21世纪高等学校规划教材

高等数学（下）
——实训教程

刘春凤 等 编著

清华大学出版社

21世纪高等学校规划教材

高等数学（下）
——实训教程

刘春凤　袁书娟　李冬梅　编著

清华大学出版社

内容简介

《高等数学》实训教程与《高等数学》基础教程互为姊妹篇。

《高等数学》基础教程作为课内“学数学”理论教学篇，《高等数学》实训教程用于课外“用数学”的实训教学篇。实训教程针对基础教程的每一章内容相对应地给出六个板块的补充和拓展：(1)知识网络图；(2)精品课堂；(3)达标实训；(4)拓展实训；(5)应用实训；(6)数学实验。本书是《高等数学》基础教程的拓展，两个教程内容协调一致，配合使用可实现课上与课下，课内与课外相辅相成。

本书内容丰富，逻辑清晰，通俗易懂，便于读者自学，可作为高等院校工学、经济学等各专业的辅助教材，也可作为报考工科研究生的参考书，并可供工程技术工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(下)——实训教程/刘春凤等编著. —北京：清华大学出版社，2013
21世纪高等学校规划教材
ISBN 978-7-302-33836-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 213138 号

责任编辑：魏江江 薛 阳
封面设计：常雪影
责任校对：梁 毅
责任印制：何 芊

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编：100084
社 总 机：010-62770175 邮 购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课 件 下 载：http://www.tup.com.cn，010-62795954
印 装 者：三河市李旗庄少明印装厂
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×260mm 印 张：22.75 字 数：570 千字
版 次：2013 年 11 月第 1 版 印 次：2013 年 11 月第 1 次印刷
印 数：1～3800
定 价：39.80 元

产品编号：054689-01

本书编委会

前言
FOREWORD

数学不仅是一些知识，也是一种素质，即数学素质；数学不仅是一种工具，也是一种思维，即理性思维；数学不仅是一门科学，也是一种文化，即数学文化。当今，人类进入信息时代，数学无声无息地走进人们的生活，引领科技的发展，把握社会的命脉，我们几乎所有的工作都与数学相关，追求科学的、可持续发展的工作目标，越来越多地需要数学的描述，需要使用数学工具进行定量分析，可以说信息时代本质上是数学时代，信息技术本质上是数字技术，使用数学的程度甚至成为衡量国家科学进步的主要标志。大学数学课程因其在培养大学生理性思维、计算能力，创新意识等方面具有不可替代的作用，而成为大学课程中最重要的公共必修课，因此学好数学既是学者进取之道，也是人生智慧之举。

我国从精英教育到大众化教育的转型，高等教育发生了一系列的变化，伴随着变化也产生了诸多前所未有的问题。几十年甚至上百年一贯制大学数学的教育问题首当其冲受到影响。尽管大学数学教学内容和课程体系改革方兴未艾，面向重点大学的具有新思路且含有数学实验的新教材陆续出现，对数学教学改革起到了推动和引领作用。然而对于普通院校，尤其对独立学院，由于缺乏与本校人才培养目标高度适应的新教材，选用教材时多倾向与重点大学保持一致，培养目标及学生的差异使普通院校呈现传授与接受的“脱节”，教师教的辛苦，学生学的艰难，有相当比例的学生“学不会，用不了”，教学效果事倍功半。

面对当前普通高校的大学数学教育，笔者认为张景中院士提出的教育数学的观点颇有启发。学数学好比吃核桃，核桃仁美味而富有营养，但要完整地砸开吃到它却非易事，“数学教育要研究的是如何砸核桃吃核桃，而教育数学要研究改良核桃的品种，让核桃更美味更营养，更容易砸开吃净。”为此，我们组织多年从事高等数学教学的一线教师，遵循教育部制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，立足普通高等院校应用型人才培养目标的需要，融入张景中院士“想的是教育，做的是数学”的思想，编写了高等数学系列教材。本套教材旨在让更多的学子在轻松学习高等数学知识的同时，掌握数学本质，培养数学素质，提高数学能力，感受数学魅力，自觉走进数学，自由享用数学。

高等数学系列教材包括《高等数学(上)——基础教程》、《高等数学(下)——基础教程》和《高等数学(上)——实训教程》、《高等数学(下)——实训教程》(以下分别简称《基础教程》和《实训教程》)，本套教材有以下三个显著特点：

(1) 调整结构，增加实训。新编《基础教程》上册包括微分学，空间解析几何，下册包括积分学、无穷级数和常微分方程。《基础教程》作为课内“学数学”理论教学篇，《实训教程》用于课外“用数学”的实训教学篇。《实训教程》由5个板块组成：知识网络图、精品课

堂、达标实训、拓展实训、应用实训和数学实验，它是《基础教程》的拓展，两个教程内容协调一致，配合使用可实现课上与课下，课内与课外相辅相成。

(2) 分层布局，梯次渐进。考虑到不同专业的学生对数学需求的差异，《基础教程》把传统的内容按照6个板块——内容初识、经典解析、概念反思、理论探究、方法纵横、应用欣赏进行了重新划分与整合。其中内容初识和经典解析为第一梯度，内容初识只限于介绍简单概念和基础知识，经典解析部分仅限于介绍最基础且经典的方法。这一梯度避开了抽象的概念和烦琐的计算，例如极限与连续的内容初识部分只描述极限概念而不精确刻画，避开“ε-N 语言”，经典解析极限方法仅介绍有理分式函数的极限，两个重要极限和无穷小代换法，力求使读者轻松入门。概念反思和理论探究为第二梯度，在读者对本章内容已有初步了解的基础上，进一步揭示概念的内涵，展开相关理论的推演和证明，强化学生对知识的深刻理解，培养学生的数学思维。方法纵横和应用欣赏为第三梯度，其中方法纵横部分将集中讲解本章难度较高和综合性较强的数学方法，例题的选择注意典型性、灵活性和可拓展性，有的选自全国数学竞赛试题，也有的选自考研真题。著名数学家和数学教育家项武义先生说：教数学，要教学生“运用之妙，存乎一心”，以不变应万变，不讲或少讲只能对付几个题目的“小巧”，要教给学生“大巧”，这个板块就是启发联想，夯实数学基本功，使学生通过引导探究渐入“无招胜有招”的境界，为学生继续深造奠定坚实的数学基础。应用欣赏旨在体现数学具有广泛应用性这一特点，但限于课程学时，高等数学的应用课堂难以细说，故在基础教程里仅举少许典型应用案例供读者欣赏，使读者学知所用。

(3) 融入实验，学以致用。长期以来，数学给一些人们的印象就是凭大脑、纸、笔进行推理、证明和计算，抽象的推理和繁琐的计算使一些学生对数学兴趣索然。计算机科技的迅速发展，优秀的数学软件为用数学方法解决复杂的实际问题提供了良好的平台，使数学教学如虎添翼，过去学生由于计算技术的局限只能“望洋兴叹”的问题，如今可以通过数学实验轻松解决，数学实验使数学计算变得轻松，数学形象变得直观，数学奥妙变得美丽，数学推理变得自然。引数学实验入大学数学教学是我们近十年的举措，本套教材嵌入的高等数学实验在实训教程中，这一部分的教与学教师可酌情安排。

本书由刘春凤教授、袁书娟、李冬梅编著，全书由刘春凤总体策划，闫焱、崔玉环负责组织，具体编写责任人为：彭亚绵(第7章)，李冬梅(第8章)，杨亚锋(第9章)，刘春凤(第10章)，张秋娜(第11章)，张永利(第12章)。教材融合了河北联合大学编写团队多年的教学经验，注重直观简约，对繁琐的理论推导进行了适度的约简，对数学的理论和概念，尽可能地通过几何直观，解释其抽象和深刻的内涵，内容由浅入深，梯次渐进，通俗易懂，既宜于教师因材分层讲授，也便于读者循序渐进自学。

本书得以出版，对河北联合大学教材编委会的指导与支持和清华大学出版社的精心设计和悉心编辑表示衷心感谢。

由于本书对高等数学内容调整幅度较大，前后呼应未必贴切，章节衔接未必自然，书中谬误之处难免，恳请读者批评指正。

编　者

2013年盛夏

目录

CONTENTS

第7章

不定积分

7.1 知识网络图

$F'(x)=f(x),\ \mathrm{d}F=f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C \Rightarrow$ 基本积分表（熟记！）

基本方法

- $\int[k_1f(x)+k_2f(x)]\mathrm{d}x=k_1\int f(x)\mathrm{d}x+k_2\int f(x)\,\mathrm{d}x$
- $\int f[g(x)]g'(x)\mathrm{d}x \xlongequal{u=g(x)} \int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C=F[g(x)]+C$
- $\int f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=h(t)} \int f[h(t)]h'(t)\mathrm{d}t \xlongequal{t=h^{-1}(x)} F[h^{-1}(x)]+C$
- $\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)\mathrm{d}x$（$u$和$v'$选取原则：反对幂三指）

三角函数积分

$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$	令$\tan\frac{x}{2}=u$	（万能换元）
	令$\cos x=u$	$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$
	令$\sin x=u$	$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$
	令$\tan x=u$	$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$
$\int\sin^n x\cos^m x\mathrm{d}x$	倍角、半角公式	m,n同为偶数
	凑微分	m,n至少有一个奇数

特殊函数积分

$\int\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\mathrm{d}x$	化为多项式和基本型部分分式之后
$\int\frac{(mx+n)\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$	把分子变形为 $\mathrm{d}(ax^2+bx+c)+k\mathrm{d}x$
$\int f(x,\sqrt[n]{ax+b})\mathrm{d}x$	令$\sqrt[n]{ax+b}=t$化为有理分式积分
$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+ax+b}}$	x^2+ax+b 配方，然后换元去掉根号
$\int\frac{mx+n}{\sqrt{x^2+ax+b}}\mathrm{d}x$	$mx+n$ 化为$2x+a+k$

7.2 精品课堂

精品课堂

不定积分解题方略

不定积分的主要题型

积分方法

基本型：
- 正则型 → 直接积分法
- 代换型 → 代换规则
- 分项型 → 分项积分规则
- 乘积型 → 分部积分规则

应用型：
- 有理分式 → 分项积分规则
- 三角有理式 → 三角代换规则
- 无理式 → 无理代换规则

不定积分解题方略

1 不定积分的主要题型

2 不定积分的解题方略

不定积分解题方略

2. 不定积分的解题方略

不定积分解题方略

1. 不定积分的主要题型

基本积分表的记忆与拓展

① $\int k\mathrm{d}x = kx + C$ (k是常数);

NEXT $\int 0\mathrm{d}x = C$

② $\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C = \dfrac{x\ x^{\mu}}{\mu+1} + C$ ($\mu \neq -1$);

NEXT $\int \dfrac{1}{x^{\beta}}\mathrm{d}x = \int x^{-\beta}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{-\beta+1}\dfrac{x}{x^{\beta}} + C$

练习

$\int \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ $\int \dfrac{1}{x^5}\mathrm{d}x$

多一个x加个1

NEXT $\int x^{\frac{m}{n}}\mathrm{d}x=\frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}+C=\frac{n}{n+m}x\,x^{\frac{m}{n}}+C$

练习 $\int x^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x$　$\int x^{\frac{9}{8}}\mathrm{d}x$　$\int x^{\frac{99}{100}}\mathrm{d}x$

NEXT $\int\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}\mathrm{d}x=\int x^{-\frac{m}{n}}\mathrm{d}x=\frac{x^{-\frac{m}{n}+1}}{-\frac{m}{n}+1}+C=\frac{n}{n-m}\frac{x}{x^{\frac{m}{n}}}+C$

练习 $\int\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x$　$\int\frac{1}{x^{\frac{9}{8}}}\mathrm{d}x$

② $\int x^{\mu}\mathrm{d}x=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C\quad(\mu\neq-1)$;

$\int\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

$\int\sqrt[3]{x}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C$

$\int\sqrt[4]{x}\mathrm{d}x=\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}+C$

…

$\int\sqrt[n]{x}\mathrm{d}x=\frac{n}{n+1}x\sqrt[n]{x}+C$

练习

$\int\sqrt[30]{x}\mathrm{d}x=$

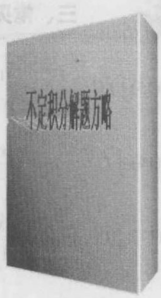
$\int\sqrt[10]{x}\mathrm{d}x=$

$\int\sqrt[100]{x}\mathrm{d}x=$

多一个x加个1

凑微分形式

常用的



二、常见的凑微分形式

(1) $\int f(ax^n+b)x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{na}\int f(ax^n+b)\mathrm{d}(ax^n+b)$

思考与联想

$\int(2+3x)^5\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int(2+3x)^5\mathrm{d}(2+3x)=\frac{1}{3}\int u^5\mathrm{d}u$

$\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int\sin\sqrt{x}\mathrm{d}\sqrt{x}=2\int\sin u\mathrm{d}u$

$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-2x}}=\frac{1}{-2}\int\frac{\mathrm{d}(3-2x)}{\sqrt{3-2x}}=\frac{1}{-2}\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}}$

二、常见的凑微分形式

(1) $\int f(ax^n+b)x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{na}\int f(ax^n+b)\mathrm{d}(ax^n+b)$

思考与联想

$\int(ax+b)^{n-1}\mathrm{d}x$

$\int\mathrm{e}^{2x+3}\mathrm{d}x$

$\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}(1+x^2)$

二、常见的凑微分形式

(1) $\int f(ax^n+b)x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{na}\int f(ax^n+b)\mathrm{d}(ax^n+b)$

思考与联想

$\int\frac{3x^2}{1-x^3}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{1-x^3}\mathrm{d}(-x^3)$

$\int\frac{x}{9+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{9+x^4}\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}\int\frac{1}{a^2+u^2}\mathrm{d}(u)$

$\int\frac{x^3}{3+x}\mathrm{d}x=\int\frac{x^3-3^3+3^3}{3+x}\mathrm{d}x$

二、常见的凑微分形式

(2) $\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$

$\int\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x+x}\mathrm{d}x$　$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$　$\int\frac{1}{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$

$\int\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-4}\mathrm{d}x$　$\int\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$　$\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

$\int\mathrm{e}^x\cos\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$　$\int\frac{1}{2\mathrm{e}^{-x}+1}\mathrm{d}x$

二、常见的凑微分形式

(3) $\int f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\int-f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$

$\int\frac{\arctan\frac{1}{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$

二、常见的凑微分形式

(4) $\int f(\ln x)\frac{dx}{x}=\int f(\ln x)d(\ln x)$

$\int\frac{1}{x\ln x}dx$ $\qquad$ $\int\frac{1-\ln x}{x}dx$

$\int\frac{1}{x\ln x\ln\ln x}dx$ $\qquad$ $\int\frac{dx}{x\ln^2 x}$

$\int\frac{1}{x\ln x\ln\ln x\ln\ln\ln x}dx$ $\qquad$ $\int\frac{1}{x(1+2\ln x)}dx$

$\int\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}dx$

凑微分法之峰

二、常见的凑微分形式

(5) $\int f(\sqrt{x})\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\int f(\sqrt{x})d(\sqrt{x})$

$\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$ $\qquad$ $\int\frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}dx$

$\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

$\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

三、常见的凑微分形式

(12) $\int f(\sin^2 x)\sin 2x dx=\int f(\sin^2 x)d(\sin^2 x)$

$\int f(\cos^2 x)\sin 2x dx=-\int f(\cos^2 x)d(\cos^2 x)$

(13) $\int f(x\ln x)(1+\ln x)dx=\int f(x\ln x)d(x\ln x)$

(14) $\int f(x^x)x^x(1+\ln x)dx=\int f(x^x)d(x^x)$

二、常见的凑微分形式

(6) $\int f(\sin x)\cos x dx=\int f(\sin x)d(\sin x)$

(7) $\int f(\cos x)\sin x dx=-\int f(\cos x)d(\cos x)$

(8) $\int f(\tan x)\sec^2 x dx=\int f(\tan x)d(\tan x)$

(9) $\int f(\cot x)\csc^2 x dx=-\int f(\cot x)d(\cot x)$

三、常见的凑微分形式

(15) $\int f(1\mp\frac{1}{x^2})(1\pm\frac{1}{x^2})dx=\int f(1\mp\frac{1}{x^2})d(x\mp\frac{1}{x})$

(16) $\int f(\frac{\ln x}{x})\frac{1-\ln x}{x^2}dx=\int f(\frac{\ln x}{x})d(\frac{\ln x}{x})$

(17) $\int f(\sqrt{1+x^2})\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}=\int f(\sqrt{1+x^2})d\sqrt{1+x^2}$

三、常见的凑微分形式

(10) $\int\frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int f(\arcsin x)d(\arcsin x)$

(11) $\int\frac{f(\arctan x)}{1+x^2}dx=\int f(\arctan x)d(\arctan x)$

$\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

$\int\frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$

例1 求 $\int\frac{1}{x^2-8x+25}dx$

解 $\int\frac{1}{x^2-8x+25}dx=\int\frac{1}{(x-4)^2+9}dx$

例2 求 $\int(1-\frac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}dx$

解 因为 $\left(x+\frac{1}{x}\right)'=1-\frac{1}{x^2}$,

所以 $\int(1-\frac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}dx=\int e^{x+\frac{1}{x}}d(x+\frac{1}{x})$

例3 求 $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}\arcsin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}\arcsin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\arcsin\frac{x}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)$

$= \int \frac{1}{\arcsin\frac{x}{2}}\mathrm{d}(\arcsin\frac{x}{2}) = \ln\arcsin\frac{x}{2} + C.$

例4 $I = \int \frac{\ln 2x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x$

提示

$I = \int \frac{\ln 2 + \ln x}{\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}\ln x = \int \frac{1+\ln x + \ln 2 - 1}{\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}(\ln x + 1)$

$= \int (1+\ln x)^{1/2}\mathrm{d}(1+\ln x) + (\ln 2 - 1)\int (1+\ln x)^{-1/2}\mathrm{d}(1+\ln x)$

$\xrightarrow{u=1+\ln x} \int \sqrt{u}\mathrm{d}u + (\ln 2 - 1)\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}}$

例5 $\int \frac{\cos x - \sin x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x$

提示

$I = \int \frac{2(\cos x - \sin x)}{1+1+2\sin x\cos x}dx = 2\int \frac{\mathrm{d}(\cos x + \sin x)}{1+(\sin x + \cos x)^2}$

例6 $I = \int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x$

提示

$I \xrightarrow{\text{分子分母同除以}x^2} \int \frac{\frac{1-\ln x}{x^2}}{\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^2}\mathrm{d}x$

$\xrightarrow{u=\frac{\ln x}{x}} \int \frac{1}{(1-u)^2}\mathrm{d}u$

例7 $\int \frac{\cos 2x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x$

提示

$(\sin x\cos x)' = \cos 2x$

$I = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x\cos x)}{1+\sin x\cos x} \xrightarrow{u=\sin x\cos x} \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u}$

例8 $\int \sqrt{(x^2+x)\mathrm{e}^x}(x^2+3x+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

提示

$[(x^2+x)\mathrm{e}^x]' = (x^2+3x+1)\mathrm{e}^x$

$\int \sqrt{(x^2+x)\mathrm{e}^x}(x^2+3x+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

$\xrightarrow{u=(x^2+x)\mathrm{e}^x} \int \sqrt{u}\mathrm{d}u$

例9 $\int (x\ln x)^{\frac{3}{2}}(\ln x + 1)\mathrm{d}x$

提示

$(x\ln x)' = \ln x + 1$

$\int (x\ln x)^{\frac{3}{2}}(\ln x + 1)\mathrm{d}x \xrightarrow{u=x\ln x} \int u^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}u$

例10 $\int \frac{\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

提示

$[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5]' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$I = \xrightarrow{u=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5} \int \sqrt{u}\mathrm{d}u$

例11 $\int \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x\cos x}(\cos x - \sin x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

提示

$(\mathrm{e}^x\cos x)' = \mathrm{e}^x(\cos x - \sin x)$

$\int \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x\cos x}(\cos x - \sin x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x \xrightarrow{u=\mathrm{e}^x\cos x} \int \mathrm{e}^u\mathrm{d}u$

例12 $\int \frac{\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

提示

$I = \xrightarrow{u=\ln(x+\sqrt{1+x^2})} \int u^2\mathrm{d}u$

$u' = [\ln(x+\sqrt{1+x^2})]' = 1/\sqrt{1+x^2}$

例13 $\int \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x(x+1)}\mathrm{d}x$

提示

$I = \int \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{(1+\frac{1}{x})x^2}\mathrm{d}x = -\int \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{1+\frac{1}{x}}\mathrm{d}(1+\frac{1}{x}) \xrightarrow{u=1+\frac{1}{x}} \int \frac{\ln u}{u}\mathrm{d}u$

例14 $I = \int \frac{1}{(1-x)^2}\tan^2\frac{x}{1-x}\mathrm{d}x$

提示

$I = \int \tan^2\frac{x}{1-x}\mathrm{d}(\frac{x}{1-x}) \xrightarrow{u=\frac{x}{1-x}} \int (\sec^2 u - 1)\mathrm{d}u$

例15 $I = \int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x$

提示

$I = \int \frac{\frac{1-\ln x}{x^2}}{(1-\frac{\ln x}{x})^2}\mathrm{d}x \xrightarrow{(\frac{\ln x}{x})' = \frac{1-\ln x}{x^2}} \int \frac{\mathrm{d}(\frac{\ln x}{x})}{(1-\frac{\ln x}{x})^2}$

$= \xrightarrow{u=\frac{\ln x}{x}} \int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u)^2}$

例16 求$I=\int(x\ln x)^{\frac{3}{2}}(\ln x+1)\mathrm{d}x$

提示

$$I\xrightarrow{(x\ln x)'=1+\ln x}\int(x\ln x)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}(x\ln x)\xrightarrow{u=x\ln x}\int u^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}u$$

例17 $I=\int\frac{e^{\sin x}\sin^2 x}{e^{2x}}\mathrm{d}x$

提示

$$I=\int e^{\sin 2x-2x}\sin^2 x\mathrm{d}x$$

$$(\sin 2x-2x)'=2\cos 2x-2=-4\sin^2 x$$

$$I=\int e^{\sin 2x-2x}\sin^2 x\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\int e^{\sin 2x-2x}\mathrm{d}(\sin 2x-2x)$$

$$\xrightarrow{u=\sin 2x-2x}-\frac{1}{4}\int e^{u}\mathrm{d}u$$

收藏夹

- 复杂的凑微分形式：

(1) $\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}\ln(1+x^2)$

(2) $(1-\frac{1}{x^2})\mathrm{d}x=\mathrm{d}(x+\frac{1}{x})$

(3) $\frac{1-\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{\ln x}{x}\right)$

(4) $\frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=-\mathrm{d}\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

(5) $\frac{x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$

例18 求$I=\int\frac{\ln x+2}{x\ln x(1+\boxed{x\ln^2 x})}\mathrm{d}x$。

提示

因为$(x\ln^2 x)'=\ln^2 x+2\ln x=\ln x(\ln x+2)$

所以$I=\int\frac{\ln x(\ln x+2)}{x\ln^2 x(1+x\ln^2 x)}\mathrm{d}x\xrightarrow{u=x\ln^2 x}\int\frac{\mathrm{d}u}{u(1+u)}$

例19 $I=\int e^{2x}(\tan x+1)^2\mathrm{d}x$

提示

$$=\int e^{2x}(\tan^2 x+1+2\tan x)\mathrm{d}x=\int e^{2x}(\sec^2 x+2\tan x)\mathrm{d}x$$

$$=\int(e^{2x}\mathrm{d}\tan x+\tan x\mathrm{d}e^{2x})=\int\mathrm{d}(e^{2x}\tan x)=e^{2x}\tan x+C$$

收藏夹

(6) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

(7) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sqrt{1+x^2})$

(8) $(1+\ln x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}(x\ln x)$

(9) $e^x(1+x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}(xe^x)$

(10) $(\sin x+x\cos x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}(x\sin x)$

(11) $(\cos x-x\sin x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}(x\cos x)$

(12) $(e^x+e^{-x})\mathrm{d}x=\mathrm{d}(e^x-e^{-x})$

例20 求$I=\int\frac{\cos^2 x-\sin x}{\cos x(1+\cos xe^{\sin x})}\mathrm{d}x$。

提示

$$(\cos xe^{\sin x})'=e^{\sin x}(\cos^2 x-\sin x)$$

$$I=\int\frac{e^{\sin x}(\cos^2 x-\sin x)}{e^{\sin x}\cos x(1+\cos xe^{\sin x})}\mathrm{d}x\xrightarrow{u=\cos xe^{\sin x}}\int\frac{\mathrm{d}u}{u(1+u)}$$

例21 求$\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x$。

提示

$$(x-\frac{1}{x})'=1+\frac{1}{x^2}$$

$$\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{(x-\frac{1}{x})^2+2}\mathrm{d}x\xrightarrow{u=x-\frac{1}{x}}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+2}$$

收藏夹

(13) $\sin 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin^2 x)=-\mathrm{d}(\cos^2 x)$

(14) $\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\mathrm{d}(2x-\sin 2x)$

(15) $\cos^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\mathrm{d}(2x+\sin 2x)$

(16) $\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\ln\tan\frac{x}{2}\right)$

(17) $\cot x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\ln\sin x)$

(18) $\tan x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}(\ln\cos x)$

联想： 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$。

解： 原式$=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4+1}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x$$

注意本题技巧
按常规方法较繁

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right|+C\ (x\neq 0)$$

分部积分法

分部积分法

原理 $\int uv'\mathrm{d}x=\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u.$

分部积分法适用于以下几种类型

1. $\int \boxed{P(x)}\sin x\mathrm{d}x$ 或 $\int \boxed{P(x)}\cos x\mathrm{d}x$
2. $\int \boxed{P(x)}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$
3. $\int Q(x)\boxed{\ln x}\mathrm{d}x$
4. $\int Q(x)\boxed{\arcsin x}\mathrm{d}x$ 或 $\int Q(x)\boxed{\arctan}\mathrm{d}x$
5. $\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x$ 或 $\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x$

习题浏览

$\int(\arcsin x)^2\mathrm{d}x$　　$\int\frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x$

$\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$　　$\int\frac{\ln^3 x}{x^3}\mathrm{d}x$

$\int\frac{\ln\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$　　$\int\frac{\arcsin x\mathrm{e}^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$\int\frac{x\cos x}{\sin^3 x}\mathrm{d}x$　　$\int\cos\sqrt{x}\mathrm{d}x$

分部积分速算法

$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x \longrightarrow \int u(x)\mathrm{d}v(x)$

思路

微分列		积分列
$u(x)$	+	$v'(x)$
$u'(x)$	-	$v(x)$
$u''(x)$	+	$\int v(x)\mathrm{d}x$
$\vdots$		$\vdots$
0		$\int\cdots\int v(x)\mathrm{d}x$

结束

例22 求积分 $\int x\arctan x\mathrm{d}x$

提示

选 $u=\arctan x, v'=x$

微分列		积分列
$\arctan x$		x
$\frac{1}{1+x^2}$		$\frac{1}{2}x^2$
调整线		$\frac{x^2}{2(1+x^2)}$
1	−	$\frac{1}{2}(x-\arctan x)$
0		

结束

$$\int x\arctan\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}(x-\arctan x)+C$$

习题浏览

$\int x\cos x\mathrm{d}x$　　$\int\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$

$\int\ln x\mathrm{d}x$　　$\int x^2\arctan x\mathrm{d}x$

$\int\ln^2 x\mathrm{d}x$

$\int x^2\mathrm{e}^{4x}\mathrm{d}x$　　$\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

例23 $\int\frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

提示

选 $u=\arctan x, v'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

微分列		积分列
$\arctan x$	+	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
$\frac{1}{1+x^2}$		$\sqrt{1+x^2}$
调整线		$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
1		$\ln(x+\sqrt{1+x^2})$
0		

结束

$$\int\ln(x^2+1)\mathrm{d}x=\sqrt{1+x^2}\arctan x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$$

习题浏览

$\int\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$　　$\int\frac{\ln(\ln x)}{x}\mathrm{d}x$

$\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x$　　$\int\mathrm{e}^{3x}\cos 2x\mathrm{d}x$

$\int\left(x^2+1\right)\sin x\mathrm{d}x$

例24 $\int\frac{x^2\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x$　选 $u=x^2\mathrm{e}^x, v'=\frac{1}{(x+2)^2}$

提示

微分列		积分列
		$\frac{1}{(x+2)^2}$
$x^2\mathrm{e}^x$	+	$-\frac{1}{x+2}$
$\mathrm{e}^x(x^2+2x)$		调整线
x	−	$-\mathrm{e}^x$
1	+	$-\mathrm{e}^x$
0		$-\mathrm{e}^x$

$$\int\frac{x^2\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x=-\frac{x^2\mathrm{e}^x}{x+2}+x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C$$

结束

例25

$$\int\frac{\arctan e^{x}}{e^{2x}}dx$$

提示

$$I=-\frac{1}{2}\int\arctan e^{x}de^{-2x}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[e^{-2x}\arctan e^{x}-\int\frac{de^{x}}{e^{2x}(1+e^{2x})}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[e^{-2x}\arctan e^{x}-\int(\frac{1}{e^{2x}}-\frac{1}{1+e^{2x}})de^{x}\right]$$

三角有理积分

三角有理式的定义

由三角函数和常数经过有限次四则运算构成的函数称为三角有理函数．由于各种三角函数都可用$\sin x$、$\cos x$ 的有理式表示，故三角函数有理式也就是$\sin x$ 、$\cos x$的有理式，一般记为

$$R(\sin x,\cos x)$$

奇偶三角有理函数的定义

$$f(-\sin x,\cos x)=-f(\sin x,\cos x)$$

称$f(x)$为$\sin x$的奇函数。

约定记号：$\int R^{(奇正弦)}(\sin x,\cos x)dx$

$$f(\sin x,-\cos x)=-f(\sin x,\cos x)$$

称$f(x)$为$\cos x$的奇函数。

约定记号：$\int R^{(奇余弦)}(\sin x,\cos x)dx$

$$f(-\sin x,-\cos x)=f(\sin x,\cos x)$$

$$\int R^{(双偶)}(\sin x,\cos x)dx$$

约定记号：$\int R^{(双偶)}(\sin x,\cos x)dx$

常见的三角有理函数积分类型

1. $\int f(\sin x)\cos x dx$
2. $\int f(\cos x)\sin x dx$
3. $\int f(\tan x)\sec^2 x dx$
4. $\int f(\cot x)\csc^2 x dx$
5. $\int \sin^n x\cos^m x dx$
6. $\int \sin mx\cos nx dx$
7. $\int\frac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}dx$
8. $\int R(\sin x,\cos x)dx$
9. $\int R^{(奇正弦)}(\sin x,\cos x)dx$
10. $\int R^{(奇余弦)}(\sin x,\cos x)dx$
11. $\int R^{(双偶)}(\sin x,\cos x)dx$

三角有理函数积分方法解析

1. $\int f(\sin x)\cos x dx$
2. $\int f(\cos x)\sin x dx$

思考与联想

$$\int\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$$

$$\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$$

$$\int\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$$

三角有理函数积分方法解析

3. $\int f(\tan x)\sec^2 x dx$
4. $\int f(\cot x)\csc^2 x dx$

思考与联想 $\int\sin^2 x\cdot\cos^5 x dx$

解析

$$\int\sin^2 x\cdot\cos^5 x dx=\int\sin^2 x\cdot\cos^4 x d(\sin x)$$

$$=\int\sin^2 x\cdot(1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)$$

例26 求 $\int\cos^4 x dx$。

提示

$$\because \cos^4 x=(\cos^2 x)^2=(\frac{1+\cos 2x}{2})^2$$

$$=\frac{1}{4}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)$$

$$=\frac{1}{4}(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2})$$

$$=\frac{1}{4}(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x)$$

$$\therefore \int\cos^4 x dx=\frac{1}{4}\int(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x)dx$$

$$=\frac{1}{4}[\frac{3}{2}\int dx+\int\cos 2x d(2x)+\frac{1}{8}\int\cos 4x d(4x)]$$

$$=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$$

请证明并收藏公式

$$I=\int\frac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}\mathrm{d}x$$

$$I=Ax+B\ln|c\sin x+d\cos x|+C$$

$$A=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\qquad B=-\frac{ad-bc}{c^2+d^2}$$

1.万能代换 $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$

代换步骤

令$u=\tan\frac{x}{2}$ $x=2\arctan u$

$$\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\quad \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\quad \mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{2u}{1+u^2},\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

例27 求 $I=\int\frac{\sin x}{\sin x-\cos x}\mathrm{d}x$。

提示

$$I=Ax+B\ln|\sin x-\cos x|+C$$

$$A=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}=\frac{1}{1^2+(-1)^2}=\frac{1}{2}$$

$$B=-\frac{ad-bc}{c^2+d^2}=\frac{1}{1^2+(-1)^2}=\frac{1}{2}$$

例29 求 $I=\int\frac{\cot x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$。

提示

令 $\sin x=u$

$$I=\int\frac{1}{u(1+u)}\mathrm{d}u=\ln\left|\frac{\sin x}{1+\sin x}\right|+C$$

例30 求 $I=\int\frac{1}{\sin^3 x\cos x}\mathrm{d}x$。

提示

令 $\tan x=u$

$$I=\int\frac{1+u^2}{u^3}\mathrm{d}u=-\frac{1}{2}\cot^2 x+\ln|\tan x|+C$$

三角有理函数积分方法解析

9 $\int R^{(奇正弦)}(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$ 令$\cos x=u$

10 $\int R^{(奇余弦)}(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$ 令$\sin x=u$

11 $\int R^{(双偶)}(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$ 令$\tan x=u$

三角有理式

$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x \Longrightarrow$ 一般方法 令$\tan\frac{x}{2}=u$

$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$

- $\Longrightarrow R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ 令$\cos x=u$
- $\Longrightarrow R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ 令$\sin x=u$
- $\Longrightarrow R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$ 令$\tan x=u$

$\int\sin^n x\cos^m x\mathrm{d}x \Longrightarrow$ m,n同为偶数，用倍角，半角公式；m,n有一个为奇数，可直接凑微分

$\int\sin mx\cos nx\mathrm{d}x \Longrightarrow$ 积化和差

$\int\frac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}\mathrm{d}x \Longrightarrow \frac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}=A+B\frac{(c\sin x+d\cos x)'}{c\sin x+d\cos x}$

这里 $A=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}$ $B=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$

$\int\frac{R(\sin x,\cos x)}{1\pm\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{R(\sin x,\cos x)(1\mp\sin x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$ $(1\pm\cos x)$类似

例28 求 $I=\int\frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\mathrm{d}x$。

提示

令 $\cos x=u$

$$I=\int\frac{\mathrm{d}u}{(u+2)(u-1)(u+1)}$$

$$=\int\left(\frac{\frac{1}{3}}{u+2}+\frac{\frac{1}{6}}{u-1}+\frac{\frac{-1}{2}}{u+1}\right)\mathrm{d}u$$

例31 求 $I=\int\frac{1}{\sin^3 x\cos^5 x}\mathrm{d}x$。

提示

$R(-\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ 令 $\tan x=u$

$$I=\int\frac{(1+u^2)^3}{u^3}\mathrm{d}u=\int\left(\frac{1}{u^3}+\frac{3}{u}+3u+u^3\right)\mathrm{d}u$$

例32 求 $I=\int\frac{1}{\sin 2x+2\sin x}\mathrm{d}x$。

提示

$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ 令 $\cos x=u$

$$I=\int\frac{1}{2\cos x\sin x+2\sin x}\mathrm{d}x\xrightarrow{u=\cos x}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2)(u+1)}$$