大学数学系列教材

Mathematics

概率论与数理统计

贺勇 明杰秀 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

大 学 数 学 系 列 教

Mathematics

概率论与数理统计

贺 勇 明杰秀 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/贺勇，明杰秀编著．—武汉：武汉大学出版社，2012.8

大学数学系列教材

ISBN 978-7-307-10102-9

Ⅰ.概… Ⅱ.①贺… ②明… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材 ②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 198748 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:黄添生　　版式设计:马　佳

出版发行：武汉大学出版社　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件：cbs22@whu.edu.cn　网址：www.wdp.com.cn)

印刷：湖北睿智印务有限公司

开本：720×1000　1/16　印张:21.5　字数:383 千字　插页:1

版次:2012 年 8 月第 1 版　2012 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-307-10102-9/O·478　定价:29.00 元

序 言

概率论与数理统计是高等院校工科、理科及经管类专业的一门十分重要的基础课程。这不仅是因为它在各个领域中应用具有广泛性，而且从人才素质的全面培养来说，这门课程也是必不可少的。为此，我们在吸收国内外同类教材优点的基础上，结合自己多年的教学经验，并根据教育部“概率论与数理统计教学基本要求”，同时也考虑到独立学院学生数学基础，编写了这本突出应用性特点的教材。

本书有以下几个特色。

第一，突出概率论与数理统计的基本思想和基本方法。突出基本思想和基本方法的目的在于，让学生在学习过程中较好地了解各部分内容的内在联系，从总体上把握概率论与数理统计的基本方法，帮助学生掌握基本概念，理解概念之间的联系，提高教学效果。本书在教学理念上不过分强调理论的严密论证和研究过程，而更多的是让学生体会概率论与数理统计的本质及其价值。

第二，加强基本能力培养。本书的例题、习题较多，除每节有紧扣该节内容的习题外，每章还配有综合练习，习题的配置注意到知识点的覆盖面及习题的多样性，可以照顾到数学基础和能力不同的学生，总习题中收集了近年来的考研题。本书在解题方法上有较深入的论述，其用意就是让学生在掌握基本概念的基础上，熟练运用过程，精通解题技巧，最后达到加快运算速度、提高解题能力的目的。

第三，贴近工程实际应用。本书基本概念的叙述，力求从身边的实际问题出发，自然地引出。例题和习题多采用一些在客观世界，即自然科学、工程技术领域、经济管理领域和日常生活中经常遇到的现实问题，希望以此来提高学生学习概率论与数理统计的兴趣和利用概率论与数理统计知识解决实际问题的能力。

本书由贺勇和明杰秀共同编写，具体分工如下：第 1 章至第 4 章由武汉东湖学院的贺勇编写，第 5 章至第 8 章由武汉东湖学院的明杰秀编写，最后贺勇负责统稿、校对。在本书的编写过程中，武汉东湖学院高等数学教研室

的黄象鼎、魏克让、张选群教授仔细审阅了书稿，提出了很多宝贵的意见和建议，在此感谢他们为本书所付出的劳动，同时武汉东湖学院教务处的领导、武汉大学出版社的领导及编辑对本书的出版给予了大力支持和热情帮助，编者在此对他们表示衷心的感谢。

本教材可作为独立学院经济管理类本、专科专业的教学用书（参考学时为 48～54 学时），也可作为普通高等院校工科专业少学时、专科的公共基础课教材。

由于编者水平有限，书中难免有若干缺点和错误，敬请同行、读者批评指正。

贺勇　明杰秀

2012 年 5 月

目　录

第一章

随机事件与概率

概率论与数理统计是经管类各专业的基础课，其中，概率论研究随机现象的统计规律性，是本课程的理论基础，数理统计则从应用角度研究如何处理随机数据，建立有效的统计方法，进行统计推断，是本课程的应用部分. 本章重点介绍概率论的两个基本概念：随机事件及其概率，主要内容包括：随机事件和随机事件的概率的定义、古典概型与几何概型、条件概率与乘法公式、事件的独立性、全概率公式与贝叶斯公式.

1.1 随机事件及其运算

1.1.1 随机现象

自然界和社会生活中发生的现象可以分为两类，一类是在一定条件下必然发生或必然不发生的现象，称为**确定性现象**. 例如，带同种电荷的两个小球必互相排斥；一物体从高为 h（米）处垂直下落，必然在$\sqrt{\frac{2h}{g}}$秒后落到地面. 另一类是在一定条件下无法准确预知其结果的现象，例如，投掷一枚硬币，将出现正面还是反面呢？明天会下雨吗？某种股票明天价格是多少呢？电视机价格在近期是否会下调？这类现象称为**随机现象**.

1.1.2 随机事件和样本空间

如果一个试验在相同条件下可以重复进行，而每次试验的可能结果不止一个，但在进行一次试验之前却不能断言它出现哪个结果，则称这种试验为**随机试验**，简称为**试验**，通常用字母 E 表示. 试验的可能结果称为**随机事件**，

简称为**事件**，通常用大写字母表示 $A,B,C,\cdots$ 表示.

例如，掷一枚硬币，出现正面及出现反面；掷一颗骰子，出现“1”点、“5”点和出现偶数点都是随机事件；电话接线员在上午 9 时到 10 时接到的电话呼唤次数(泊松分布)；对某一目标发射一发炮弹，弹着点到目标的距离为 0.1 米、0.5 米及 1 米到 3 米之间都是随机事件(正态分布).

随机试验的每一个可能出现的结果，叫**基本事件**，也叫**样本点**，用 ω 来表示，基本事件(样本点)的全体，称为试验的**样本空间**，用 Ω 表示. 样本空间就是样本点的集合，样本空间中的元素就是随机试验的每个结果. 例如，掷一次骰子，$\omega_i=\{$出现 i 点$\}$，$i=1,2,3,4,5,6$，是基本事件，或叫样本点，样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. 随机试验的两个及其以上的可能结果叫**复杂事件**，例如，掷一次骰子，$A=$“出现偶数点”$=\{2,4,6\}$ 就是复杂事件. 随机事件是由某些样本点(基本事件 ω) 构成的集合，它们是 Ω 的子集.

每次试验只可能出现所有可能结果中的一种，在试验中，当事件中的某一个样本点出现时，就称**这一事件发生**. 例如，掷一次骰子，当掷的结果为 4 点时，$A=$“出现偶数点”$=\{2,4,6\}$ 这个事件就发生.

另外，我们应该还要注意到两个特殊的事件. 一是必然事件. 在一次试验中，一定出现的事件，叫**必然事件**，习惯上用 Ω 表示必然事件. 例如，掷一次骰子，点数 $\leqslant 6$ 的事件一定出现，它是必然事件. 另一是不可能事件. 在一次试验中，一定不出现的事件叫**不可能事件**，而习惯上用 $\varnothing$ 表示不可能事件. 例如，掷一次骰子，点数 >6 的事件一定不出现，它是不可能事件.

注 必然事件与不可能事件原不是随机事件，但为讨论问题需要，人们将其看成是随机事件的两种极端形式，且在概率论中起着重要的作用.

1.1.3 随机事件的关系与运算

下面讨论事件间的关系及事件的运算，先讨论两个事件 A 与 B 之间的关系.

1. 事件间的关系

事件的包含 若事件 A 发生则必然导致事件 B 发生，则说事件 B 包含事件 A，记为 $A\subset B$，如图 1-1 所示. 例如，掷一次骰子，A 表示掷出的点数 $\leqslant 2$，B 表示掷出的点数 $\leqslant 3$，于是

$$A=\{1,2\},\quad B=\{1,2,3\}.$$

所以 A 发生则必然导致 B 发生，即 $A\subset B$. 显然有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

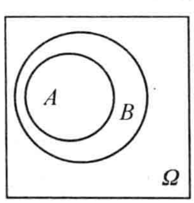


图 1-1

事件的相等　若 $A \subset B$，且 $B \subset A$，就记 $A=B$，即 A 与 B 相等，事件 A 等于事件 B，表示 A 与 B 实际上是同一事件.

互不相容　若事件 A 与事件 B 不能都发生，就说事件 A 与事件 B 互不相容(或互斥). 例如，掷一次骰子，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{2,4\}$，则 A 与 B 互不相容.

互补(或对立)　若事件 A 与事件 B 不能都发生，且事件 A 与事件 B 不能都不发生，就说事件 A 与事件 B 互补(或对立). 例如，掷一次骰子，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{2,4,6\}$，则 A 与 B 互补(或对立).

2. 事件间的运算

并事件(和事件)　事件 A 与事件 B 中至少有一个发生的事件叫事件 A 与事件 B 的和事件，它是由 A,B 中所有的样本点(相同的只记一次)组成的事件，记为 $A \cup B$ 或 $A+B$，即

$$A \cup B=\{A,B\text{ 至少有一个发生}\},$$

如图 1-2 阴影部分所示. 例如，掷一次骰子，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{1,2,3\}$，则并事件 $A \cup B=\{1,2,3,5\}$.

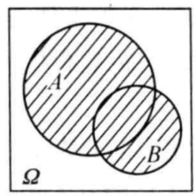


图 1-2

交事件(积事件)　事件 A 与事件 B 同时发生的事件叫事件 A 与事件 B 的交事件，它是由 A,B 中公共的样本点组成的事件，记为 AB 或 $A \cap B$，即

$$A \cap B=\{A,B\text{ 同时发生}\},$$

如图 1-3 阴影部分所示. 例如，掷一次骰子，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{1,2,3\}$，则

$$AB=\{1,3\}.$$

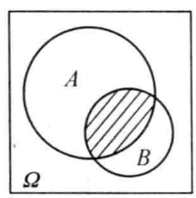


图 1-3

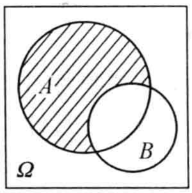
事件的并与交运算可推广到有限个或可列个事件，譬如有一列事件 A_1，A_2，…，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 称为**有限并**，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 称为**可列并**，$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 称为**有限交**，$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 称为**可列交**.

差事件　事件 A 发生且事件 B 不发生的事件叫事件 A 与事件 B 的差事件，它是由事件 A 中而不在 B 中的样本点组成的事件，记为 $A\backslash B$ 或 $A-B$，即

$$A\backslash B=\{A\text{ 发生且 }B\text{ 不发生}\},$$

如图 1-4 阴影部分所示. 例如，掷一次骰子，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{1,2,3\}$，则

$$A-B=\{5\}.$$



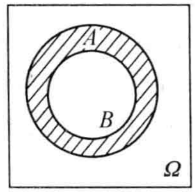


图 1-4

显然有如下性质：

(1) $A-B\subset A$;

(2) 若 $A\subset B$，则有 $A-B=\varnothing$;

(3) $A-B=A-AB$.

特别地，必然事件 Ω 对任一事件 A 的差 $\Omega-A$ 称为事件 A 的**对立事件**，记为 $\overline{A}$，即事件 A 不发生. 事件 A 与事件 B 互为对立事件的充要条件是

$$AB=\varnothing \text{ 且 } A\cup B=\Omega$$

(如图 1-5 阴影部分表示 $B=\overline{A}$)，这也是判断两事件成为对立事件的准则. 事件 A 与事件 B 为互不相容事件的充要条件是

$$AB=\varnothing,$$

如图 1-6 所示. 可见，对立事件一定是互不相容事件，但互不相容事件未必是对立事件.

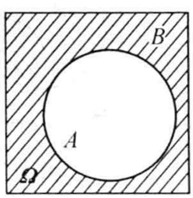


图 1-5

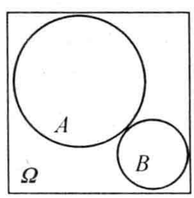


图 1-6

3. 事件的运算性质

事件的运算有如下性质：

(1) **交换律** $A\cup B=B\cup A$, $AB=BA$;

(2) **结合律** $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(AB)C=A(BC)$;

(3) **分配律** $(A\cup B)\cap C=AC\cup BC$, $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(4) **对偶律** $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$; 一般地，

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i};$$

(5) $A - B = A - AB = A\overline{B}$.

例 1.1 某射手射击目标三次，A_1 表示第1次射中，A_2 表示第2次射中，A_3 表示第3次射中. B_0 表示三次中射中0次，B_1 表示三次中射中1次，B_2 表示三次中射中2次，B_3 表示三次中射中3次. 试用 A_1, A_2, A_3 的运算来表示 B_0, B_1, B_2, B_3.

解 (1) $B_0 = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

(2) $B_1 = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} \cup \overline{A_1}A_2\overline{A_3} \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$.

(3) $B_2 = A_1A_2\overline{A_3} \cup A_1\overline{A_2}A_3 \cup \overline{A_1}A_2A_3$.

(4) $B_3 = A_1A_2A_3$.

例 1.2 设事件 A,B,C 是同一样本空间中的三个事件，则

(1) 事件 A,B,C 同时发生可以表示为 $ABC(A \cap B \cap C)$；

(2) 事件 A,B,C 中至少有一个发生可以表示为 $A \cup B \cup C$；

(3) 事件 A 发生而 B,C 都不发生可以表示为 $A\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $A-B-C$ 或 $A-(B \cup C)$；

(4) 事件 A,B,C 中恰好发生一个可以表示为 $A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$；

(5) 事件 A,B,C 中恰好发生两个可以表示为 $\overline{A}BC \cup A\overline{B}C \cup AB\overline{C}$；

(6) 事件 A,B,C 中没有一个发生可以表示为 $\overline{A \cup B \cup C}$ 或 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

习　题　1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间及随机事件：　一 ♀-♂

(1) 一个家庭有两个小孩，事件 $A = \{$该家庭至少有一女孩$\}$；二 ♀

(2) 观察某交通路口某时段机动车的流量，事件 $A = \{$机动车的辆数不超过 4 辆$\}$；

(3) 从一批灯泡中随机抽取一只，观察其使用寿命(单位：h)，事件 $A = \{$寿命在 1 000 ～ 2 000 h 之间$\}$.

2. 若 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$，$A = \{1,3,5\}$，$B = \{1,2,3\}$，求(1) $A \cup B$；(2) AB；(3) $\overline{A}$；(4) $\overline{B}$；(5) $\overline{A \cup B}$；(6) $\overline{AB}$；(7) $\overline{A} \cup \overline{B}$；(8) $\overline{A}\,\overline{B}$.

3. A,B,C 表示三事件，用 A,B,C 的运算表示下列事件：

(1) A,B 都发生且 C 不发生；　$AB\overline{C}$

(2) A 与 B 至少有一个发生且 C 不发生；　$(A \cup B)\overline{C}$

(3) A,B,C 都发生或 A,B,C 都不发生；　$ABC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

(4) A,B,C 中最多有一个发生；　$A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

(5) A,B,C 中恰有两个发生； $\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}$

(6) A,B,C 中至少有两个发生； $AB+BC+AC$ $\cancel{+ABC}$

(7) A,B,C 中最多有两个发生. $\overline{ABC}$

4. (1) 化简 $AB\cup\overline{A}B$. B

(2) 说明 AB 与 $\overline{A}B$ 是否互斥. 是

5. A,B,C 为三事件，说明 $AB\cup BC\cup AC$ 与 $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$ 是否相同.

否

6. 设 A,B,C 满足 $ABC\neq\varnothing$，将下列事件用互不相容事件的和表示：

(1) $A\cup B\cup C$； (2) $B-AC$； (3) $AB\cup C$.

1.2 事件的概率

1.2.1 频率与概率

对于一个事件来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生，我们常常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性大小，并希望寻求一个合适的数来衡量这种可能性的大小，对于事件 A，这个数通常记为 $P(A)$，称为事件 A 在一次试验中发生的**概率**. 当然这是概率的通俗含义，还不能作为概率的正式定义. 在给出概率的正式定义之前，首先介绍频率的概念.

定义 1.1 在相同的条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 m 称为事件 A 发生的**频数**，$\frac{m}{n}$ 称为事件 A 发生的**频率**，并记为 $f_n(A)$.

由定义，不难验证频率具有如下性质：

性质 1 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$.

性质 2 $f_n(\Omega)=1$，$f_n(\varnothing)=0$.

性质 3 若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

由于事件 A 在 n 次试验中发生的频率表示 A 发生的频繁程度，频率越大，事件 A 发生得越频繁，这就意味着事件 A 在一次试验中发生的可能性越大. 因此，直观的想法是用频率来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性大

小. 但这是否合理呢? 请先看下面的例子.

例 1.3　考虑“掷硬币”试验. 历史上有不少统计学家做过成千上万次试验. 若规定“正面朝上”为事件 A，其试验记录如表 1-1 所示.

表 1-1

试验人	n	m	$f_n(A)$
摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
费歇尔	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

从表 1-1 可见，当试验次数 n 大量增加时，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 会稳定于某一常数，我们称这一常数为**频率的稳定值**，我们把这个常数就作为度量事件 A 发生的可能性大小，并称为事件 A 的**概率**，记为 $P(A)$. 例如，从表 1-1 可见掷硬币试验，正面出现的事件 A 的频率 $f_n(A)$ 的稳定值大约是 0.5，所以 $P(A)=0.5$.

在实际中，当概率不易求出时，人们常取试验次数很大时事件的频率作为概率的估计值，称此概率为**统计概率**. 这种确定概率的方法称为**频率方法**. 它的理论依据我们将在后面介绍.

由频率的性质，不难得到概率有如下性质：

性质 4　$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

性质 5　$P(\Omega)=1$，$P(\varnothing)=0$.

性质 6　若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两互不相容的事件，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_k).$$

实际上，用上述定义去求事件 A 发生的概率是很困难的，因为求 A 发生的频率 $f_n(A)$ 的稳定值要做大量试验，它的优点是经过多次试验后，给人们提供猜想事件 A 发生的概率的近似值. 统计概率虽有它的简便之处，但若试验有破坏性，则不可能进行大量的重复试验，就限制了它的应用. 而对于某些特殊类型的随机试验，要确定事件的概率，并不需要重复试验，而可以根据人类长期积累的经验直接计算出来，从而给出概率的相应定义，这类试验

称为**等可能概型试验**. 根据样本空间 Ω 是有限集还是无限集，可分为古典概型与几何概型.

1.2.2 古典概率

1. 古典概型

定义 1.2 若一个随机试验具有如下特点：

(1) 试验的样本空间 Ω 包含有限个样本点；

(2) 试验中每个样本点出现的可能性是均等的，

则称此试验为**古典概型试验**.

例如，掷一次骰子，它的可能结果只有 6 个，假设骰子是均匀的，则每一种结果出现的可能性都是 $\frac{1}{6}$，所以相等，这种试验是古典概型. 下面介绍古典概型事件的概率的计算公式.

2. 古典概率

定义 1.3 在古典概型试验中，若样本空间 Ω 中样本点的个数为 n，事件 A 包含的样本点的个数为 k，则事件 A 的**概率**为 $P(A)=\frac{k}{n}$.

3. 古典概率的例子

例 1.4 将一枚均匀的骰子连掷两次，求

(1) 两次点数之和为 8 的概率；

(2) 两次点数中较大的一个不超过 3 的概率.

解 该试验的样本空间为

$$\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),\cdots,(6,4),(6,5),(6,6)\},$$

共 36 个样本点，由于骰子是均匀的，故每个样本点发生的可能性是相等的，属于古典概型.

(1) 设事件 $A=$“两次点数之和为 8”，则

$$A=\{(i,j)\mid i+j=8\}=\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\},$$

A 中共包含 5 个样本点，故 $P(A)=\frac{5}{36}$.

(2) 事件 $B=$“两次点数中较大的一个不超过 3”，则

$$\begin{aligned}B&=\{(i,j)\mid \max\{i,j\}\leqslant 3\}\\&=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\},\end{aligned}$$

B 中共包含 9 个样本点，故 $P(B)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$.