



普通高等教育“十二五”规划教材
国家理科基地大学数学系列教材

高等数学

(下册)

刘金舜 羿旭明 编著



科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
国家理科基地大学数学系列教材

高等数学

下册

刘金舜 羿旭明 编著

科学出版社

北 京

版权所有,侵权必究

举报电话:010-64030229;010-64034315;13501151303

内 容 简 介

本书是大学经济管理类(包括文科)的高等数学教材,列为武汉大学“十二五”规划教材之一。

全书分上、下两册,共十四章。上册介绍一元函数的微积分学,包括函数的极限、连续、导数、不定积分、定积分、广义积分以及导数在经济学中的应用、定积分的应用等。下册介绍空间解析几何、二元(多元)函数的微积分学、级数、常微分方程及差分方程等。

本书在传统的经济类高等数学的基础上内容稍有拓宽,主要加强了空间解析几何和无穷级数方面的内容。每一章都配备一套针对本章内容的综合练习题。此外,在全书最后,还配有两套综合全书内容的综合练习题。这些试题,既有深度,又有一定的难度。熟练地掌握这些试题的解题思路及证明方法,对将来考研将起到很好的桥梁作用。

本书适合经济、管理、部分理工科(非数学)、社科、人文等各专业学生使用,也可供教研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/刘金舜,羿旭明编著. —北京:科学出版社,2013.9

普通高等教育“十二五”规划教材 国家理科基地大学数学系列教材

ISBN 978-7-03-038482-9

I. 高… II. ①刘… ②羿… III. 高等数学—高等学校—教材

IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 202654 号

责任编辑:吉正霞 肖 婷 / 责任校对:董艳辉

责任印制:彭 超 / 封面设计:蓝 正

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本: B5(720×1000)

2013 年 8 月第 一 版 印张:13 3/4

2013 年 8 月第一次印刷 字数:266 000

定价:26.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

本书是根据教育部《经济管理类数学课程教学基本要求》，以提高学生的数学素质、掌握数学的思想方法与培养数学应用创新能力为目的，针对大学经济类、管理类各专业的教学实际编写而成。本书参考了国内外优秀教材，充分吸收了编者多年来教学实践经验与教学改革成果。同时，为了高校教材建设更好地适应教学与改革的需要，武汉大学确定并公布了“十二五”规划教材，本书是“十二五”规划教材之一。

数学课程对经济、管理类专业来说，“非常重要”是普遍认同。在当前高等教育从精英化走向大众化的趋势下，高等数学课程在教与学两方面都产生了新的要求与挑战。当今大学生具有良好的数学素质是可持续发展的基础，不仅为学习后续课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的基础，而且在培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、综合利用所学知识分析问题解决问题的能力、自主学习和创新能力上都具有非常重要的作用。因此，《高等数学》成为高等学校经济类、管理类等专业本科生必修的核心课程之一，也是硕士研究生入学考试中的一部分必考科目。对于文科类的学生来说，通过《高等数学》的学习，对于提高自身的抽象思维能力、严格的逻辑推理能力、空间想象能力等都有极大的帮助。

本书具有以下特色：

(1) 保持传统经典《高等数学》教材的优点和编排体系，强调高等数学在经济管理中的应用，并在例题和习题中加以体现。

(2) 内容展开沿用“定义、定理、推理、例题”的形式化演绎，力求在语言准确的前提下，陈述通俗易懂，深入简出，推理简洁直观，符合人们普遍的认知和心理过程。

(3) 适当弱化解题技巧训练的要求，强调基本方法和基本技巧的训练。

(4) 体现知识、能力、意识三者之间的关系。既要讲授知识，又要培养运用知识的能力，更要培养运用知识解决问题的意识。

(5) 考虑学生的考研需求。从教材的内容和结构上注意与考研大纲的衔接，从例题和习题上反映考研的典型题型和知识要点。

本套教材含《高等数学》上、下册，总课时 144 学时，并配有《高等数学同步习题解答》。上册包含函数的极限、连续、导数、不定积分与定积分、广义积分等，着重介绍了一元函数的微积分学，还介绍了导数在经济学中的应用、定积分的应用等。下

册介绍了二元(多元)函数的微积分学、级数、常微分方程及差分方程等,着重讲授了空间解析几何的基础知识.书中部分带有“*”号的章节,属于拓展部分,可视具体情况讲授.

本套教材的每一章后都配备充足的习题,此外还精心编写了一套针对本章内容的综合练习题.在本书最后还编写了两套综合全书的综合练习题.每套习题倾注了作者的大量心血,既有广度,又有深度,也有一定的难度.这些习题为考研的学生提供了一个较为广阔的平台.

本套教材第1章由韦光贤编写,第2章至第7章由刘金舜编写,第8章至第14章由羿旭民编写,全书的习题及综合练习题均由刘金舜编写.本套教材最后由刘金舜审核定稿.本套教材在前期编写以及后期统稿中得到了武汉大学数学与统计学院的邵淑彩、孟新焕、杨丽华、陈绍林、唐道远、李汉保等教授们的帮助,在此表示感谢.在教材编写过程中,我们参考了国内外部分院校的相关资料,主要参考书目列于书末,在此表示感谢.本套教材的立项、编写到出版,得到武汉大学数学与统计学院的领导及科学出版社的关心与支持,在此一并表示衷心感谢!

由于作者水平有限,书中有不足之处,希望广大专家、同行和读者批评指正.

刘金舜

2013年5月于武汉大学

目 录

前言

第 8 章 空间解析几何与向量代数	1
8.1 向量及其线性运算	1
8.1.1 向量的概念及几何表示	1
8.1.2 向量线性运算的几何方法	2
8.2 空间直角坐标系与向量的坐标	3
8.2.1 空间直角坐标	3
8.2.2 点和向量的投影	4
8.2.3 空间点的坐标与向量的坐标	6
8.2.4 向量的模与方向余弦	7
8.3 向量的点积、矢量积和混合积	8
8.3.1 向量的点积	8
8.3.2 向量的矢量积	9
8.3.3 向量的混合积	11
8.4 平面与直线	11
8.4.1 平面及其方程	12
8.4.2 直线及其方程	14
8.5 几种常见的二次曲面	16
8.5.1 柱面、投影柱面	16
8.5.2 球面、锥面	17
8.5.3 旋转曲面	18
习题 8	23
综合练习 8	26
第 9 章 多元函数及其微分学	29
9.1 平面点集与多元函数	29
9.1.1 平面点集	29
9.1.2 函数的概念	31
9.2 二元函数的极限	32
9.3 二元函数的连续性	35
9.3.1 二元函数的连续性概念	35

9.3.2 有界闭区域上连续函数的性质	37
9.4 偏导数与全微分	38
9.4.1 偏导数的定义与计算	38
9.4.2 偏导数的几何意义	40
9.4.3 高阶偏导数	41
9.4.4 全微分	42
9.5 复合函数的微分法	47
9.5.1 一个自变量的情形——全导数	48
9.5.2 多个自变量的情形	50
9.5.3 复合函数的高阶偏导数	54
9.6 一阶全微分形式的不变性	55
9.7 隐函数的微分法	57
9.8 二元函数的极值与最值	60
9.8.1 二元函数的极值	60
9.8.2 二元函数的最值	62
9.8.3 函数的条件极值与拉格朗日乘子法	64
习题 9	66
综合练习 9	70
第 10 章 二重积分	73
10.1 二重积分的概念与性质	73
10.1.1 二重积分的概念	73
10.1.2 二重积分的性质	75
10.2 二重积分的计算	78
10.2.1 直角坐标系下二重积分的计算	78
10.2.2 极坐标系下二重积分的计算	85
习题 10	91
综合练习 10	92
第 11 章 数项级数	96
11.1 数项级数的概念	96
11.2 数项级数的基本性质	98
11.3 正项级数	100
11.4 任意项级数、绝对收敛和条件收敛	109
11.4.1 交错级数及其收敛判别法	109
11.4.2 绝对收敛、条件收敛	110
习题 11	112
综合练习 11	114

第 12 章 函数项级数	117
12.1 函数序列与函数项级数的基本概念	117
12.2 幂级数	118
12.3 幂级数的性质	123
12.4 函数的幂级数展开	126
12.5 应用举例	133
12.5.1 近似计算	133
12.5.2 求部分级数的和	135
习题 12	136
综合练习 12	137
第 13 章 常微分方程	140
13.1 微分方程的基本概念	140
13.2 一阶微分方程	142
13.2.1 变量可分离的一阶微分方程	143
13.2.2 齐次微分方程	145
13.2.3 一阶线性微分方程	149
13.2.4 伯努利方程	151
13.3 二阶微分方程	152
13.3.1 二阶微分方程的降阶解法	152
13.3.2 二阶常系数线性微分方程	155
习题 13	164
综合练习 13	167
第 14 章 差分方程	170
14.1 差分的概念及性质	170
14.2 差分方程的概念	171
14.3 一阶常系数线性差分方程	172
14.3.1 一阶齐次差分方程的通解	173
14.3.2 一阶非齐次差分方程的通解	174
14.4 二阶常系数线性差分方程	178
14.4.1 二阶齐次差分方程的通解	178
14.4.2 二阶非齐次差分方程的通解	180
习题 14	185
综合练习 14	186
总复习题一	188
总复习题二	193
参考答案	198
参考文献	211

第8章

空间解析几何与向量代数

在后面相关章节中,将讨论多元函数微积分学,而空间解析几何学作为多元函数微积分学的基础是不可或缺的,考虑到后面只涉及空间解析几何的部分内容,因此本章并不准备详细介绍有关空间解析几何学与向量代数的全部内容,而只就相关知识作一些介绍.

8.1 向量及其线性运算

8.1.1 向量的概念及几何表示

许多量如质量、长度、面积、体积等,它们在取定一个单位后,可以用一个数来表示,这种量称为标量(或数量);有一类量如速度、加速度、力等,除了要用数量来表示其大小外,还必须指出其方向,这种既有大小,又有方向的量称为向量(或矢量),通常习惯用黑体字母表示向量,如 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{s}$ 等.

在几何学中,常常用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示向量 $\mathbf{a}$,其中, A 为向量的起点, B 为向量的终点(图 8.1.1). 用有向线段的长度表示向量的大小(或称向量的模),常用 $|\overrightarrow{AB}|$ (或 $|\mathbf{a}|$) 表示,有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的方向表示该向量的方向. 对于起点不同的向量,除非向量的大小或向量的方向不同,否则我们认为是同一向量,并称这种向量为自由向量. 后面我们仅限于讨论自由向量. 例如,在图 8.1.2 中, $ABCD$ 为一平行四边形,对于自由向量,则有

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

与向量 $\mathbf{a}$ 大小相同,方向相反的向量称为 $\mathbf{a}$ 的负向量(或反向量),记做 $-\mathbf{a}$;模等于 1 的向量称为单位向量;模等于 0 的向量称为零向量,记做 $\mathbf{0}$;零向量没有确定的方向,或者说零向量的方向可以任意选取.

将向量 $\mathbf{a}$ 或 $\mathbf{b}$ 平行移动到相同的起点,这时向量所在的射线之间的夹角 θ

$(0 \leq \theta \leq \pi)$ 称为向量 a 与 b 的夹角, 记做 (a, b) , 如图 8.1.3 所示. 并且规定零向量与其他任意向量的夹角为 $0 \leq \theta \leq \pi$ 中的任意值. 如果非零向量 a 与向量 b 的夹角等于 0 或 π , 我们称向量 a 与向量 b 平行, 并记做 $a \parallel b$, 同时规定零向量与任意向量平行. 如果非零向量 a 和 b 的夹角等于 $\frac{\pi}{2}$, 我们称向量 a 与向量 b 垂直, 并记做 $a \perp b$, 并规定零向量与任意向量垂直.

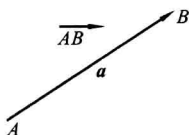


图 8.1.1

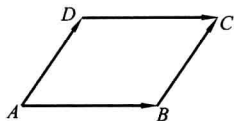


图 8.1.2

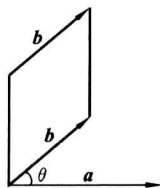


图 8.1.3

8.1.2 向量线性运算的几何方法

1. 向量的加减法

设有两个向量 a 和 b , 将向量 b 的起点平行移动到向量 a 的终点, 此时, 我们把从向量 a 的起点到向量 b 的终点的向量称为向量 a 和 b 的和, 记做 $a+b$, 如图 8.1.4 所示. 这种定义向量和的法则称为向量加法运算的三角形法则. 显然, 若将两个向量 a 和 b 的起点放在同一点, 并以向量 a 和 b 为邻边作平行四边形, 则其对角线上的向量同样可以定义向量 a 与 b 的和(图 8.1.4), 这种定义向量和的法则称为平行四边形法则.

两个向量加法的三角形法则可以推广到任意有限个向量加法的情形: 将所有向量依次平移, 使之首尾相连, 这样, 从第一个向量的起点到最后一个向量的终点的向量就是这些向量的和, 如图 8.1.5 所示.

向量的减法定义为向量加法的逆运算, 对于向量 a 和 b , 若 $b+c=a$, 则向量 c 就定义为向量 a 与向量 b 的差, 记为 $a-b$. 从图 8.1.6 容易看出

$$a-b=a+(-b)$$

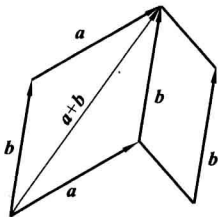


图 8.1.4

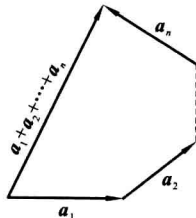


图 8.1.5

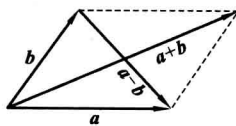


图 8.1.6

即向量 $a-b$ 等于向量 a 与 b 的反向量之和. 而且, 当向量 a 和 b 在同一起点时, 向量 $a-b$ 等于从向量 b 的终点到向量 a 终点的向量.

2. 向量的数乘

对于任意实数 λ 和向量 a , 定义 λ 与 a 的乘积(简称数乘)是一个向量, 记为 λa , 它的模和方向规定如下:

$$(1) |\lambda a| = |\lambda| |a|;$$

(2) 当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 同方向; 当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 反方向; 当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda a = 0$.

由数乘定义知, 对于任意非零向量 a 和任意实数 $\lambda \neq 0$, 总有 $a \parallel \lambda a$; 反过来, 若非零向量 a 和 b 平行, 必存在实数 λ , 使 $b = \lambda a$. 此时我们就有结论: 非零向量 a 与 b 平行的充分必要条件是存在实数 λ , 使 $b = \lambda a$ 成立.

有了数乘的概念后, 对于向量 a 的反向量 $-a$, 也可以理解为 $(-1) \cdot a$. 同时, $a-b$ 也可以理解为 $a + (-1) \cdot b$. 而且, 对于任意非零向量 a , 向量 $a^0 = \frac{1}{|a|} a$ 为与向量 a 同方向且模为 1 的单位向量, 由此即有 $a = |a| a^0$, 即任一非零向量都可以表示成其单位向量的数乘.

根据定义及几何作图法, 可以验证向量的加法和数乘具有如下基本运算规律:

- (1) $a+b=b+a$ (加法交换律);
- (2) $(a+b)+c=a+(b+c)$ (加法结合律);
- (3) $a+0=0+a=a$;
- (4) $a+(-a)=0$;
- (5) $\lambda(\mu a)=(\lambda\mu)a$ (数乘结合律);
- (6) $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$ (数乘分配律);
- (7) $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$ (数乘分配律).

其中 a, b, c 是任意向量, λ 和 μ 为任意实数.

向量的加法和数乘满足上述运算规律, 如此定义的向量的加法和数乘运算统称为向量的线性运算.

8.2 空间直角坐标系与向量的坐标

8.2.1 空间直角坐标

为了建立空间中的点与数的关系, 我们采用类似于平面解析几何的办法引进

空间直角坐标系.

在空间中任取一定点 O , 过 O 点作三条相互垂直的数轴, 各数轴的原点均位于 O 点, 且都具有相同的长度单位, 这三条轴分别称为 Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴. 为了确定起见, 我们同时还规定其中的 Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴的正方向符合右手规则: 以右手握住 Oz 轴, 当右手的四个手指从正向 Ox 轴以 90° 角转向正向 Oy 轴时, 竖起的大拇指的指向就是 Oz 轴的正方向, 如图 8.2.1 所示. 图中箭头的指向表示 Ox 轴、 Oy 轴、 Oz 轴的正向. 这样的三条数轴就组成了一个以 O 点为原点的空间直角坐标系 $Oxyz$, Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴分别称为横轴、纵轴和竖轴, 并统称为坐标轴.

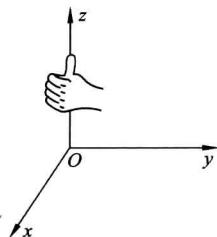


图 8.2.1

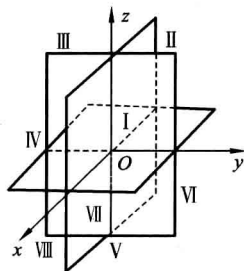


图 8.2.2

由 Ox 轴和 Oy 轴所确定的平面称为 xOy 平面, 其他两个由 Ox 轴和 Oz 轴、 Oy 轴和 Oz 轴所确定的平面分别称为 xOz 平面和 yOz 平面, 这三个平面统称为坐标平面.

三个坐标平面把整个空间分成八个部分, 每一个部分称为一个卦限. 含有 Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴正半轴的那个卦限称为第一卦限. 在 xOy 平面上方, 并按逆时针方向分别是第二、第三和第四卦限. 在 xOy 平面下方, 并和第一、第二、第三、第四卦限上下对应的四个卦限分别是第五、第六、第七、第八卦限. 八个卦限的位置如图 8.2.2 所示, 在图 8.2.2 中分别用罗马数字 I, II, ..., VIII 表示.

8.2.2 点和向量的投影

在空间中自点 A 向平面 π 作垂线, 所得的垂足 A' 称为点 A 在平面 π 上的投影, 如图 8.2.3 所示.

过空间一点 B 作平面 π 垂直于直线 L , 相交于点 B' , 称点 B' 为点 B 在直线 L 上的投影, 如图 8.2.4 所示.

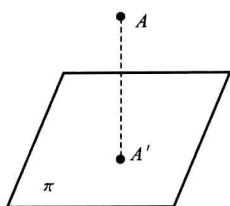


图 8.2.3

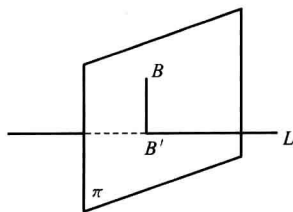


图 8.2.4

设 $\overrightarrow{AB}$ 为一空间向量, 起点 A 和终点 B 在某个 u 轴上的投影分别为点 A' 和点 B' , 且 A' 和 B' 在 u 轴上的坐标分别是 u_A 和 u_B , 则称向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的投影向量, 同时称 $u_B - u_A$ 为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的投影, 记做 $P_u \overrightarrow{AB}$, 即

$$P_u \overrightarrow{AB} = u_B - u_A$$

由定义知, 设 e 是与 u 轴同方向的单位向量, 则有

$$\overrightarrow{A'B'} = (u_B - u_A)e = (P_u \overrightarrow{AB})e$$

在图 8.2.5 中, 若将 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 平移到 u 轴上的 A' , 此时向量 $\overrightarrow{AB}$ 平移到 $\overrightarrow{A'B''}$, 由图 8.2.5 可知

$$P_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos(\overrightarrow{AB}, e)$$

即一个向量在某轴上的投影等于该向量的长度与该向量和该轴夹角的余弦的乘积.

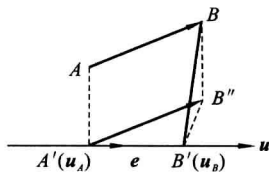


图 8.2.5

根据投影的定义, 我们还可以定义向量 a 在非零向量 b 上的投影. 当 $a \neq 0$ 时

$$P_b a = |a| \cos(a, b)$$

当 $a = 0$ 时, $P_b a = 0$. 并给出如下定理:

定理 8.2.1 (1) 两个向量的和在某轴上的投影, 等于这两个向量在该轴上的投影之和, 即

$$P_u(a+b) = P_u a + P_u b$$

(2) 一个数与向量的数乘在某轴上的投影, 等于该数与该向量在该轴上的投影之积, 即

$$P_u(\lambda a) = \lambda \cdot P_u a$$

证 (1) 作向量 $\overrightarrow{AB} = a$, 再以 B 点为起点作向量 $\overrightarrow{BC} = b$, 则

$$a+b = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

设点 A, B, C 在 u 轴上的投影分别为点 A', B', C' , 且各自在 u 轴上的坐标分别为 u_A, u_B, u_C , 如图 8.2.6 所示, 则

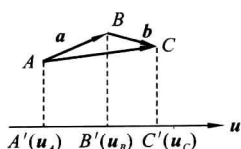


图 8.2.6

$$P_u(a+b) = P_u \overrightarrow{AC} = u_C - u_A$$

$$= (u_C - u_B) + (u_B - u_A) = P_u a + P_u b$$

(2) 根据向量投影的定义(u 轴可以看做是一个向量,在此不妨记做 u),则

$$\begin{aligned} P_u(\lambda a) &= |\lambda a| \cos(\lambda a, u) \\ &= \begin{cases} |\lambda| \cdot |a| \cos(a, u), & \text{当 } \lambda \geq 0 \\ -|\lambda| \cdot |a| \cos(a, u), & \text{当 } \lambda < 0 \end{cases} \\ &= \lambda |a| \cos(a, u) = \lambda \cdot P_u a \end{aligned}$$

8.2.3 空间点的坐标与向量的坐标

1. 空间点的坐标

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 下,空间中任一点可以用这个点的坐标来表示.具体地,设 M 为空间任一点,过 M 点分别作三个坐标轴的垂直平面,如图 8.2.7 所示,与 Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴分别交于点 P 、 Q 和 R (即点 M 在 Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴上的投影点),这三个点在 Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴的坐标依次为 x 、 y 和 z ,称有序数组 (x, y, z) 为点 M 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标;反过来,已知一有序数组 (x, y, z) ,在 Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴上分别找到相应的点 P 、 Q 和 R ,使点 P 、 Q 和 R 在 Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴上的坐标分别为 x 、 y 、 z ,通过点 P 、 Q 和 R 分别作 Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴的垂直平面,相交于唯一一点 M ,即唯一确定了空间中的一点 M .这样就建立了空间中的点 M 与有序数组 (x, y, z) 之间的一一对应关系,并称其中的 x 、 y 和 z 分别为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标,常记为 $M(x, y, z)$.

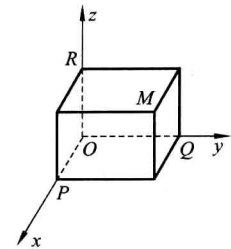


图 8.2.7

特别地,在坐标平面和坐标轴上的点,其坐标具有一定的特征.例如原点 O 的坐标为 $(0, 0, 0)$, Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴上点的坐标分别为 $(x, 0, 0)$ 、 $(0, y, 0)$ 和 $(0, 0, z)$; xOy 平面、 xOz 平面和 yOz 平面上点的坐标分别为 $(x, y, 0)$ 、 $(x, 0, z)$ 和 $(0, y, z)$.

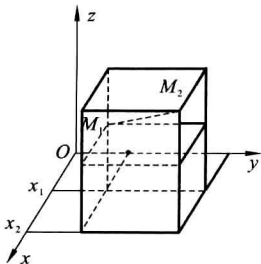


图 8.2.8

2. 空间中两点间的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间中任意两点,过点 M_1 和 M_2 分别作垂直于 Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴的平面,这 6 个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体,如图 8.2.8 所示,易知长方体的棱长分别为 $|x_2 - x_1|$ 、 $|y_2 - y_1|$ 和 $|z_2 - z_1|$,于是对角线 M_1M_2 的长度,即空间任意两点 M_1 和 M_2 之间的距离为

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

特别地,点 $M(x, y, z)$ 到原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$d = |MO| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

3. 向量的坐标

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,设向量 $\mathbf{a}$ 在 Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴上的投影分别为 a_1, a_2 和 a_3 ,则称它们为向量 $\mathbf{a}$ 的坐标,记为 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

为了讨论方便,在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,分别在 Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴的正方向上选取三个单位向量,记做 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$,并称为基本向量.用向量的坐标表示即有

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

设有一任意向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$,当我们把它的起点放在坐标系的原点 O 时,此时向量的终点 M 的坐标恰好为 $M(a_1, a_2, a_3)$.设点 M 在 Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴上的投影分别为 P, Q 和 R ,在 xOy 平面上的投影为 M' ,如图 8.2.9 所示,则根据向量的加法规则,有

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM'} + \overrightarrow{M'M} \\ &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \end{aligned}$$

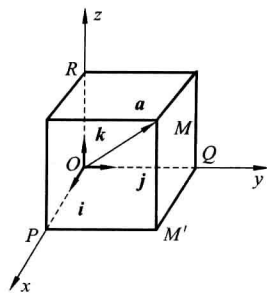


图 8.2.9

上式给出了向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 在三个基本向量 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 上的分解, $a_1\mathbf{i}, a_2\mathbf{j}$ 和 $a_3\mathbf{k}$ 分别为向量 $\mathbf{a}$ 在 Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴上的投影向量,也称为分向量.

由向量投影的定义和定理 8.2.1 可知,两个向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 和 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 相等,当且仅当其坐标对应相等,即 $a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$,而且,向量线性运算的坐标表示为

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \quad (8.2.1)$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3) \quad (8.2.2)$$

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) \quad (\lambda \text{ 为实数}) \quad (8.2.3)$$

8.2.4 向量的模与方向余弦

在直角坐标系 $Oxyz$ 中,为了确定向量 $\mathbf{a}$ 的方向,通常用 $\mathbf{a}$ 与三个基本向量 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 的夹角 α, β, γ 来描述,此时称 α, β, γ 为向量 $\mathbf{a}$ 的方向角, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为向量 $\mathbf{a}$ 的方向余弦.

对于非零向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$,由向量坐标和投影性质,不难得到向量 $\mathbf{a}$ 的模及方向余弦的计算式

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (8.2.4)$$

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \quad (8.2.5)$$

$$\cos\beta = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \quad (8.2.6)$$

$$\cos\gamma = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \quad (8.2.7)$$

且方向余弦满足关系式.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad (8.2.8)$$

即方向角 α, β, γ 之间是有关联的.

8.3 向量的点积、矢量积和混合积

8.3.1 向量的点积

设向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 和 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 称 $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ 为向量 $\mathbf{a}$ 与向量 $\mathbf{b}$ 的点积, 并记做 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, 即

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

从以上定义知, 两个向量的点积是一个数, 因此向量的点积又称为向量的数量积. 同时, 容易验证, 向量的点积运算满足如下运算规律.

定理 8.3.1 设有向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}, \lambda$ 为实数, 则

- (1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (交换律);
- (2) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ (分配律);
- (3) $\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\lambda\mathbf{b})$ (与数乘的结合律);
- (4) $\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$ (此处我们将 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ 简记为 $\mathbf{a}^2$).

设非零向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}, \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) 为向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角, 如图 8.3.1 所示, 利用余弦定理, 则有

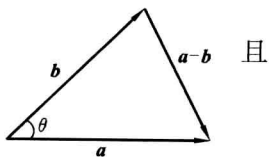


图 8.3.1

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\ &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \end{aligned}$$

比较上述两式,即得

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta \quad (8.3.1)$$

因此,向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的点积 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 为向量 $\mathbf{a}$ 的模、向量 $\mathbf{b}$ 的模与向量间夹角的余弦三者的乘积.

因为 $P_b \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, 从而,点积 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 又可以表示为

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{b}| P_b \mathbf{a} = |\mathbf{a}| P_a \mathbf{b} \quad (8.3.2)$$

定理 8.3.2 两个向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 垂直的充分必要条件是向量的点积等于零,即 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

证 若非零向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 垂直,即夹角 $\theta = \frac{\pi}{2}$,由式(8.3.1)知,则有 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$;反过来,若非零向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 满足 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$,由式(8.3.1),则有 $\cos \theta = 0$,从而 $\theta = \frac{\pi}{2}$,即向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 垂直.另外,当 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 至少有一个为零向量时,上述结论显然成立.

例 8.3.1 求向量 $\mathbf{a} = (2, 3, 0)$ 和 $\mathbf{b} = (-1, 2, 1)$ 之间的夹角.

解 根据式(8.3.1),有

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{-2 + 6}{\sqrt{13} \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{78}}{39}$$

从而夹角

$$\theta = \arccos \frac{2\sqrt{78}}{39}$$

8.3.2 向量的矢量积

在空间直角坐标系下,设向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 是两个非零向量, θ 为向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 之间的夹角,定义向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的矢量积是这样一个向量(记为 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$),该向量的大小为 $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$,其方向垂直于 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$,且 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 符合右手法则,如图 8.3.2 所示.当 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 中至少有一个是零向量时,规定 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. 矢量积有时又称为向量积(外积或叉积).根据向量的矢量积定义,易证如下运算法则.

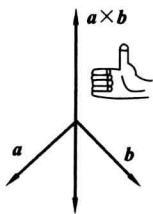


图 8.3.2

定理 8.3.3 设有向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$, λ 为实数,则

- (1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (反交换律);
- (2) $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ (与数乘的结合律);
- (3) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ (分配律).

定理 8.3.4 两个向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 平行的充分必要条件是 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

证 当 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ 时,向量之间的夹角 $\theta = 0$ (或 π),从而 $\sin \theta = 0$,故有 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$;反之,当 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$,且 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 均为非零向量时,则有 $\sin \theta = 0$,即 $\theta = 0$ (或 π),从而 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$;