

初等几何學教科書

中學校及師範學校用

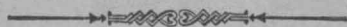
新編
初等幾何學教科書

上海商務印書館藏版

例 言

- 1 本書爲初習幾何者講述大意。以爲研究高深之豫備。中學校及初級師範學校。皆可用作教科書。
- 2 研縝密之學理。必先具明確之觀念。否則迷離惝怳。不得而入其門。本書節目簡要。解說分明。從此入手。庶易得幾何學之要領。
- 3 初學幾何者之通弊。每因言語之用法不完全。以致推論不能精密。本書專注意於此點。凡用於證明之言語。皆極意斟酌。適於生徒之口述。
- 4 關於作圖之問題。多有須用器具者。欲使學者於用器之法。亦藉此嫻習。每作一題。不但知應用定理而已。
- 5 舊譯算書。多以干支代字母。原爲不習西文者。圖其便利。然繼今以往。西文日見通行。正不必多此周折。故本書文。既用橫列。而圖形之標識。亦均沿用西文。此後瀏覽東西書。不致更有窒礙。亦一便也。
- 6 是書原本。爲日本森岩太郎所編。在彼國風行已久。愛其簡要清晰。引人入勝。特取而譯之。以餉我國學者。

目 次



第一編	緒論.....	1—4
第二編	直線.....	5—8
第三編	角.....	9—16
第四編	三角形.....	17—30
第五編	多角形.....	31—38
第六編	圓.....	39—55
第七編	面積.....	56—61
第八編	比例.....	62—69

新編初等幾何學教科書



第一編 緒論

1. 立體 物體在空間。占若干之地位。雖其構成之質不同。因而顏色重量等。亦各各不同。然是皆各物性質之關係也。幾何學於各物之構成及性質。皆置不論。僅就其體之大小及位置而研究之。物之有大小及位置者。謂之立體。或單謂之體。蓋立體云者。於空間中取若干地位。而其周圍皆有界者也。

表立體之大小。每用長闊厚三者明之。謂爲立體之三度。

2. 表面 立體既爲空間之一地位。則立體所在之地位。與空間之地位。不可無分界之處。此界爲立體之表面。或單謂之面。但此界者。不屬於立體。亦不屬於空間。而在立體與空間兩者相接之間。何則。以表面無厚故也。例如盛水於器。此水與器之界。兩者實共之。謂爲水之表面可。謂爲器之表面亦可。又其上面與空氣相接之界。謂爲水之表面可。謂爲空氣之表面亦可。所以表面者。祇有長闊而無厚者也。

3. 線 立體之盡處有界。表面之盡處亦有界。其界謂之線。又面與面相交之處亦爲線。試取白紙一方。黑染其半。則白表面與黑表面分界之處。卽爲線。但此分界之處。不

屬於白。亦不屬於黑。不但無厚而又無闊。所以線者。祇有長而無厚與闊者也。

4. 點 線之盡處又有界。謂之點。又線與線相交之處亦爲點。夫線已無厚與闊。而點又爲其界。則不僅無厚與闊。而又無長。所以點者。祇有位置而無度者也。

5. 圖形 由前說觀之。可知離立體則表面不存。離表面則線不存。離線則點不存。然幾何學。則正以體面線點之分別。一一研究之。而顯之於紙上。此顯於紙上之體面線點。及其結合之形。稱之爲圖形

6. 點及線之圖形 顯點之圖。可畫一黑點或十字形。則點之位置。卽在其正中。於其傍記文字以指明之。例如左圖所畫。可呼爲A點 B點。

A B
• ×

A —————

B ~~~~~

C ~~~~~ D

C - - - - - D

顯線之圖。可以鉛筆畫極細之痕。或畫連續之點。則線之位置。卽在其中間。於其傍或首尾。記文字以指明之。例如左圖所畫。前二線。可呼爲A線B線。後二線。可呼爲CD線。

7. 直線及曲線 取一絲而緊張之。則是絲必成眞直之形。有線如此。卽謂之直線。若精言之。則直線者。始終不變其方向之線。如前圖之A線是也。反之而始終變其方向之線。卽謂之曲線。如前圖之B線是也。

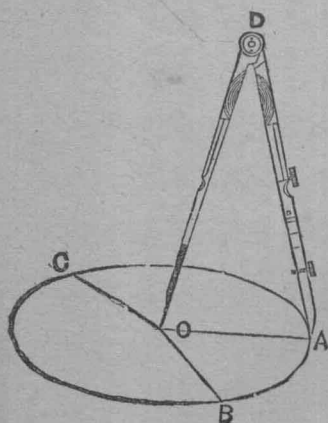
8. 平面及曲面 置定規於鏡面之上。不論位置若何。其定規之邊。常密著於面上。絕無間隙者。謂之平面。若精言之。則平面者。於其上可隨意布設直線之面也。反之而不可隨意布設直線之面。即謂之曲面。如彈丸之面是也。

9. 畫直線法 幾何學所論之直線。決非吾人所能畫者也。雖然。吾人於定規之邊。嘗假定爲直線矣。故沿其邊所畫之線。亦可視之爲直線。設欲畫一直線。過任意之二點。則於紙面上置定規。令其邊與任意之二點相切。然後沿其邊畫一線。則所畫之線。即爲過此任意二點之直線也。

於 AB 二點之間。畫一直線。稱爲聯結 AB 之線。

10. 畫圓周法 曲線之種類雖多。但本書所論者。不過其中之一種。其畫法。則用兩腳規之器械。

將兩腳規之兩脚。任意開之。令此脚之端。據於紙面之一



點如 O。而彼脚之端。則回轉於其外。當回轉時。兩脚之開處。宜不使更變。迨回轉滿一周。則紙面之上。即畫成 ABC 之曲線。惟因兩脚之開處始終不變。故從 O 點至曲線上之各點。皆能相等。此種曲線。謂之圓周。O 點。謂之圓心。OA, OB 等。爲自中心至

圓周之直線。謂之半徑。 AB, BC 等。爲圓周之一段。謂之弧。

凡爲圓周所圍之平面。稱爲圓。

問 題

1. 表物體之大小者。於長闊及厚之外。欲再用他語表之。有否。
2. 箱形之立體。共有若干面。
3. 用一個曲面與一個平面爲界之立體。試舉其例。
4. 白粉筆以若干面爲界。又其面爲何等之面。
5. 於圓柱之面。可設直線否。又如何引長。則其線常爲直線乎。
6. 設紙面上有四點。若每二點聯結之。則得若干線。又此等之直線。相交於幾點。

第 二 編 直 線

11. 直線之長 直線之兩端。可任意引至任何長。故其長本無限。若其長有限者。謂之有限直線。於有限直線之一端。增一段之長。則稱為延長。

12. 從 AB 之直線上。截取其一段。令等於他直線 CD 之長。



開兩脚規之兩脚。令其兩端 P, Q 之距離。等於 CD 。以此距離為半徑。以 A 為中心。而畫弧形。交 AB 於 E 。則 AE 者。即所求之一段也。蓋 CD 與 AE 。既各等於 PQ 之距離。則必互相等也。

凡二直線各等於他直線者。則二直線互相等。此由吾人經驗而知。不待證而自明之真理也。此真理名為公理。不獨適用於直線之長。即所有量數。皆可用之。故述之如下。

各量俱等於一量。則互相等。

此條公理。應用極廣。與後幅所載。僅用於幾何學之公理有別。故名曰普通公理。

普通公理。尚有數條。為習幾何學者所必需。茲并揭之。

普通公理

- (甲) 各量俱等於一量。則互相等。
- (乙) 於相等之量。各加等量。則其和相等。
- (丙) 於相等之量。各減等量。則其差相等。
- (丁) 全量必大於其分。
- (戊) 全量等於各分之和。
- (己) 相等之量等倍之。其倍量必相等。
- (庚) 相等之量等分之。其分量必相等。
- (辛) 於不相等之量加等量。則其和不相等。從大量加得之和。必大於他量。
- (壬) 於不相等之量減等量。則其差不相等。從大量減得之差。必大於他量。

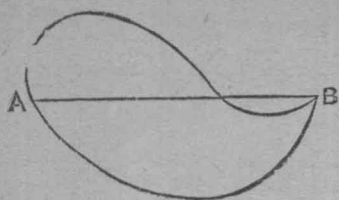
13. 二點間之直線 於二點之間。以數條之絲緊張之。則合爲一條。如於二點間畫若干直線。必皆合爲一線。此亦不待證而自明者也。故亦爲公理之一。惟此公理。祇適用於幾何學之直線。故名之爲幾何學公理。

公理 I. 二點間。祇可引一直線。

由此公理。知於一直線之一段。可疊以他直線之一段者。則二直線必合爲一直線。

又知二直線既交於一點。不能再交於他點。

14. 二點間之距離 於 A, B 二點之間。雖可以設若干別種之線。但其中最短者。必為直線。此亦公理之一也。



公理 II. 直線者。二點間最短之距離也。故

於二點間所引之直線。即為二點之距離。

15. 直線之比較 AB 與 CD 二直線之長。雖可用兩脚規量之。為間接之比較。而亦可用疊合法驗之。為直接之比較。其法。取 AB 直線之紙。置於 CD 直線之紙上。令 A 點合於 C 點。同時若 B 點亦合於 D 點之上。則 AB 等於 CD。

A ————— B

C ————— D

$AB = CD$ 依此書之

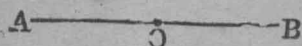
若 B 點落於 C 與 D 之間。則 AB 小於 CD。

$AB < CD$ 依此書之

若 B 點落於 CD 延長之上。則 AB 大於 CD。

$AB > CD$ 依此書之

又如 AC, CB 相連之二直線。其比較法。可從 C 點摺而疊之。使其一線合於餘一線之上以驗之也。



此法不限於直線。凡圖形之形狀與大小均不變者。即可

變其位置。或變其一部分。折疊於他形或他部分之上以比較之也。

依此法。如二圖形處處適合者。其大小必相等。此亦不證自明之真理也。故又有公理如下。

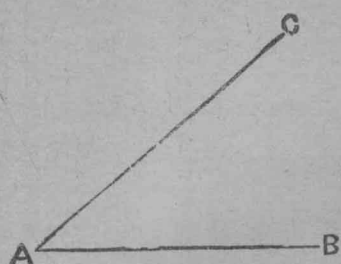
公理 III 二形若處處適合。必相等。

問 題

1. 同年之人。在若干年之前。亦必同年。此與普通公理何項相合。
2. 有 A, B, C 三直線。 $A > B$ 。而 $B > C$ 。則 A 與 C 孰大。
3. 有 A, B, C 三量。 $A > B$ 。而 $B < C$ 。其所差之量相等。則 A 與 C 孰大。
4. 於相等之量。加不相等之量。則其和何者為大。
5. 從相等之量。減不相等之量。則其差何者為大。
6. 直規之邊。果為直線否耶。用何法試之。
7. 有三點。在一直線上。若作三直線。每一線過其二點。則此三直線之交點。不能在三點以外。其理由若何。
8. 四直線相交。不能於六個交點之外再有交點。其理由若何。

第三編 角

16. 平面角 於一點出二直線。如時計之兩針。則



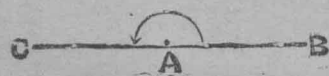
其中間謂之平面角。或單謂之角。其二直線名曰角之邊。邊所從出之點。名曰角之頂點。

呼角者。必從其頂點之一字。

或加入兩邊之文字。如呼 A 角者。以 A 或 BAC 稱之。又 $\angle$ 之記號。用以代角字。如云角 BAC。則記之如 $\angle BAC$ 。

17. 角之大小 依前圖。其始 AC 邊。合於 AB 邊之上。不見有角。試以 A 為中心。移 AC 之位置。回轉於其周。始成 CAB 角。視其回轉之分量。以定角之大小。故角之大小。與其邊之大小無關。惟視其回轉之多少也。

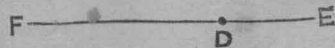
18. 平角 依前條。若 AC 之回轉。其位置與 AB 成一



反向。則 AB, AC 適合一直線。其 CAB 角。名曰平角。平角者。其頂

點旁之兩邊。合為一直線之角也。

如圖之 EDF 角。為另一平角。其 EDF 為一直線。依第十五



條。可取 EDF 置於 BAC 之上。其取 D 點疊於 A 點。DE 線疊於 AB

線。則由公理 1。知 DE 亦必落於 AC 之上。是二平角處處適

合。故依公理 III。知其大小相等。

依同法。可證明有若干平角。其大小皆相等。由此吾人得一新知之真理曰。

凡平角皆相等。

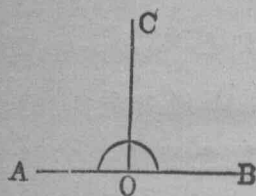
此新知之真理。乃吾人從已知之真理推得者也。

從已知之真理所證明之真理。稱為定理。

定理 1 凡平角皆相等。

19. 直角 一直線如 CO 。立於他直線 AB 之上。其

兩旁作相等之角。如 COA, COB 。則名為直角。



以 AOB 為一直線。故 OA, OB 之角為平角。而直角者。平角之二分之一。

平角者。二直角也。今以凡平角皆相等。故從普通公理(庚)。知其二分之一之直角。亦必相等。故又得定理如下。

定理 2 凡直角皆相等。

小於直角之角。名為銳角。大於直角而小於二直角之角。名為鈍角。

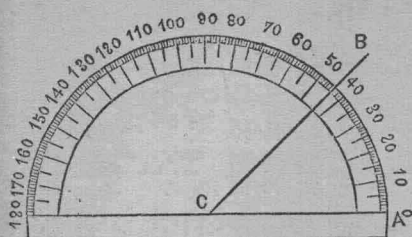
20. 角之單位 計角者。每以直角九十分之一為單位。名之曰度。小於度之單位。有分及秒。一分為六十分度之一。一秒為六十分分之一。表度分秒者。用 $0' ''$ 等之記號。例如五十三度四十分十九秒。記之如 $53^{\circ} 40' 19''$ 。

21. 分度器 分度器者。或測已定之角。或畫欲作

之角。所用之器具也。如圖。

以黃銅等作極薄之半圓板。而於其半周刻劃極勻之界線。以表示角之度數。

若欲測已定之角。則以

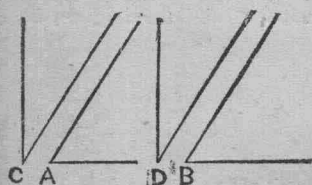


分度器之中心 C。合於其角之頂點。以其一邊合於 CA 之上。再觀其餘一邊。指於半周之某線。即得其角之度數。

如欲作若干度數之角於紙面。則置分度器之中心 C 於其頂點。於其零度界線與若干度界線所指之處。各記一點。然後去其分度器。從 C 點過二點。各引直線。其二線間之角。即所求之角也。

22. 餘角及補角 二角之和等於一直角者。其一角爲他角之餘角。等於二直角者。其一角爲他角之補角。

如圖。C 角爲 A 角之餘角。又 D 角爲 B 角之餘角。且設爲 $\angle A$



$= \angle B$ 。則因 $\angle A + \angle C = \text{直角}$ 。

又 $\angle B + \angle D = \text{直角}$ 。

故 $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$ (普通公理甲)

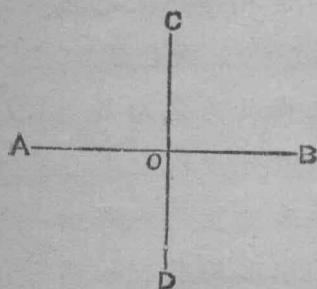
但因 $\angle A = \angle B$ 故從普通公理丙。於相等之量減等量。其差相等。而知 $\angle C = \angle D$

定理3. 相等之角其餘角必相等。

用同法可證明下之定理。

定理4. 相等之角其補角必相等。

23. 垂線 AOB 與 COD 二直線交於一點 O。其一角如 COB 爲直角者其餘三角亦各爲直角。



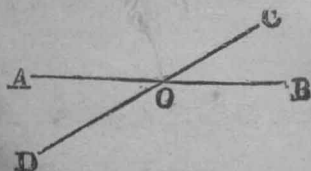
何則。AOB 以一直線而爲 OB, OA 之夾角。即平角。亦即二直角也。而 COB 既爲直角。則其餘一角 COA 亦必爲直角。

又可用同法證明 AOD, DOB 亦各爲直角。

定理5. 二直線交於一點。其一角爲直角。則其餘三角皆爲直角。

如此二直線交成直角者。稱其一線爲他線之垂線。稱交點爲垂線之足。又二直線互謂之垂直。

於一點如 O 之周。每可作四直角。故一點之周之角。爲四直角。



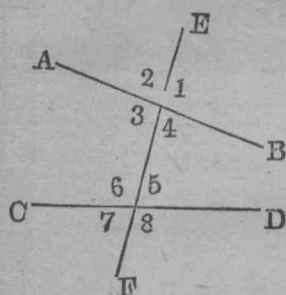
24. 對頂角 二直線交於一點。其交角稱曰對頂角。如圖 COA 角及 BOD 角。又 COB 角及 AOD 角是也。

AOB 以一直線而為 OA,OB 之夾角。即平角。即二直角也。同理知 OC,OD 之夾角。亦為二直角。故此二角相等。今從此相等之二角。各減 COB 角。則依普通公理丙。其所餘之角 COA, BOD 亦相等。

依同理可知 COB 角亦等於 AOD 角。

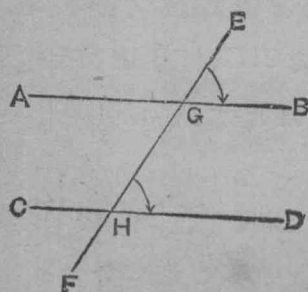
定理 6. 二直線相交之對頂角必相等。

25. 錯角及同位角。 一直線如 EF。交於 AB,CD



二直線。則於相交之二點。有 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 之八個角。其間 3 與 5, 及 4 與 6。各稱錯角。2 與 6, 又 1 與 5, 又 3 與 7, 又 4 與 8, 各稱同位角。錯角有二對。同位角有四對也。

26. 平行線。 一直線如 EF。交於 AB,CD 二直線。



其一對之同位角 EGB, GHD 相等。則直線 AB, 依 EF 回轉之分量。必等於直線 CD, 依 EF 回轉之分量。故 AB, CD 二直線。為同一方向。即將其兩端如何引長之。終不能相交而成角。

依此。凡在同一之平面上。於二直線之兩端。延長至無限。終