3　线性空间 V 中最大线性无关元素组所含元素个数称为 V 的**维数**，记为 $\dim V$.

例 1.4　全体 $m\times n$ 阶实矩阵的集合构成的实线性空间（对于矩阵加法和数对矩阵的数乘运算），求其维数.

解　直接的方法就是找一个最大线性无关组，其元素尽可能简单.

令 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 为这样的一个 $m\times n$ 阶矩阵，其中 $(i,\ j)$ 元素为 1，其余元素为零.

$$\boldsymbol{E}_{ij}=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix} &&&0&&&\\ &&&\vdots&&&\\ &&&0&&&\\ 0&\cdots&0&1&0&\cdots&0\\ &&&0&&&\\ &&&\vdots&&&\\ &&&0&&& \end{pmatrix} & (i) \\ (j) & \end{array} \quad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n).$$

显然，这样的矩阵共有 mn 个，构成一个具有 mn 个元素的线性无关元素组$\{\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\cdots,\boldsymbol{E}_{1n};\ \boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22},\cdots,\boldsymbol{E}_{2n};\ \cdots;\ \boldsymbol{E}_{m1},\boldsymbol{E}_{m2},\cdots,\boldsymbol{E}_{mn}\}$. 另一方面，对于任意的 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$，有

$$\boldsymbol{A}=a_{11}\boldsymbol{E}_{11}+\cdots+a_{1n}\boldsymbol{E}_{1n}+a_{21}\boldsymbol{E}_{21}+\cdots+a_{mn}\boldsymbol{E}_{mn}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}\ .$$

即$\{\boldsymbol{E}_{ij}\mid i=1,\cdots m,j=1,\cdots,n\}$构成了最大线性无关元素组，所以该空间的维数为 mn.

1.2　基变换与坐标变换

1.2.1　线性空间的基与坐标

定义 1.4　设 V 是数域 P 上的线性空间，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r$　$(r\geqslant 1)$是属于 V 的 r 个任意元素，如果它满足

（1）$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r$ 线性无关；

（2）V 中任一向量 $\boldsymbol{x}$ 均可由 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r$ 线性表示.

则称 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r$ 为 V 的一个**基**或**基底**，并称 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r$ 为该基的**基元素**.

例 1.5　考虑全体复数所形成的集合 $\boldsymbol{C}$. 如果 $P=\boldsymbol{C}$，则该集合对复数加法和复数的乘法构成线性空间，其基可取为 1，空间维数为 1；如果取 $P=\boldsymbol{R}$，则该集合对复数加法及实数对复数的数乘构成线性空间，其基可取为 $\{1,i\}$，空间维数为 2.

可以证明：线性空间的维数是确定的，不会因选取不同的基而改变.

定义 1.5　线性空间 V^n 的一个基 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 为 V^n 的一个坐标系，$\forall\,\boldsymbol{x}\in V^n$，它在该基下线性表示为

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\boldsymbol{x}_i\quad(\xi_i\in P,\boldsymbol{x}_i\in V^n,i=1,2,\cdots,n)\ ,$$

则称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为 $\boldsymbol{x}$ 在该坐标系中的**坐标**或**分量**，记为$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}$.

一般来说，线性空间及其元素是抽象的对象，不同空间的元素完全可以具有千差万别的类别及性质. 采用坐标表示可以把它们统一起来，坐标表示把这种差别留给了基和基元素，由坐标所组成的新向量仅由数域中的数表示出来.

更进一步，原本抽象的“加法”及“数乘”经过坐标表示就演化为向量加法及数对向量的数乘.

（1）$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}&=(\xi_1\boldsymbol{x}_1+\xi_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\xi_n\boldsymbol{x}_n)+(\eta_1\boldsymbol{x}_1+\eta_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\eta_n\boldsymbol{x}_n)\\&=(\xi_1+\eta_1)\boldsymbol{x}_1+(\xi_2+\eta_2)\boldsymbol{x}_2+\cdots+(\xi_n+\eta_n)\boldsymbol{x}_n\end{aligned}$$

对应$\begin{cases} \boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n) \\ \boldsymbol{y}=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n) \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_n+\eta_n)$.

(2) $k\boldsymbol{x}=k(\xi_1\boldsymbol{x}_1+\xi_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\xi_n\boldsymbol{x}_n)=(k\xi_1)\boldsymbol{x}_1+(k\xi_2)\boldsymbol{x}_2+\cdots+(k\xi_n)\boldsymbol{x}_n$

对应 $\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\rightarrow k\boldsymbol{x}=(k\xi_1,k\xi_2,\cdots,k\xi_n)$.

显然，同一元素在不同坐标系中的坐标是不同的．后面我们还要研究这一变换关系.

例 1.6　在实数域上，次数不超过 n 的多项式的全体

$$P[\boldsymbol{x}]_n=\{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\,|\,a_n,a_{n-1},\cdots,a_0\in\boldsymbol{R}\}$$

对于通常的多项式加法，数与多项式的乘法构成线性空间.

求线性空间 $P[\boldsymbol{x}]_n$ 的一个基、维数以及向量 p 在该基下的坐标.

解　容易看出，在线性空间 $P[\boldsymbol{x}]_n$ 中，它的一个基为

$$\boldsymbol{p}_1=1,\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{x}^2,\cdots,\boldsymbol{p}_n=\boldsymbol{x}^{n-1},\boldsymbol{p}_{n+1}=\boldsymbol{x}^n$$

故其维数 $\dim P[x]_n=n+1$.

任何次数不大于 n 的多项式

$$\boldsymbol{p}=a_0+a_1\boldsymbol{x}+a_2\boldsymbol{x}^2+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{x}^{n-1}+a_n\boldsymbol{x}^n$$

可以表示为

$$\boldsymbol{p}=a_0\boldsymbol{p}_1+a_1\boldsymbol{p}_2+a_2\boldsymbol{p}_3+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{p}_n+a_n\boldsymbol{p}_{n+1}$$

所以 $\boldsymbol{p}$ 在基$\{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_{n+1}\}$下的坐标为$(a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$.

1.2.2　基变换与坐标变换

基是不唯一的，因此，需要研究基改变时坐标变换的规律.

定义 1.6　设 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_n$ 是 V^n 的旧基，$\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n$ 是 V^n 的新基，它们可以相互线性表示

$$(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n)=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{C} \tag{1.2}$$

式中，$\boldsymbol{C}$ 称为由旧基改变为新基的**过渡矩阵**，而称式(1.2) 为**基变换公式**.

式(1.2) 给出了基变换关系，可以证明过渡矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是非奇异矩阵.

设 $\boldsymbol{x}\in V^n$，它在旧基下的线性表示为

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\boldsymbol{x}_i=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

它在新基下线性表示为

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\xi'_i\boldsymbol{y}_i=(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n)\begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \vdots \\ \xi'_n \end{pmatrix}$$

则

$$(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n)\begin{pmatrix}\xi_1'\\\xi_2'\\\vdots\\\xi_n'\end{pmatrix}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\vdots\\\xi_n\end{pmatrix}$$

由于基元素的线性无关性，得到坐标变换关系

$$\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}\xi_1'\\\xi_2'\\\vdots\\\xi_n'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\vdots\\\xi_n\end{pmatrix}\text{或}\begin{pmatrix}\xi_1'\\\xi_2'\\\vdots\\\xi_n'\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}^{-1}\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\vdots\\\xi_n\end{pmatrix}.$$

上式给出了在基变换式下向量坐标的变换公式.

例 1.7 已知矩阵空间 $\boldsymbol{R}^{2\times 2}$ 的两个基

(1) $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$；

(2) $\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}_4=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

求由基 (1) 改变为基 (2) 的过渡矩阵.

解 为了计算简单，采用中介基的方法，引入简单基

(3) $\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

直接写出由基 (3) 到基 (1) 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{C}_1=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\\1&-1&0&0\end{pmatrix}$$

即

$$(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4)=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{C}_1.$$

再写出由基 (3) 到基 (2) 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{C}_2=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

即

$$(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4)=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{C}_2$$

所以有

$$(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4)=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4)\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{C}_2$$

于是由基 (1) 到基 (2) 的过渡矩阵为

$$C=C_1^{-1}C_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&0&0&-1\\0&1&1&0\\0&1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&1&1&1\\0&1&1&1\\2&2&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

1.3　子空间与维数定理

1.3.1　线性子空间的定义及其性质

定义 1.7　设 V_1 是数域 P 上的线性空间 V 的一个非空子集合，且对 V 的线性运算满足以下条件

(1) 如果 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}\in V_1$，则 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in V_1$；

(2) 如果 $\boldsymbol{x}\in V_1$，$k\in P$，则 $k\boldsymbol{x}\in V_1$.

则称 V_1 是 V 的一个**线性子空间**或**子空间**.

由于线性子空间也是线性空间，因此，前面引入的关于维数、基和坐标等概念亦可应用到线性子空间中去.

性质　(1) 线性子空间 V_1 与线性空间 V 享有共同的零元素；

(2) V_1 中元素的负元素仍在 V_1 中.

证明　(1) $0\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{x}\in V_1\subset V$，则 V 中的零元素也在 V_1 中，V_1 与 V 享有共同的零元素.

(2) $\forall\,\boldsymbol{x}\in V_1$，$(-1)\boldsymbol{x}=(-\boldsymbol{x})\in V_1$，则 V_1 中元素的负元素仍在 V_1 中．证毕

子空间可分为平凡子空间和非平凡子空间．$\{\boldsymbol{0}\}$ 和 V 本身称为**平凡子空间**；除此以外的子空间称为**非平凡子空间**．由于零子空间不含线性无关的向量，因此它没有基，规定其维数为零.

由线性方程组的理论，我们知道

设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{s\times n}$、$V=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n\,|\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0\}$，则称 V 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ 的解空间.

显然，解空间是线性空间 $\boldsymbol{R}^n$ 一个子空间.

下面讨论线性子空间的生成问题.

设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 为 V 中的元素，它们的所有线性组合的所组成的集合

$$\left\{\sum_{i=1}^{m}k_i\boldsymbol{x}_i\ \middle|\ k_i\in P,i=1,2,\cdots,m\right\}$$

也是 V 的线性子空间，称为由 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ **生成（张成）的子空间**，记为 $L(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)$ 或者 $\mathrm{span}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)$.

若 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性无关，则

$$\dim\{L(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)\}=m$$

定理 1.1（基扩定理）　设 V_1 是数域 P 上的线性空间 V^n 的一个 m 维子空间，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 是 V_1 的一个基，则这 m 个基向量必可扩充为 V^n 的一个基；换言之，在 V^n 中必可找到 $n-m$ 个元素 $\boldsymbol{x}_{m+1},\boldsymbol{x}_{m+2},\cdots,\boldsymbol{x}_n$，使得 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_n$ 成为 V^n 的一个基，这 $n-m$ 个元素必不在 V_1 中.

证明　对维数差 $n-m$ 作归纳法.

当以 $n-m=0$ 时，定理显然成立，因为 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 已经是 V^n 的基.

现在假定 $n-m=k$ 时定理成立，考虑 $n-m=k+1$ 的情形.

既然 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 还不是 V^n 的基，但它又是线性无关的，则由定义 1.4 可知，在 V^n 中至少有一个向量 $\boldsymbol{x}_{m+1}$ 不能被 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性表出，把 $\boldsymbol{x}_{m+1}$ 添加进去，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{x}_{m+1}$ 必定是线性无关的（因为，若 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r$ 线性无关，但 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r,\boldsymbol{x}$ 线性相关，那么 $\boldsymbol{x}$ 可以被 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r$ 线性表出，且表示法唯一）. 而子空间 $L(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{x}_{m+1})$ 是 $m+1$ 维的.

因为

$$n-(m+1)=(n-m)-1=k+1-1=k$$

由归纳法假定知 $L(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{x}_{m+1})$ 的基 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{x}_{m+1}$ 可以扩充为 V^n 的基，归纳法完成. 证毕.

例 1.8 试求由向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}4\\9\\5\\4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\7\\4\\3\end{pmatrix}$$

所生成的 $\boldsymbol{R}^4$ 的子空间的基和维数.

解 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=0$$

即

$$\begin{cases} k_1+4k_2+3k_3=0,\\ 3k_1+9k_2+7k_3=0,\\ 2k_1+5k_2+4k_3=0,\\ k_1+4k_2+3k_3=0.\end{cases}$$

解此线性方程组，得

$$k_2=2k_1,\ k_3=-3k_1$$

于是有

$$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3=0.$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，又显见 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，因此所论子空间的维数是 2，即

$$\dim \operatorname{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2,$$

基是由 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$（或 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_3$，或 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1$）所组成.

例 1.9 在矩阵空间 $\boldsymbol{R}^{2\times 2}$ 中，子空间

$V=\left\{\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\middle| x_1-x_2+x_3-x_4=0\right\}$，求子空间 V 的基和维数.

解 在空间 V 中，由于

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2-x_3+x_4 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

可以证明 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$是线性无关的（读者自己完成）.

由基的定义可知，$\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$，$\boldsymbol{A}_3$ 是 V 的一组基，故，$\dim V=3$.

思考题：上例中若子空间变为

$$V=\left\{\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \middle| x_1-x_2+x_3-x_4=0, x_1+x_2+x_3+x_4=0\right\},$$

那么，结果有何变化？

1.3.2 子空间的交与和

前面讨论了由线性空间的元素生成子空间的方法与理论，这里将要讨论的子空间的交与和，可以视为由子空间生成的子空间.

定义 1.8 设 V_1、V_2 是线性空间 V 的两个子空间，则

$$V_1 \cap V_2=\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}\in V_1, \boldsymbol{x}\in V_2\},$$

$$V_1+V_2=\{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}\in V_1, \boldsymbol{y}\in V_2\}.$$

分别称为 V_1 和 V_2 的**交与和**，记为 $V_1\cap V_2$ 与 V_1+V_2.

定理 1.2 若 V_1 和 V_2 是线性空间 V 的两个子空间，则 $V_1\cap V_2$，V_1+V_2 均为 V 的子空间.

证明 (1) $\forall \boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}\in V_1\cap V_2$，

有 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in V_1$，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in V_2$，则 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in V_1\cap V_2$；

$$\forall \boldsymbol{x}\in V_1\cap V_2,\ k\in P,$$

有 $k\boldsymbol{x}\in V_1$，$k\boldsymbol{x}\in V_2$，则 $k\boldsymbol{x}\in V_1\cap V_2$.

故 $V_1\cap V_2$ 是 V 的一个线性子空间.

(2) $\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\in V_1$，$\forall \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2\in V_2$，

有$(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{y}_1)\in V_1+V_2$，$(\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{y}_2)\in V_1+V_2$，

而$(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)\in V_1$，$(\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2)\in V_2$，

故$(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{y}_1)+(\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{y}_2)=(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)+(\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2)\in V_1+V_2$.

$$\forall k\in P,\ k\boldsymbol{x}_1\in V_1,\ k\boldsymbol{y}_1\in V_2.$$

有 $k(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{y}_1)=k\boldsymbol{x}_1+k\boldsymbol{y}_1\in V_1+V_2$.

故 V_1+V_2 是 V 的子空间．证毕.

定理 1.3（维数公式） 若 V_1、V_2 是线性空间 V 的子空间，则有

$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)$.

证明 设 $\dim V_1=n_1$，$\dim V_2=n_2$，$\dim(V_1\cap V_2)=m$，只需要证明 $\dim(V_1+V_2)=n_1+n_2-m$.

设 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ 是 $V_1\cap V_2$ 的一个基，根据基扩定理，

(1) 存在 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_{n_1-m}\in V_1$，使 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_{n_1-m}$，成为 V_1 的一个基；

(2) 存在 $\boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_{n_2-m}\in V_2$，使 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_{n_2-m}$成为 V_2 的一个基；

考察 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_{n_1-m}, \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_{n_2-m}$，若能证明它为 V_1+V_2 的一个基，则有 $\dim(V_1+V_2)=n_1+n_2-m$.

向量成为基的两个条件：

a. 它可以线性表示 V_1+V_2 中的任意元素；

b. 线性无关.

显然条件 a 是满足的，现在采用反证法证明条件 b.

假定上述元素组线性相关，则存在一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m,p_1,p_2,\cdots,p_{n_1-m}$，$q_1,q_2,\cdots,q_{n_2-m}$使

$$\sum k_i\boldsymbol{x}_i+\sum p_i\boldsymbol{y}_i+\sum q_i\boldsymbol{z}_i=\boldsymbol{0}.$$

令 $\boldsymbol{z}=\sum q_i\boldsymbol{z}_i\in V_2$，则

$$\sum k_i\boldsymbol{x}_i+\sum p_i\boldsymbol{y}_i=-\boldsymbol{z}\in V_2\text{ 但}\notin V_1\cap V_2.$$

根据基扩定理，$\sum k_i\boldsymbol{x}_i\in V_1\cap V_2$，$\boldsymbol{y}_i\notin V_1\cap V_2$，$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m$，$\boldsymbol{y}_1$，$\boldsymbol{y}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{y}_{n_1-m}$成为 V_1 的一个基，因此，$p_i=0$.

同理：$q_i=0$，$k_i=0$.

这与假设矛盾，所以上述元素线性无关，可作为 V_1+V_2 的一个基.

因此 $\dim(V_1+V_2)=n_1+n_2-m$. 证毕

1.3.3 子空间的直和

定义 1.9 设 V_1、V_2 是线性空间 V 的子空间，若其和空间 V_1+V_2 中的任一元素只能唯一的表示为 V_1 的一个元素与 V_2 的一个元素之和，即 $\forall\,\boldsymbol{x}\in V_1+V_2$，存在唯一的 $\boldsymbol{y}\in V_1$，$\boldsymbol{z}\in V_2$，使 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$，则称 V_1+V_2 为 V_1 与 V_2 的**直和**，记为 $V_1\oplus V_2$

子空间的直和仍然满足和的定义，即

$$V_1+V_2=\{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\,|\,\boldsymbol{x}\in V_1,\boldsymbol{y}\in V_2\},$$

反映的是两个子空间的关系特殊.

定理 1.4 如下 4 种表述等价：

(1) V_1+V_2 成为直和 $V_1\oplus V_2$；

(2) $V_1\cap V_2=\{\boldsymbol{0}\}$；

(3) $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$；

(4) $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_s$ 为 V_1 的基，$\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_t$ 为 V_2 的基，则 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_s,\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_t$ 为 V_1+V_2的基.

证明 (2) 和 (3) 的等价性显然

采用循环证法：(1)→(2)→(4)→(1).

(1)→(2)：已知 $V_1+V_2=V_1\oplus V_2$，假定 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{x}\in V_1\cap V_2$，则

$$\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x}).$$

$$\boldsymbol{0}\in V_1+V_2,\boldsymbol{0}\in V_1,\boldsymbol{0}\in V_2,\boldsymbol{x}\in V_1,-\boldsymbol{x}\in V_2.$$

说明对 **0** 元素存在两种分解，这与直和的定义矛盾，所以假定不成立，在 $V_1\cap V_2$ 中只能存在 **0** 元素，即 $V_1\cap V_2=\{\boldsymbol{0}\}$.

(2)→(4)：已知 $V_1\cap V_2=\{\boldsymbol{0}\}$.

$\forall\,\boldsymbol{x}\in V_1$，$\boldsymbol{y}\in V_2$，存在如下坐标表示式

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{s}\xi_i\boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{t}\eta_i\boldsymbol{y}_i\,.$$

$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ 可表示 V_1+V_2 中的任一元素.

假设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_s,\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_t$ 线性相关，即存在不全为 0 的 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 使

$$\sum_{i=1}^{s}\xi_i\boldsymbol{x}_i+\sum_{i=1}^{t}\eta_i\boldsymbol{y}_i=\boldsymbol{0}\,.$$