



数学建模学习辅导

数学建模 入门与提高

李汉龙 缪淑贤 韩 婷 王金宝 主编



国防工业出版社

National Defense Industry Press



0141.4
2014/

阅 览

数学建模学习辅导

数学建模入门与提高

主 编	李汉龙	缪淑贤	韩 婷	王金宝
副主编	艾 瑛	孙常春	王凤英	
参 编	隋 英	杜利明	刘 丹	董连红



国防工业出版社

· 北京 ·

内 容 简 介

本书是作者结合多年的数学建模课程教学实践并参考有关资料的基础上,专为理工科大学生数学建模竞赛的辅导培训而编写的基本教材和参考资料,其内容包括:数学建模概述、初等数学建模、数据拟合模型、简单的优化模型、数学规划模型、微分方程模型、差分方程模型、层次分析模型、统计回归模型、数学建模案例分析、Excel 在数学建模中的应用.书中配备了较多关于数学建模的实例,这些实例是学习数学建模必须掌握的基础和基本技能.

本书由浅入深,由易到难,既可作为数学建模课程教材和辅导书,也可以作为相关科技工作者参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

数学建模入门与提高/李汉龙等主编. —北京:国防工业出版社,2013.8

ISBN 978-7-118-08970-7

I. ①数... II. ①李... III. ①数学模型—研究 IV. ①0141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 214005 号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 19½ 字数 468 千字

2013 年 8 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 定价 38.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店: (010)88540777

发行邮购: (010)88540776

发行传真: (010)88540755

发行业务: (010)88540717

前 言

数学建模就是用数学语言描述实际现象的过程。这里的实际现象既包含具体的自然现象,也包含抽象的现象;既包含外在形态,内在机制的描述,也包含预测、试验和解释实际现象等内容。

数学建模是联系数学与实际问题的桥梁,是数学在各个领域广泛应用的媒介,是数学科学技术转化的主要途径。数学建模在科学技术发展中的重要作用越来越受到数学界和工程界的普遍重视,它已成为现代科技工作者必备的重要能力之一。

为了科学技术发展的需要,培养高质量、高层次科技人才,数学建模已经在大学教育中逐步开展。国内外越来越多的大学正在进行“数学建模”课程的教学,并参加一些开放性的数学建模竞赛,将数学建模教学作为高等院校的教学改革和培养高层次科技人才的一个重要方面。许多院校正在将数学建模与教学改革相结合,努力探索更有效的数学建模教学法和培养面向21世纪人才的新思路。与我国高校的其他数学类课程相比,数学建模具有难度大,涉及面广,形式灵活,对教师和学生要求高等特点。数学建模的教学本身是一个不断探索、不断创新、不断完善和提高的过程。为了改变过去以教师为中心、以课堂知识讲授为主的传统教学模式,数学建模课程创建了一个新的指导思想——以实验室为基础、以学生为中心、以问题为主线、以培养能力为目标来组织教学工作,通过教学使学生了解利用数学理论和方法分析和解决问题的全过程,提高他们分析问题和解决问题的能力;提高他们学习数学的兴趣和应用数学的意识与能力,使他们在今后的工作中能经常性地想到用数学去解决问题,提高他们利用计算机软件及当代高新科技成果的意识,将数学、计算机有机地结合起来去解决实际问题。本书是我们在教学实践并参考有关资料的基础上,专为理工科大学生数学建模竞赛的辅导培训而编写的基本教材和参考资料。

本书包含入门部分和提高部分。其中第1章~第4章为入门部分,第5章~第10章为提高部分。全书是基于数学软件 Mathematica 来编写的,考虑到许多读者也在使用电子表格软件 Excel,因此补充了第11章内容,同时在附录中对数学建模常用软件进行了介绍。

全书每章均配备了相应的习题,并给出了习题答案与提示。本书通过具体的实例,使读者一步一步地随着作者的思路来完成课程的学习。书中所给实例具有技巧性而又道理显然,可使读者思路畅达,灵活运用所学知识,达到事半功倍之效。本书所使用的素材包含文字、图形、图像等,有的为作者自己制作,有的来自于互联网。使用这些素材的目的是想给读者提供更为完善的学习资料。

本书第1章由刘丹编写;第2章由李汉龙编写;第3章由王金宝编写;第4章由王凤英编写;第5章由隋英编写;第6章、第7章由缪淑贤编写;第8章、第9章由艾瑛编写;第10章由

孙常春编写；第 11 章由杜利明编写；附录及前言由韩婷编写。全书由李汉龙统稿，李汉龙、缪淑贤、韩婷、王金宝审稿。另外，本书的编写和出版得到了国防工业出版社的大力支持，在此表示衷心的感谢！

本书参考了国内外出版的一些教材，在此表示谢意。由于水平所限，书中不足之处在所难免，恳请读者、同行和专家批评指正。

编者
2013 年 6 月

目 录

第 1 章 数学建模概述	1	事件	17
1.1 数学模型与数学建模	1	2.4 用数据建立经验模型	18
1.1.1 数学模型与数学建模 的基本概念	1	2.4.1 最小二乘法	19
1.1.2 数学建模对大学生素质 能力培养的作用	2	2.4.2 三次样条插值法	20
1.2 数学模型的分类与数学建模 的一般步骤和方法	3	2.5 随机性模型	23
1.2.1 数学模型的分类	3	2.5.1 随机变量	23
1.2.2 数学建模的一般步骤	4	2.5.2 蒙特卡罗方法	24
1.2.3 数学建模的方法	5	2.6 几个历史性问题	25
1.2.4 数学建模举例	5	2.6.1 丢番图问题	25
1.3 关于数学建模竞赛的介绍	7	2.6.2 勾股定理和费尔马大 定理	26
1.3.1 中国大学生数学建模 竞赛简介	7	2.6.3 四色问题	27
1.3.2 美国大学生数学建 模竞赛简介	10	2.6.4 哥尼斯堡七桥问题	27
习题 1	12	2.6.5 田忌赛马问题	28
第 2 章 初等数学建模	13	2.6.6 纳什均衡问题	28
2.1 有关自然数的模型	13	2.7 简单的规划模型	29
2.1.1 抽屉原理	13	2.7.1 线性规划模型	30
2.1.2 “奇偶校验”方法	13	2.7.2 求解线性规划的 Mathematica 命令	31
2.1.3 自然数的因子个数与 狱吏问题	14	2.8 崖高的估算	31
2.2 状态转移问题	15	2.8.1 自由落体运动公式的 应用	31
2.2.1 人、狗、鸡、米问题	15	2.8.2 微积分的应用	31
2.2.2 商人过河问题	16	2.8.3 问题进一步的考虑	32
2.3 函数关系	17	2.9 动物数量预测	32
2.3.1 正比例关系	17	2.9.1 问题的提出	32
2.3.2 构造函数刻画特定的		2.9.2 分析问题并建立模型	32
		2.9.3 模型的进一步研究	33
		2.10 饿狼追兔问题	34
		2.10.1 问题的提出	34
		2.10.2 分析问题并建立模型	34
		2.11 天然气储量问题	34

2.11.1	问题的提出	34
2.11.2	模型假设及符号说明	35
2.11.3	问题分析及数学模型	35
2.11.4	模型的分析与计算	36
2.12	决策模型	38
2.12.1	问题提出	38
2.12.2	决策的概念和类型	39
2.12.3	不确定型决策	42
2.13	无穷级数模型	43
2.13.1	问题的提出	43
2.13.2	分析与建模	43
习题2		44
第3章	数据拟合模型	46
3.1	数据拟合的基本理论	46
3.1.1	最小二乘法及其计算	46
3.1.2	多元最小二乘拟合	52
3.1.3	最小二乘法的另一种 数学表达	53
3.1.4	支持向量机	55
3.1.5	遗传算法	55
3.2	数据拟合应用实例	57
3.2.1	数据拟合在物理实验中的 应用	57
3.2.2	数据拟合在机械参数测量模型 研究中的应用	59
3.2.3	数据拟合在塔机起重量监测 系统中的应用	61
3.2.4	数据拟合在其他实际工程中 的应用	62
3.3	用 Mathematica 实现曲线 拟合的实例	63
习题3		66
第4章	简单的优化模型	67
4.1	存储模型	67
4.1.1	存储模型的基本概念	67
4.1.2	不允许缺货的存储模型	68

4.1.3	允许缺货的存储模型	70
4.1.4	存储模型的应用	72
4.2	奶制品的生产与销售	73
4.2.1	问题描述	73
4.2.2	问题分析	74
4.2.3	模型假设	74
4.2.4	符号说明	74
4.2.5	模型建立	74
4.2.6	模型求解	75
4.3	生猪的出售时机	76
4.3.1	问题描述	76
4.3.2	问题分析及符号约定	76
4.3.3	模型建立	76
4.3.4	模型求解	77
4.3.5	敏感性分析	77
4.3.6	强健性分析	79
4.4	饮料厂的生产与检修	79
4.4.1	问题重述	79
4.4.2	问题分析	79
4.4.3	模型假设	80
4.4.4	模型建立	80
4.4.5	模型求解	80
4.5	森林救火	81
4.5.1	问题描述	81
4.5.2	问题分析	81
4.5.3	模型假设	82
4.5.4	模型建立	82
4.5.5	模型求解	83
4.5.6	结果分析	83
4.6	最优价格	84
4.6.1	问题提出	84
4.6.2	问题分析	84
4.6.3	模型假设	84
4.6.4	模型建立	84
4.6.5	模型求解	85
4.7	报童问题	85
4.7.1	问题描述	85
4.7.2	模型假设	86

4.7.3	模型建立	86	5.5.1	多目标规划模型	118
4.7.4	求解模型	86	5.5.2	投资的风险与收益问题	119
4.7.5	模型应用	87	5.6	动态规划模型	121
4.8	供应与选址问题	88	5.6.1	动态规划模型	121
4.8.1	问题描述	88	5.6.2	资源的最优配置模型	121
4.8.2	模型准备	88	习题5		123
4.8.3	模型建立	88	第6章	微分方程模型	125
4.8.4	模型求解	89	6.1	饮酒驾车模型	125
4.9	冰山运输问题	90	6.1.1	问题提出	125
4.9.1	问题描述	90	6.1.2	模型建立	125
4.9.2	模型准备	90	6.1.3	模型求解	125
4.9.3	模型假设及分析	91	6.2	减肥模型	126
4.9.4	模型建立	91	6.2.1	背景知识	126
4.9.5	模型求解	93	6.2.2	问题分析	126
4.9.6	结果分析	93	6.2.3	合理假设	126
4.10	易拉罐下料问题	94	6.2.4	模型建立	127
4.10.1	问题描述	94	6.2.5	模型求解	127
4.10.2	问题分析	94	6.2.6	结果分析	127
4.10.3	模型建立	95	6.3	空气清洁问题模型	128
4.10.4	模型求解	95	6.3.1	问题提出	128
习题4		96	6.3.2	问题分析	128
第5章	数学规划模型	98	6.3.3	问题假设	128
5.1	线性规划模型	99	6.3.4	模型建立	129
5.1.1	线性规划模型	99	6.3.5	模型求解	129
5.1.2	炊具的生产计划建模	99	6.3.6	模型的优缺点分析及改进方向	130
5.1.3	自来水的输送建模	101	6.4	传染病的传播模型	130
5.2	整数线性规划模型	105	6.4.1	简化模型	130
5.2.1	整数线性规划模型	105	6.4.2	SI模型	131
5.2.2	汽车的生产计划建模	105	6.4.3	SIS模型	132
5.2.3	游泳运动员的选拔问题	108	6.4.4	SIR模型	133
5.3	非线性规划模型	112	6.5	渔业资源开发模型	134
5.3.1	非线性规划模型	112	6.5.1	固定限额捕获策略	134
5.3.2	钢管下料问题	112	6.5.2	固定捕获努力量捕获策略	135
5.4	无约束规划模型	117	6.6	广告费模型	136
5.4.1	无约束规划模型	117	6.6.1	问题提出	136
5.4.2	价格竞争模型	117			
5.5	多目标规划模型	118			

6.6.2	符号约定	137
6.6.3	曲线拟合	137
6.6.4	模型建立	139
6.6.5	模型求解	139
6.7	放射性废物的处理问题	139
6.7.1	问题的提出	139
6.7.2	模型建立与求解	140
6.8	如何预测人口的增长	142
6.8.1	人口指数增长模型(马尔萨斯人口模型)	143
6.8.2	人口阻滞增长模型(Logistic模型)	144
习题6		146
第7章	差分方程模型	147
7.1	差分方程简介	147
7.1.1	定义	147
7.1.2	解法	147
7.1.3	差分方程的平衡点及稳定性	147
7.2	市场经济中的蛛网模型	148
7.2.1	问题提出	148
7.2.2	合理假设	148
7.2.3	模型分析	148
7.2.4	模型建立	149
7.2.5	结果分析	149
7.2.6	经济不稳定时的干预办法	149
7.2.7	模型推广	149
7.3	银行贷款买房决策模型	150
7.3.1	合理假设	150
7.3.2	符号约定	151
7.3.3	模型建立	151
7.3.4	应用举例	151
7.3.5	模型改进及推广	153
7.4	人口模型	153
7.4.1	问题提出	153
7.4.2	符号说明	154

7.4.3	合理假设	154
7.4.4	模型建立	154
7.4.5	模型求解	155
7.4.6	对模型结果作进一步讨论	156
7.4.7	模型评价	159
习题7		159

第8章 层次分析模型 160

8.1	旅游地的选择	160
8.1.1	层次分析法的基本步骤	160
8.1.2	层次分析法的广泛应用	166
8.1.3	层次分析法的若干问题	171
8.2	学生素质测评模型	176
8.2.1	问题提出	176
8.2.2	模型建立及求解	176
8.2.3	评注	180
习题8		180

第9章 统计回归模型 182

9.1	线性回归模型	182
9.1.1	问题提出	182
9.1.2	模型分析	183
9.1.3	模型求解	183
9.2	多项式回归模型	185
9.2.1	混凝土的抗压强度	185
9.2.2	物体降落的距离与时间	186
9.3	非线性回归模型	187
9.3.1	遗传特征	187
9.3.2	酶促反应	189
9.3.3	钢包的使用次数与容积	192
习题9		194

第10章 数学建模案例分析 195

10.1	城市表层土壤重金属污染分析	195
10.1.1	问题描述	195
10.1.2	基本假设	195

10.1.3	符号规定	196	11.1.1	Excel 中的函数	222
10.1.4	问题分析与模型建立及 求解	196	11.1.2	Excel 的数据分析功能 ...	230
10.1.5	模型的优缺点分析	207	11.2	Excel 绘制图表	234
10.1.6	模型的检验与推广	208	11.2.1	图表概念与种类	234
10.2	太阳能小屋的设计	208	11.2.2	图表的创建	234
10.2.1	问题描述	208	11.2.3	图表的编辑与修改	238
10.2.2	基本假设	209	11.3	Excel 进行相关与回归 分析	240
10.2.3	符号规定	209	11.3.1	相关分析	240
10.2.4	问题分析与模型建立及 求解	210	11.3.2	回归分析	243
10.2.5	模型的优缺点分析	221	习题 11		251
10.2.6	模型的检验与推广	221	习题答案与提示		252
习题 10		221	附录 数学建模常用软件介绍		273
第 11 章 Excel 在数学建模中 的应用		222	参考文献		300
11.1	Excel 的数据处理功能	222			

第1章 数学建模概述

1.1 数学模型与数学建模

半个多世纪以来,随着计算机技术的迅速发展,数学的应用不仅在工程技术、自然科学等领域发挥着越来越重要的作用,而且以空前的广度和深度向经济、金融、生物、医学、环境、地质、人口、交通等新的领域渗透,数学技术已经成为当代高新技术的重要组成部分。

数学已经越来越多地与实际问题的相联系,当需要从定量的角度分析和研究一个实际问题时,人们就要在深入调查研究、了解对象信息、作出简化假设、分析内在规律等工作的基础上,用数学的符号和语言,把它表述为数学表达式,也就是数学模型,然后用通过计算得到的模型结果来解释实际问题,并接受实际的检验。这个建立数学模型的全过程就称为数学建模。

1.1.1 数学模型与数学建模的基本概念

数学模型是近些年发展起来的新学科,是数学理论与实际问题相结合的一门科学。它将现实问题归结为相应的数学问题,并在此基础上利用数学的概念、方法和理论进行深入的分析,从而从定性或定量的角度来刻画实际问题,并为解决现实问题提供精确的数据或可靠的指导。

数学模型一般是实际事物的一种数学简化。它常常是以某种意义上接近实际事物的抽象形式存在的,但它和真实的事物有着本质的区别。要描述一个实际现象可以有很多种方式,如录音、录像、比喻、传言等。为了使描述更具科学性、逻辑性、客观性和可重复性,人们采用一种普遍认为比较严格的语言来描述各种现象,这种语言就是数学。使用数学语言描述的事物就称为数学模型(Mathematical Model)。有时候我们需要做一些实验,但这些实验往往是用抽象的数学模型作为实际物体的代替而进行的,实验本身也是实际操作的一种理论替代。数学模型一般并非现实问题的直接翻版,它的建立常常既需要人们对现实问题深入细微的观察和分析,又需要人们灵活巧妙地利用各种数学知识。这种应用知识从实际课题中抽象、提炼出数学模型的过程就称为数学建模(Mathematical Modeling)。

数学建模就是用数学语言描述实际现象的过程。这里的实际现象既包含具体的自然现象(如自由落体),也包含抽象的现象(如顾客对某种商品所取的价值倾向)。这里的描述不但包括外在形态和内在机制的描述,也包括预测、实验和解释实际现象等内容。

数学建模是联系数学与实际问题的桥梁,是数学在各个领域广泛应用的媒介,是数学科学技术转化的主要途径。数学建模在科学技术发展中的重要作用越来越受到数学界和工程界的普遍重视,它已成为现代科技工作者必备的重要能力之一。

应用数学解决各类实际问题时,建立数学模型是十分关键的一步,同时也是十分困难的一步。建立数学模型的过程,是把错综复杂的实际问题简化、抽象为合理的数学结构的过程。要通过调查、收集数据资料,观察和研究实际对象的固有特征和内在规律,抓住问题的主要矛盾,建立起反映实际问题的数量关系,然后利用数学的理论和方法去分析和解决问题。这需要深

厚、扎实的数学基础,敏锐的洞察力和想象力,对实际问题的浓厚兴趣和广博的知识面。

数学建模以学生为主,教师利用一些事先设计好的问题启发,引导学生主动查阅文献资料和学习新知识,鼓励学生积极开展讨论和辩论,培养学生主动探索、努力进取的学风,从事科研工作的初步能力,团结协作的精神,营造一个生动活泼的环境和气氛。教学过程的重点是创造一个环境去诱导学生的学习欲望、培养他们的自学能力,增强他们的数学素质和创新能力。提高数学素质强调的是获取新知识的能力,是解决问题的过程,而不是知识与结果。

为了适应科学技术发展的需要和培养高质量、高层次的科技人才,数学建模已经在大学教育中逐步开展。国内外越来越多的大学正在进行“数学建模”课程的教学,并参加开放性的数学建模竞赛,将数学建模教学和竞赛作为高等院校教学改革和培养高层次科技人才的一个重要方面。许多院校正在将数学建模与教学改革相结合,努力探索更有效的数学建模教学法和培养面向 21 世纪的人才的新思路,与我国高校的其他数学类课程相比,数学建模具有难度大,涉及面广,形式灵活,对教师和学生要求高等特点。数学建模的教学本身是一个不断探索、不断创新、不断完善和提高的过程。为了改变过去以教师为中心、以课堂讲授为主、以知识传授为主的传统教学模式,数学建模课程指导思想是以实验室为基础、以学生为中心、以问题为主线、以培养能力为目标。通过教学使学生了解利用数学理论和方法去分析和解决问题的全过程,提高他们分析问题和解决问题的能力;提高他们学习数学的兴趣和应用数学的意识与能力,使他们在以后的工作中能经常性地想到用数学去解决问题,提高他们尽量利用计算机软件及当代高新科技成果的意识,能将数学、计算机有机地结合起来去解决实际问题。

1.1.2 数学建模对大学生素质能力培养的作用

数学建模是数学学习的一种新的方式,它为学生提供了自主学习空间,有助于学生体验数学在解决实际问题中的价值和作用,体验数学与日常生活和其他学科的联系,体验综合运用知识和方法解决实际问题的过程,增强应用意识;有助于激发学生学习数学的兴趣,发展学生的创新意识和实践能力。

1. 数学建模有利于培养学生的创造能力和创新意识

数学建模通常针对的是从生产、管理、社会、经济等领域中提出的原始实际问题,这类问题一般都未作加工处理,也未作任何假设简化,有些甚至看起来与数学毫无关系。因此,建模时首先要确定哪些是问题的主要因素,哪些是次要因素,做出适当、合理的假设,使问题得到简化;然后再利用适当的数学方法和知识来提炼和形成数学模型。一般来讲,由于所作假设不同,所使用的数学方法不同,可能会做出不同的数学模型,这些模型有可能都是正确的、合理的。

2. 数学建模有利于培养学生的组织协调能力

在学校里,学生通常是自己一个人念书、做题,几个人在一起活动的机会不多,特别是不同专业的学生在一起研究讨论问题的机会更不多见,而建模比赛是以三人组成一队一起参加的,这样设置的初衷就是为了建立队员之间的相互信任,从而培养队员的协作能力。比赛要求参赛队在三天之内对所给的问题提出一个较为完整的解决方案,这么短的时间内仅仅依靠一两个人的“聪明才智”是很难完成的,只有合三人之力,才能顺利给出一个较好的结果。而且要给出一份优秀的解决方案,创新与特色是必不可少的。因此三人在竞赛中既要合理分工,充分发挥个人的潜力,又要集思广益,密切协作,形成合力,也就是要做个“人力资源”的最优组合,使个人智慧与团队精神有机地结合在一起。因此数学建模可以培养同学的合作意识,相互协

调、求同存异、取长补短。认识到团队精神和协调能力的重要性对于即将面临就业选择的莘莘学子来说无疑是有益的,以至对他们一生的发展都是非常重要的。

3. 数学建模有利于培养和提高学生的自学能力和使用文献资料的能力

数学建模所需要的知识,除了与问题相关的专业知识外,还必须掌握诸如微分方程、数学规划、计算方法、计算机语言、应用软件及其他学科知识等,它是多学科知识、技能和能力的高度综合。宽泛的学科领域和广博的技能技巧是学生原来没有学过的,也不可能有过多的时间由老师来补课,所以只能通过学生自学和讨论来进一步掌握。教师只是启发式地介绍一些相关的数学知识和方法,然后学生围绕需要解决的实际问题广泛查阅相关的资料,从中吸取自己所需要的东西,这又大大锻炼和提高了学生自觉使用资料的能力。而这两种能力恰恰是学生今后在工作和科研中所永远需要的,他们可以靠这两种能力不断地扩充和提高自己。

4. 数学建模有利于培养和提高学生的计算机应用能力

应用计算机解决建模问题,是数学建模非常重要的环节。其一,可以应用计算机对复杂的实际问题和繁琐的数据进行技术处理,若用手工计算来完成其难度是可想而知的;同时也可用计算机来考察将要建立的模型的优劣。其二,一旦模型建立,还要利用计算机进行编程或利用现成的软件包来完成大量复杂的计算和图形处理。没有计算机的应用,想完成数学建模任务是不可能的。例如1999年全国大学生数学建模竞赛题B(矿井选址问题),它需要借助计算机进行全方位的搜索,以确定最佳钻井地址,从而节约钻井费用,提高经济效益。因此,数学建模活动对提高学生使用计算机及编程能力是不言而喻的。

5. 数学建模可以增强大学生的适应能力

在知识经济时代,知识更新速度不断加快,如果思维模型和行为方式不能与信息革命的要求相适应,就会失去与社会同步前进的机会。如今市场对人才的要求越来越高,人才流动、职业变化更加频繁,一个人在一生中可能有多次选择与被选择的经历。通过数学建模的学习及竞赛训练,不仅可以受到现代数学思维及方法的熏陶,更重要的是学会针对不同的实际问题进行分析、推理、概括,以及利用数学方法与计算机知识,还有各方面的知识综合起来解决它。因此,学好数学建模可以提高大学生的素质,使他们无论以后到哪个行业工作,都能很快适应需要。

如上所述,开展数学建模教学与实践这项活动,将有助于大学生创新能力、实践能力的培养,从而有助于大学生综合素质能力的提高。此外,数学建模还可以帮助学生提高论文的写作能力、增加学生的集体荣誉感,以及提高大学生的分析、综合、解决实际问题的能力,此处不再一一论及。

1.2 数学模型的分类与数学建模的一般步骤和方法

1.2.1 数学模型的分类

数学模型可以按照不同的方式进行分类,下面介绍常用的几种分类方式。

(1) 按照模型的应用领域(或所属学科)分:如人口模型、交通模型、环境模型、生态模型、城镇规划模型、水资源模型、再生资源利用模型、污染模型等。范畴更大一些则形成许多边缘学科,如生物数学、医学数学、地质数学、数量经济学、数学社会学等。

(2) 按照建立模型的数学方法(或所属数学分支)分:如初等数学模型、几何模型、微分方

程模型、图论模型、马氏链模型、规划论模型等。

按第(1)种方法分类的数学模型教科书中,着重于某一专门领域中用不同方法建立模型,而按第(2)种方法分类的书里,是用属于不同领域的现成的数学模型来解释某种数学技巧的应用。

(3) 按照模型的表现特性分:确定性模型和随机性模型,取决于是否考虑随机因素的影响;近年来随着数学的发展,又有所谓突变性模型和模糊性模型;静态模型和动态模型,取决于是否考虑时间因素引起的变化;线性模型和非线性模型,取决于模型的基本关系,如微分方程是否是线性的;离散模型和连续模型,指模型中的变量(主要是时间变量)取为离散还是连续的。虽然从本质上讲大多数实际问题是随机性的、动态的、非线性的,但是由于确定性、静态、线性模型容易处理,并且往往可以作为初步的近似来解决问题,所以建模时常先考虑确定性、静态、线性模型。连续模型便于利用微积分方法求解,作理论分析,而离散模型便于在计算机上作数值计算,所以用哪种模型要看具体问题而定。在具体的建模过程中将连续模型离散化,或将离散变量视作连续,也是常采用的方法。

(4) 按照建模目的分:如描述模型、分析模型、预报模型、优化模型、决策模型、控制模型等。

(5) 按照对模型结构的了解程度分:如白箱模型、灰箱模型、黑箱模型。这是把研究对象比喻成一只箱子里的机关,要通过建模来揭示它的奥妙。白箱主要包括用力学、热学、电学等一些机理相当清楚的学科描述的现象以及相应的工程技术问题。灰箱主要指生态、气象、经济、交通等领域中机理尚不十分清楚的现象,在建立和改善模型方面都还不同程度地有许多工作要做。至于黑箱则主要指生命科学和社会科学等领域中一些机理(数量关系方面)很不清楚的现象。有些工程技术问题虽然主要基于物理、化学原理,但由于因素众多、关系复杂和观测困难等原因也常作为灰箱或黑箱模型处理。当然,白、灰、黑之间并没有明显的界限,而且随着科学技术的发展,箱子的“颜色”必然是逐渐由暗变亮的。

(6) 按模型的应用领域分:如生物学数学模型、医学数学模型、地质学数学模型、气象学数学模型、经济学数学模型、社会学数学模型、物理学数学模型、化学数学模型、天文学数学模型、工程学数学模型。

1.2.2 数学建模的一般步骤

1. 模型准备

了解问题的实际背景,明确建模目的,搜集必需的各种信息,尽量弄清对象的特征。

2. 模型假设

根据对象的特征和建模目的,对问题进行必要的、合理的简化,用精确的语言作出假设,是建模至关重要的一步。如果对问题的所有因素一概考虑,无疑是一种有勇气但方法欠佳的行为,所以高水平的建模者能充分发挥想象力、洞察力和判断力,善于辨别主次,而且为了使处理方法简单,应尽量使问题线性化、均匀化。

3. 模型构成

根据所作的假设分析对象的因果关系,利用对象的内在规律和适当的数学工具,构造各个量间的等式关系或其他数学结构。这时可以应用的学科领域非常多,除高等数学、概率统计外,更细的分支是图论、排队论、线性规划、对策论等。但是,建立数学模型是为了让更多的人明了并能加以应用,因此工具越简单越有价值。

4. 模型求解

可以采用解方程、画图形、证明定理、逻辑运算、数值运算等各种传统的和近代的数学方法,特别是计算机技术.一道实际问题的解决往往需要纷繁的计算,许多时候还得将系统运行情况用计算机模拟出来,因此编程和对数学软件的熟练操作能力便举足轻重.

5. 模型分析

利用数学工具对模型进行数学上的分析.能否对模型结果作出细致精当的分析,决定了模型能否达到更高的档次.不论哪种情况,都需进行误差分析和数据稳定性分析.

1.2.3 数学建模的方法

1. 机理分析法

从基本物理定律以及系统的结构数据来推导出模型.

(1) 比例分析法—建立变量之间函数关系的最基本最常用的方法.

(2) 代数方法—求解离散问题(离散的数据、符号、图形)的主要方法.

(3) 逻辑方法—是数学理论研究的重要方法,对社会学 and 经济学等领域的实际问题,在决策,对策等学科中得到广泛应用.

(4) 常微分方程—解决两个变量之间的变化规律,关键是建立“瞬时变化率”的表达式.

(5) 偏微分方程—解决因变量与两个以上自变量之间的变化规律.

2. 数据分析法

从大量的观测数据利用统计方法建立数学模型.

(1) 回归分析法—用于对函数 $f(x)$ 的一组观测值 $(x_i, f_i) (i = 1, 2, \dots, n)$ 确定函数的表达式,由于处理的是静态的独立数据,故称为数理统计方法.

(2) 时序分析法—处理的是动态的相关数据,又称为过程统计方法.

3. 仿真和其他方法

(1) 计算机仿真(模拟)—实质上是统计估计方法,等效于抽样实验.

① 离散系统仿真—有一组状态变量.

② 连续系统仿真—有解析表达式或系统结构图.

(2) 因子实验法—在系统上作局部实验,再根据实验结果进行不断分析修改,求得所需的模型结构.

(3) 人工现实法—基于对系统过去行为的了解和对未来希望达到的目标,并考虑到系统有关因素的可能变化,人为地组成一个系统.

1.2.4 数学建模举例

例 1-1 航行问题. 已知:沿长江在相距 750km 的两个码头 A 与 B 之间,顺水航行的时间是 30h;逆水航行的时间是 50h,试分别求出船和水的平均速度.

解:令船和水的平均速度分别是 x 和 y ,由题意得

$$\begin{cases} x + y = \frac{750}{30} \\ x - y = \frac{750}{50} \end{cases}$$

求解得

$$\begin{cases} x = 20 \\ y = 5 \end{cases}$$

例 1-2 椅子能在不平的地面上放稳吗? 把椅子往不平的地面上一放,通常只有三只脚着地,放不稳,然而只需稍挪动几次,就可以使四只脚同时着地,放稳了. 这个看起来似乎与数学无关的现象能用数学语言给以表述,并用数学工具来证实吗?

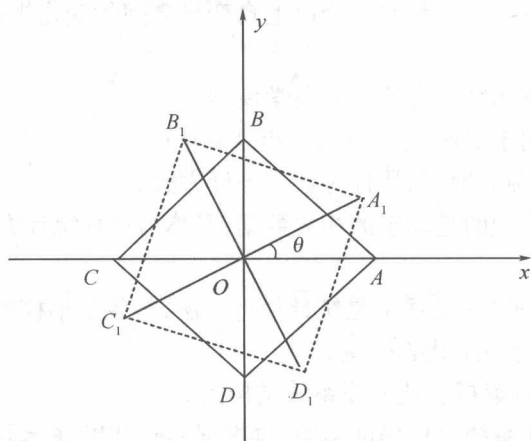
模型假设:(1)椅子的四条腿一样长,椅脚与地面接触处可视为一个点,四脚的连线呈正方形.

(2)地面高度是连续变化的,沿任何方向都不会出现间断(没有像台阶那样的情况),即地面可视为数学上的连续曲面.

(3)地面相对平坦,使椅子在任意位置至少三只脚同时着地.

对于椅脚的间距和椅腿的长度而言,地面是相对平坦的,使椅子在任何位置至少有三只脚同时着地.

模型构成:注意到椅脚连线呈正方形,以中心为对称点,正方形绕中心的旋转正好代表了椅子位置的改变,于是可以用旋转角度这一变量 θ 表示椅子的位置. 如下图,椅脚连线为正方形 $ABCD$,对角线 AC 与 x 轴重合,椅子绕中心点 O 旋转角度 θ 后,正方形 $ABCD$ 转至 $A_1B_1C_1D_1$ 的位置,所以对角线 AC 与 x 轴的夹角 θ 表示了椅子的位置.



其次要把椅脚着地用数学符号表示出来. 可用某个变量表示椅脚与地面的竖直距离,当其为零时就是椅脚着地了. 由于正方形的中心对称性,只要设两个距离函数就行了. 记 A, C 两脚与地面距离之和为 $f(\theta)$, B, D 与地面距离之和为 $g(\theta)$ ($f(\theta), g(\theta)$ 非负). 由假设(2), f 和 g 都是连续函数. 由假设(3),椅子在任何位置至少有三只脚着地,所以对于任意的 θ , $f(\theta), g(\theta)$ 中至少有一个为零. 当 $\theta=0$ 时,不妨设 $g(\theta)=0, f(\theta)>0$, 这样,改变椅子的位置使四只脚同时着地,就归结为证明下面的数学命题:

命题:

已知 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 的连续函数,对于任意的 $\theta, f(\theta)g(\theta)=0$, 且 $g(0)=0, f(0)>0$.

证明:存在 θ_0 , 使得 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

证明:

将椅子旋转 90° , 对角线 AC 与 BD 互换, 由 $g(0)=0$ 和 $f(0)>0$ 可知 $g(\pi/2)>0$ 和 $f(\pi/2)=0$, 令 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$, 则 $h(0)>0$ 和 $h(\pi/2)<0$. 由 h 和 g 的连续性知 h 也是连续函数. 由闭区间上连续函数的零点定理知, 必存在 $\theta_0 (0<\theta_0<\pi/2)$, 使 $h(\theta_0)=0$, 即 $f(\theta_0)=g$

(θ_0) .

最后,因为 $f(\theta_0) \cdot g(\theta_0) = 0$,所以 $f(\theta_0) = g(\theta_0) = 0$. 证毕.

1.3 关于数学建模竞赛的介绍

1.3.1 中国大学生数学建模竞赛简介

1. 数学建模竞赛的起源与历史

“全国大学生数学建模竞赛”从1992年开始每年举办一次,它是由教育部高等教育司与中国工业与应用数学学会共同举办的,是目前面向全国高等院校的一项规模最大的学生课外科技竞赛活动,目的在于激励学生学习数学的积极性,提高学生建立数学模型和运用计算机技术解决实际问题的综合能力,鼓励广大学生踊跃参加课外科技活动,开拓知识面,培养创造精神及合作意识,推动大学数学教学体系、教学内容和方法的改革. 2012年,来自全国33个省/市/自治区(包括香港和澳门特区)及新加坡、美国的1284所院校、21219个队(其中本科组17741队、专科组3478队)、63600多名大学生报名参加本项竞赛.

2. 数学建模竞赛出题的指导思想

传统的数学竞赛一般偏重理论知识,它要考查的内容单一,数据简单明确,不允许用计算机完成. 对此而言,数模竞赛题是一个“课题”,大部分都源于生产实际或者科学研究的过程中,它是一个综合性的问题,数据庞大,需要用计算机来完成. 其答案往往不是唯一的(数学模型是实际的模拟,是实际问题的近似表达,它的完成是在某种合理的假设下,因此其只能是较优的,不唯一的),呈报的成果是一篇论文. 由此可见“数模竞赛”偏重于应用,它是以数学知识为指导,计算机运用能力及文章的写作能力为辅的综合能力的竞赛.

大部分的数模竞赛题都是源于生产实际或者科学研究的过程中,例如,1995年“空中飞行管理”,1998年A题“投资的收益与风险”,B题“实情的巡视路线”,2001年C题“资金的使用计划”,D题“公交车的调度”.

3. 数学建模竞赛中的常见题型

赛题题型结构形式有三个基本组成部分:

1) 实际问题背景

涉及面宽,包括社会、经济、管理、生活、环境、自然现象、工程技术、现代科学中出现的新问题等,一般都有一个比较确切的现实问题.

2) 若干假设条件

有如下几种情况:

(1) 只有过程、规则等定性假设,无具体定量数据.

(2) 给出若干实测或统计数据.

(3) 给出若干参数或图形.

(4) 蕴涵着某些机动、可发挥的补充假设条件,或参赛者可以根据自己收集或模拟产生数据.

3) 要求回答的问题

往往有几个问题,而且一般不是唯一答案. 一般包含以下两部分:

(1) 比较确定的答案(基本答案).