21世纪高等学校规划教材

高等数学（上）

——实训教程

刘春凤 等 编著

清华大学出版社

21世纪高等学校规划教材

高等数学（上）
——实训教程

刘春凤　闫焱　崔玉环　编著

清华大学出版社

内容简介

《高等数学》实训教程与《高等数学》基础教程互为姊妹篇。

《高等数学》基础教程作为课内"学数学"理论教学篇,《高等数学》实训教程用于课外"用数学"的实训教学篇。实训教程针对基础教程的每一章内容相对应地给出六个板块的补充和拓展:(1)知识网络图;(2)精品课堂;(3)达标实训;(4)拓展实训;(5)应用实训;(6)数学实验。本书是《高等数学》基础教程的拓展,两个教程内容协调一致,配合使用可实现课上与课下,课内与课外相辅相成。

本书内容丰富,逻辑清晰,通俗易懂,便于读者自学,可作为高等院校工学、经济学等各专业的辅助教材,也可作为报考工科研究生的参考书,并可供工程技术工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上):实训教程/刘春凤等编著.--北京:清华大学出版社,2013
21 世纪高等学校规划教材
ISBN 978-7-302-33837-6

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①刘…　Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 213136 号

责任编辑:魏江江　薛　阳
封面设计:常雪影
责任校对:时翠兰
责任印制:刘海龙

出版发行:清华大学出版社
网　　址:http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地　　址:北京清华大学学研大厦 A 座　　邮　　编:100084
社 总 机:010-62770175　　邮　　购:010-62786544
投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课 件 下 载:http://www.tup.com.cn,010-62795954
印 装 者:清华大学印刷厂
经　　销:全国新华书店
开　　本:185mm×260mm　　**印　张**:22　　**字　　数**:506 千字
版　　次:2013 年 10 月第 1 版　　**印　　次**:2013 年 10 月第1 次印刷
印　　数:1～3800
定　　价:39.00 元

产品编号:054690-01

本书编委会

主　任：吴印林

副主任：屈　滨　刘春凤

编　委：肖继先　何亚丽　杨爱民　闫　焱

前言

FOREWORD

数学不仅是一些知识，也是一种素质，即数学素质；数学不仅是一种工具，也是一种思维，即理性思维；数学不仅是一门科学，也是一种文化，即数学文化。当今，人类进入信息时代，数学无声无息地走进人们的生活，引领科技的发展，把握社会的命脉，我们几乎所有的工作都与数学相关，追求科学的、可持续发展的工作目标，越来越多地需要数学的描述，需要使用数学工具进行定量分析，可以说信息时代本质上是数学时代，信息技术本质上是数字技术，使用数学的程度甚至成为衡量国家科学进步的主要标志。大学数学课程因其在培养大学生理性思维、计算能力，创新意识等方面具有不可替代的作用，而成为大学课程中最重要的公共必修课，因此学好数学既是学者进取之道，也是人生智慧之举。

我国从精英教育到大众化教育的转型，高等教育发生了一系列的变化，伴随着变化也产生了诸多前所未有的问题。几十年、甚至上百年一贯制的大学数学教育问题首当其冲受到影响。尽管大学数学教学内容和课程体系改革方兴未艾，面向重点大学的具有新思路且含有数学实验的新教材陆续出现，对数学教学改革起到了推动和引领作用。然而对于普通院校，尤其对独立学院，由于缺乏与本校人才培养目标高度适应的新教材，选用教材时多倾向与重点大学保持一致，培养目标及学生的差异使普通院校呈现传授与接受的“脱节”，教师教得辛苦，学生学得艰难，有相当比例的学生“学不会，用不了”，教学效果事倍功半。

面对当前普通高校的大学数学教育，笔者认为张景中院士提出的教育数学的观点颇有启发。学数学好比吃核桃，核桃仁美味而富有营养，但要完整地砸开吃到它却非易事，“数学教育要研究的是如何砸核桃吃核桃，而教育数学要研究改良核桃的品种，让核桃更美味更营养，更容易砸开吃净。”为此，我们组织多年从事高等数学教学的一线教师，遵循教育部制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，立足普通高等院校应用型人才培养目标的需要，融入张景中院士“想的是教育，做的是数学”的思想，编写了高等数学系列教材。本套教材旨在让更多的学子在轻松学习高等数学知识的同时，掌握数学本质，培养数学素质，提高数学能力，感受数学魅力，自觉走进数学，自由享用数学。

高等数学系列教材包括《高等数学(上)——基础教程》和《高等数学(下)——基础教程》和《高等数学(上)——实训教程》、《高等数学(下)——实训教程》(以下分别简称《基础教程》和《实训教程》)，本套教材有三个显著特点：

(1) 调整结构，增加实训。新编《基础教程》上册包括微分学，空间解析几何，下册包括积分学，无穷级数和常微分方程。《基础教程》作为课内“学数学”理论教学篇，《实训教程》用于课外“用数学”的实训教学篇。《实训教程》由五个板块组成：知识网络图、精品课

堂、达标实训、拓展实训、应用实训和数学实验，它是《基础教程》的拓展，两个教程内容协调一致，配合使用可实现课上与课下，课内与课外相辅相成。

(2) 分层布局，梯次渐进。考虑到不同专业的学生对数学需求的差异，《基础教程》把传统的内容按照六个板块：内容初识、经典解析、概念反思、理论探究、方法纵横、应用欣赏进行了重新划分与整合。其中内容初识和经典解析为第一梯度，内容初识只限于介绍简单概念和基础知识，经典解析部分仅限于介绍最基础且经典的方法。这一梯度避开了抽象的概念和繁琐的计算，例如极限与连续的内容初识部分只描述极限概念而不精确刻画，避开“ε-N 语言”，经典解析极限方法仅介绍有理分式函数的极限，两个重要极限和无穷小代换法，力求使读者轻松入门。概念反思和理论探究为第二梯度，在读者对本章内容已有初步了解的基础上，进一步揭示概念的内涵，展开相关理论的推演和证明，强化学生对知识的深刻理解，培养学生的数学思维。方法纵横和应用欣赏为第三梯度，其中方法纵横部分将集中讲解本章难度较高和综合性较强的数学方法，例题的选择注意典型性、灵活性和可拓展性，有的选自全国数学竞赛试题，也有的选自考研真题。著名数学家和数学教育家项武义先生说：教数学，要教学生“运用之妙，存乎一心”，以不变应万变，不讲或少讲只能对付几个题目的“小巧”，要教给学生“大巧”，这个板块就是启发联想，夯实数学基本功，使学生通过引导探究渐入“无招胜有招”的境界，为学生继续深造奠定坚实的数学基础。应用欣赏旨在体现数学具有广泛应用性这一特点，但限于课程学时，高等数学的应用课堂难以细说，故在基础教程里仅举少许典型应用案例供读者欣赏，使读者学知所用。

(3) 融入实验，学以致用。长期以来，数学给人们的一些印象就是凭大脑、纸、笔进行推理、证明和计算，抽象的推理和繁琐的计算使一些学生对数学兴趣索然。计算机科技的迅速发展，优秀的数学软件为用数学方法解决复杂的实际问题提供了良好的平台，使数学教学如虎添翼，过去学生由于计算技术的局限只能“望洋兴叹”的问题，如今可以通过数学实验轻松解决，数学实验使数学计算变得轻松，数学形象变得直观，数学奥妙变得美丽，数学推理变得自然。引数学实验入大学数学教学是我们近十年的举措，本套教材嵌入的高等数学实验在实训教程中，这一部分的教与学教师可酌情安排。

本书由刘春凤教授、闫焱、崔玉环编著，全书由刘春凤总体策划，闫焱、崔玉环负责组织，具体编写责任人为：赵慧娟(第 1 章)，崔玉环(第 2 章)，纪楠(第 3 章)，杨爱民(第 4 章)，屈静国(第 5 章)，张焕成(第 6 章)。教材融合了河北联合大学编写团队多年的教学经验，注重直观简约，对繁琐的理论推导进行了适度的约简，对数学的理论和概念，尽可能地通过几何直观，解释其抽象和深刻的内涵，内容由浅入深，梯次渐进，通俗易懂，既宜于教师因材分层讲授，也便于读者循序渐进自学。

本书得以出版，对河北联合大学教材编委会的指导和支持和清华大学出版社的精心设计和悉心编辑表示衷心感谢。

由于本书对高等数学内容调整幅度较大，前后呼应未必贴切，章节衔接未必自然，书中谬误之处难免，恳请读者批评指正。

编　者

2013 年盛夏

CONTENTS

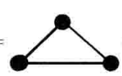
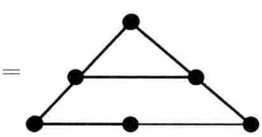
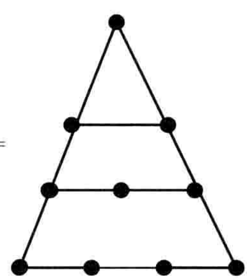
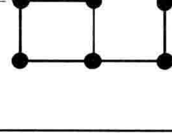
目录

第1章

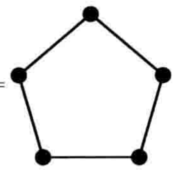
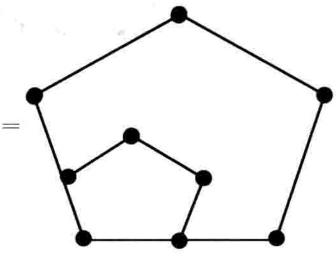
数与函数

1.1 著名数的品质

在茫茫的数海中，蕴藏着许多有趣的性质，揭示着自然数的某些规律，这里将集中简介一些神秘而有趣的数。形数就是用多边形上的圆点数目来表达数与形的奇妙联系的数。

名称	性　　质
形数	**【三角形数】** 设三角形数为 n_3 $1=\bullet,3=$  $=1+2,6=$  $=1+2+3$ $10=$  $=1+2+3+4,\quad \cdots$ 第 n 个三角形数　$n_3=1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ 任意两个相邻的三角形数之和为“平方数”
	【正方形数】 设正方形数为 n_4 $1=\bullet,4=$  $=2^2,\quad 9=$  $=3^2,\cdots$ 第 n 个正方形数　$n_4=n^2$

续表

名称	性　　质
形数	【五边形数】 设五边形数为 n_5 $1=\bullet, 5=$  $=2+3, 9=$  $=3+6$ 第 n 个五边形数　$n_5=n+3(n-1)_3$，即第 n 个五边形数是 n 与 3 个第 $n-1$ 个三角形数之和

毕达哥拉斯学派把自然数分为三类：完美数、不足数和过剩数（又叫富裕数）。三类数的意思依次是：一个自然数的各个因数（含 1，除它本身外）的和等于、小于、大于这个自然数。完美数有许多有趣的性质和无与伦比的魅力，两千五百多年来一直吸引着众多的数学家和业余数学爱好者对它进行探究。迄今为止，人类仅发现 47 个完美数，而且都是偶完美数。至于偶完美数是否无穷和有没有奇完美数，至今还没有定论，这已成为数学中的著名难题。

名称	性　　质
完美数	【示例】 6 28 496 8128 33550336 8589869056 137438691328 2305843008139952128 2658455991569831744654692615953842176 191561942608236107294793378084303638130997321548169216 13164036458569648337239753460458722910223472318386943117783728128
	【特质】 ① 皆三角形数，如 $28=1+2+3+4+5+6+7$ ② 皆调和数，$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=2$ ③ 奇立方和，$28=1^3+3^3$ ④ 完美数均以 6 和 8 结尾 ⑤ 个位数连加终为 1，如 8182（$8+1+8+2=19$；$1+9=10$；$1+0=1$）

大自然中具备对称美的事物有许许多多，如枫叶、雪花等，对称本身就是一种和谐、一种美。在数学中有一种具有“对称美”的数——回文数（顺读倒读都是同一个数）。回文

数,这个奇妙的数学现象,从古代就一直被人们津津乐道。不仅仅是数学家们,连诗人们也是如此。

名称	性　质
回文诗	《晚秋即景》这首诗,顺读倒读均如行云流水,顺理成章,且诗中意境深远,耐人寻味 烟霞映水碧迢迢　　萧萧冷树古城边 暮色秋色一雁遥　　晚照残晖落岭前 前岭落晖残照晚　　遥雁一色秋色暮 边城古树冷萧萧　　迢迢碧水映霞烟
回文数	① 可以试将自然数的各位数字倒序排出,加到原来的数字上,反复这样多次后,可能得到一个回文数,如 $95+59=154$,$154+451=605$,$605+506=1111$,1111 就是一个回文数 ② 回文素数,如 11,101,757 等,除 11 以外,其余回文素数的位数都是奇数 ③ 完全平方数中的回文数,如 $11^2=121$,$22^2=484$,… ④ 完全立方数中的回文数,如 $7^3=343$,$11^3=1331$,… ⑤ 回文算式,如 $12\times42=24\times21$,$34\times86=68\times43$,$102\times402=204\times201$,…

名称	性　质
魔术数	将魔术数写在任何一个自然数的右边,如果能得到新数,就都能被魔术数整除。 ① 一位魔术数,如 1,2,5 ② 两位魔术数,如 10,20,25,50 ③ 三位魔术数是 10^3 的约数中的所有三位数 ④ n 位魔术数是 10^n 的约数中的所有 n 位数
漂亮数	漂亮数的每个素因数至少是二重,如 $4=2^2$,$72=2^3\times3^2$ ① 孪生漂亮数(相邻两个自然数皆为漂亮数),8 和 9 是一对"孪生漂亮数"(因为 $8=2^3$,$9=3^2$) ② 任何大于 1 的自然数的平方都是漂亮数 ③ 当$(n+1)(n-1)$是漂亮数时,可得到一对孪生漂亮数
自守数	自守数(除 0 和 1 外)的平方的末尾数仍然是这个数 ① 一位数的自守数,5,6,而 $5+6=10+1$ ② 两位数的自守数,25,76,而 $25+76=10^2+1$ ③ 三位数的自守数,625,376,而 $625+376=10^3+1$ ④ 四位数的自守数,9376,0625,而 $9376+0625=10^4+1$(0625 为退化自守数)

1.2 经典曲线简介

(一) 圆

圆(Circle),在同一平面内,到定点的距离等于定长的点的集合叫做圆。圆是一个看似简单,实际上十分奇妙的形状。古代人最早是从太阳、阴历十五的月亮得到圆的概念的。一万八千年前的山顶洞人曾经在兽牙、砾石和石珠上钻孔,那些孔有的就很圆。到了陶器时代,许多陶器都是圆的。圆的陶器是将泥土放在一个转盘上制成的。当人们开始纺线,又制出了圆形的石纺锤或陶纺锤。古代人还发现搬运圆的木头时滚着走比较省劲。后来

他们在搬运重物的时候，就把几段圆木垫在大树、大石头下面滚着走，这样当然比扛着走省劲得多。

约在六千年前，美索不达米亚人，做出了世界上第一个轮子——圆形的木盘。大约在四千多年前，人们将圆的木盘固定在木架下，这就成了最初的车子。古代埃及人就认为：圆，是神赐给人的神圣图形。一直到两千多年前我国的墨子(约公元前468—前376)才给圆下了一个定义，即圆，一中同长也。意思是说，圆有一个圆心，圆心到圆周的长都相等。这个定义比希腊数学家欧几里得(约公元前330—前275)给圆下定义要早100年。

圆是几何图形中最普通、最实用，而又最完美的图形，可以说圆无处不在，圆的相关信息汇总如表1.1～表1.3所示。

表 1.1

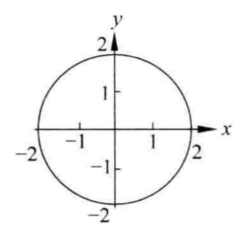
曲线名称		圆	
曲线方程1		取值范围	图形1
直角方程	$x^2+y^2=a^2$	$-a\leqslant x\leqslant a,-a\leqslant y\leqslant a$	($a=2$)
极坐标方程	$\rho=a$	$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$	
参数方程	$\begin{cases}x=a\cos t\\y=a\sin t\end{cases}$	$0\leqslant t\leqslant 2\pi$	
对称性	关于原点和坐标轴都对称		
围成面积	πa^2		
曲线周长	$2\pi a$		
绕坐标轴旋转的体积	$\frac{4}{3}\pi a^3$		

表 1.2

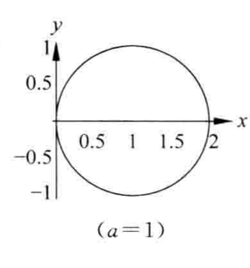
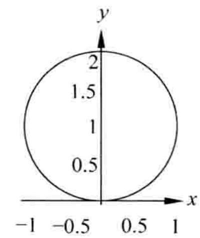
曲线名称		圆	
曲线方程2		取值范围	图形2
直角方程	$x^2+y^2=2ax$	$0\leqslant x\leqslant 2a,-a\leqslant y\leqslant a$	($a=1$)
极坐标方程	$\rho=2a\cos\theta$	$-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$	
参数方程	$\begin{cases}x=a+a\cos t\\y=a\sin t\end{cases}$	$0\leqslant t\leqslant 2\pi$	
对称性	关于 x 轴($y=0$)对称		
围成面积	πa^2		
曲线周长	$2\pi a$		
绕横轴旋转的体积	$\frac{4}{3}\pi a^3$		

表 1.3

曲线名称		圆	
曲线方程 3		取值范围	图形 3
直角方程	$x^2+y^2=2ay$	$-a\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant 2a$	 $(a=1)$
极坐标方程	$\rho=2a\sin\theta$	$0\leqslant\theta\leqslant\pi$	
参数方程	$\begin{cases}x=a\cos t\\y=a+a\sin t\end{cases}$	$0\leqslant t\leqslant 2\pi$	
对称性	关于 y 轴($x=0$)对称		
围成面积	πa^2		
曲线周长	$2\pi a$		
绕纵轴旋转的体积	$\frac{4}{3}\pi a^3$		

（二）摆线

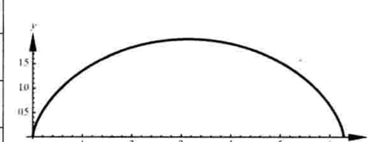
摆线(Cycloid)，在平面上，一个动圆（发生圆）沿着一条固定的直线（基线）或固定圆（基圆）做纯滚动时，此动圆上一点的轨迹称为摆线。

当动圆沿一直线缓慢地滚动时，圆上一固定点所经过的轨迹称为摆线。

当动圆沿着固定圆（固定圆的半径大于等于定圆的半径）滚动时，摆线分为内摆线和外摆线。动圆内切于定圆做无滑动的滚动，动圆圆周上一个定点的轨迹称为内摆线，典型曲线为星形线；当动圆沿着定圆的外侧无滑动地滚动时，动圆圆周上的一个定点所描绘的点的轨迹称为外摆线，典型代表曲线为心形线。

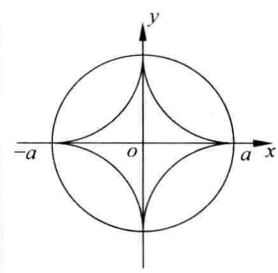
(1) 当动圆沿一直线缓慢地滚动时形成的摆线是以 2π 为周期的周期函数，每一拱的形状都是一样的，摆线一拱的曲线图形和相关信息如表 1.4 所示。

表 1.4

曲线名称		摆　线	
曲线方程		取值范围	图形
参数方程	$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$	$0\leqslant t\leqslant 2\pi$(摆线的一拱)	 $(a=1)$
对称性	无对称性		
围成面积	$3\pi a^2$		
曲线周长	$8a$		
绕横轴旋转的体积	$5\pi^2 a^3$		
绕纵轴旋转的体积	$6\pi^3 a^3$		

(2) 动圆内切于定圆做无滑动的滚动时形成内摆线。假设有一个定圆,若有另一个半径是此定圆的 $1/(n+1)$倍的圆在其内部滚动,则内圆周上的一定点在滚动时划出的轨迹就是一条内摆线,亦成为"圆内螺线"。星形线 (Astroid)是内摆线(圆内螺线)的一种,其 n 为 3。星形线的图形和相关信息汇总如表 1.5 所示。

表 1.5

曲线名称		星形线	
曲线方程		取值范围	图形
直角方程	$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\ (a>0)$	$-a\leqslant x\leqslant a$	
极坐标方程	$r^{\frac{2}{3}}(\cos^{\frac{2}{3}}\theta+\sin^{\frac{2}{3}}\theta)=a^{\frac{2}{3}}\ (a>0)$	$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$	
参数方程	$\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$	$0\leqslant t\leqslant 2\pi$	
对称性	关于原点和坐标轴都对称		
围成面积	$\frac{3}{8}\pi a^2$		
曲线周长	$6a$		
绕坐标轴旋转的体积	$\frac{32}{105}\pi a^3$		

(3) 动圆外切于定圆做无滑动的滚动时形成外摆线,当动圆和定圆的半径相等时,所形成的曲线是心形线。

心形线的图形和相关信息汇总如表 1.6～表 1.9 所示。

表 1.6

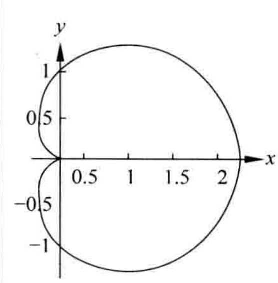
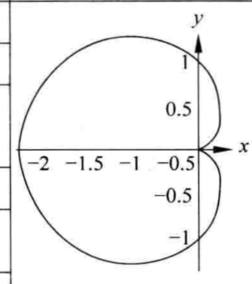
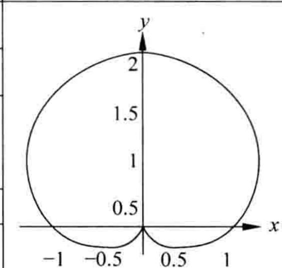
曲线名称		心形线	
曲线方程 1		取值范围	图形 1
直角方程	$x^2+y^2=a(x+\sqrt{x^2+y^2})$		($a=1$)
极坐标方程	$\rho=a(1+\cos\theta)$	$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$	
参数方程	$\begin{cases}x=a(1+\cos t)\cos t\\ y=a(1+\cos t)\sin t\end{cases}$	$0\leqslant t\leqslant 2\pi$	
对称性	关于 x 轴($y=0$)对称		
围成面积	$\frac{3}{2}\pi a^2$		
曲线周长	$8a$		

表 1.7

<table>
<tr><td colspan="2">曲线名称</td><td colspan="2">心形线</td></tr>
<tr><td colspan="2">曲线方程 2</td><td>取值范围</td><td>图形 2</td></tr>
<tr><td>直角方程</td><td>$x^2+y^2=a(-x+\sqrt{x^2+y^2})$</td><td></td><td rowspan="6">

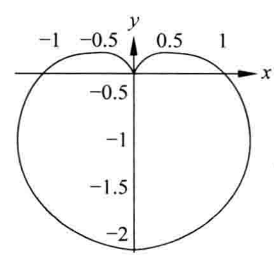
($a=1$)</td></tr>
<tr><td>极坐标方程</td><td>$\rho=a(1-\cos\theta)$</td><td>$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$</td></tr>
<tr><td>参数方程</td><td>$\begin{cases}x=a(1-\cos t)\cos t\\ y=a(1-\cos t)\sin t\end{cases}$</td><td>$0\leqslant t\leqslant 2\pi$</td></tr>
<tr><td>对称性</td><td colspan="2">关于 x 轴($y=0$)对称</td></tr>
<tr><td>围成面积</td><td colspan="2">$\frac{3}{2}\pi a^2$</td></tr>
<tr><td>曲线周长</td><td colspan="2">$8a$</td></tr>
</table>

表 1.8

<table>
<tr><td colspan="2">曲线名称</td><td colspan="2">心形线</td></tr>
<tr><td colspan="2">曲线方程 3</td><td>取值范围</td><td>图形 3</td></tr>
<tr><td>直角方程</td><td>$x^2+y^2=a(y+\sqrt{x^2+y^2})$</td><td></td><td rowspan="6">

($a=1$)</td></tr>
<tr><td>极坐标方程</td><td>$\rho=a(1+\sin\theta)$</td><td>$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$</td></tr>
<tr><td>参数方程</td><td>$\begin{cases}x=a(1+\sin t)\cos t\\ y=a(1+\sin t)\sin t\end{cases}$</td><td>$0\leqslant t\leqslant 2\pi$</td></tr>
<tr><td>对称性</td><td colspan="2">关于 y 轴($x=0$)对称</td></tr>
<tr><td>围成面积</td><td colspan="2">$\frac{3}{2}\pi a^2$</td></tr>
<tr><td>曲线周长</td><td colspan="2">$8a$</td></tr>
</table>

表 1.9

<table>
<tr><td colspan="2">曲线名称</td><td colspan="2">心形线</td></tr>
<tr><td colspan="2">曲线方程 4</td><td>取值范围</td><td>图形 4</td></tr>
<tr><td>直角方程</td><td>$x^2+y^2=a(-y+\sqrt{x^2+y^2})$</td><td></td><td rowspan="6">

($a=1$)</td></tr>
<tr><td>极坐标方程</td><td>$\rho=a(1-\sin\theta)$</td><td>$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$</td></tr>
<tr><td>参数方程</td><td>$\begin{cases}x=a(1-\sin t)\cos t\\ y=a(1-\sin t)\sin t\end{cases}$</td><td>$0\leqslant t\leqslant 2\pi$</td></tr>
<tr><td>对称性</td><td colspan="2">关于 y 轴($x=0$)对称</td></tr>
<tr><td>围成面积</td><td colspan="2">$\frac{3}{2}\pi a^2$</td></tr>
<tr><td>曲线周长</td><td colspan="2">$8a$</td></tr>
</table>

(三)螺线

螺线(Spiral Cord),螺旋体的一圈或线圈在平面极坐标系中,如果极径 ρ 随极角 θ 的增加而成比例增加(或减少),这样的动点所形成的轨迹就称为螺线。

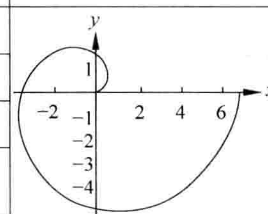
下面介绍三种常见的螺线:阿基米德螺线、对数螺线、双曲螺线。

1. 阿基米德螺线

阿基米德螺线(Archimedes Spiral)亦称“等速螺线”。当一点 P 沿动射线 OP 以等速率运动的同时,该射线又以等角速度绕点 O 旋转,点 P 的轨迹称为“阿基米德螺线”。

阿基米德螺线的应用最初是为了解决用尼罗河水灌溉土地的难题,阿基米德发明了圆筒状的螺旋扬水机,后人称它为“阿基米德螺旋”。除了杠杆系统外,值得一提的还有举重滑轮、灌地机、扬水机以及军事上用的抛石机等。被称做“阿基米德螺旋”的扬水机至今仍在埃及等地使用。一些喷淋冷却塔所用的螺旋喷嘴喷出喷淋液的运动轨迹也为阿基米德螺线。阿基米德螺线的综合信息见表 1.10。

表 1.10

<table>
<tr><td colspan="2">曲线名称</td><td colspan="2">阿基米德螺线</td></tr>
<tr><td colspan="2">曲线方程</td><td>取值范围</td><td>图形 1</td></tr>
<tr><td>直角方程</td><td>$(x^2+y^2)^3=(2axy)^2$</td><td></td><td rowspan="5">

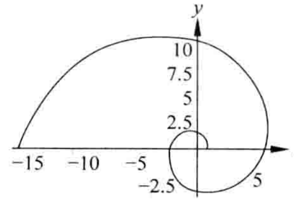
$(a=1)$
$(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$</td></tr>
<tr><td>极坐标方程</td><td>$\rho=a\theta(a>0)$</td><td>$0\leqslant\theta<+\infty$</td></tr>
<tr><td>对称性</td><td colspan="2">没有对称性</td></tr>
<tr><td>围成面积</td><td colspan="2">$\frac{4}{3}\pi^3a^2$</td></tr>
<tr><td>曲线周长</td><td colspan="2">$\frac{a}{2}[2\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})]$</td></tr>
</table>

2. 对数螺线

对数螺线亦称“等角螺线”,是由笛卡儿在 1683 年发现的。雅格布·伯努利后来重新研究发现了等角螺线的许多特性,如等角螺线经过各种适当的变换之后仍是等角螺线。他十分惊叹和欣赏这种曲线的特性,故要求死后将之刻在自己的墓碑上,并附词“使改变,依然故我”,可惜雕刻师误将阿基米德螺线刻了上去。对数螺线是一根无止尽的螺线,它永远向着极点绕,越绕越靠近极点,但又永远不能到达极点。据说,使用最精密的仪器也看不到一根完全的对数螺线,这种图形只存在于科学家的假想中。

自然界中很多现象都呈对数螺线,比如鹦鹉螺的贝壳、菊的种子排列成对数螺线,鹰以对数螺线的方式接近它们的猎物,昆虫以对数螺线的方式接近光源,蜘蛛网的构造与对数螺线相似,旋涡星系的旋臂差不多是等角螺线。对数螺线的综合信息见表 1.11。

表 1.11

<table>
<tr><td colspan="2">曲线名称</td><td colspan="2">对数螺线(等角螺线)</td></tr>
<tr><td colspan="2">曲线方程</td><td>取值范围</td><td>图形</td></tr>
<tr><td>直角方程</td><td>$\ln(x^2+y^2)=2a\arctan\frac{y}{x}$</td><td>$x\neq 0$</td><td rowspan="4">

$(a=1)$</td></tr>
<tr><td>极坐标方程</td><td>$\rho=e^{a\theta}$</td><td>$0<\theta<+\infty$</td></tr>
<tr><td>参数方程</td><td>$\begin{cases}x=e^{at}\cos t\\y=e^{at}\sin t\end{cases}$</td><td>$0<t<+\infty$</td></tr>
<tr><td>对称性</td><td colspan="2">没有对称性</td></tr>
</table>

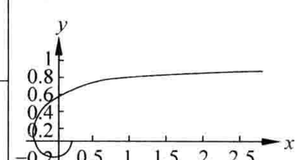
3. 双曲螺线

双曲螺线(Hyperbolic Spiral)又称倒数螺线(Reciprocal Spiral)，是阿基米德螺线的倒数。称极径与极角成反比的点的轨迹为双曲螺线。

双曲螺线很奇异，它尾部非常直，几乎可以当作直线来看待，它的螺旋中心无限小，可以看做一个至小无内的点，也可以看做一个圆环，它的半径从无限小到无限大(双曲螺线的半径是指该曲线上的点到螺旋中心的距离)，所以双曲螺旋系可以看做是半径依次增加的圆，在每个圆上各取一点，然后连接所有的点构成的曲线。沿着 x 轴对折螺旋线，可以形成大小不等的长横轴椭圆，沿着 y 轴对折，可以形成长立轴椭圆。

双曲螺旋线应用很广泛，如 2003 年新型专利公开了一种双曲面螺旋齿轮，该齿轮的节圆面取双曲回转面的中心咽喉部分，齿形为与节线 N 相垂直的双曲螺旋线。双曲螺线的综合信息见表 1.12。

表　1.12

<table>
<tr><td colspan="2">曲线名称</td><td colspan="2">双曲螺线</td></tr>
<tr><td colspan="2">曲线方程</td><td>取值范围</td><td>图形</td></tr>
<tr><td>直角方程</td><td>$\sqrt{(x^2+y^2)}=\dfrac{a}{\arctan\dfrac{y}{x}}$</td><td>$x\neq0,y\neq0,y<a$</td><td rowspan="5">

$(a=1)$</td></tr>
<tr><td>极坐标方程</td><td>$\rho=\dfrac{a}{\theta}$</td><td>$0<\theta<+\infty$</td></tr>
<tr><td>参数方程</td><td>$\begin{cases}x=a\dfrac{\cos t}{t}\\ y=a\dfrac{\sin t}{t}\end{cases}$</td><td>$0<t<+\infty$</td></tr>
<tr><td>对称性</td><td colspan="2">没有对称性</td></tr>
<tr><td>渐近线</td><td colspan="2">$y=a$</td></tr>
</table>

(四)伯努利双纽线

双纽线设定线段 AB 长度为 $2a$，动点 M 满足 $MA\times MB=a^2$，M 的轨迹称为双纽线。

伯努利双纽线在纺织中作为花纹得到广泛应用，用双纽线编织的布料外形美观，结构紧密，具有重复性和渐变性。伯努利双纽线无撞击双进气拓宽流量增压器在工业中得到广泛应用。在雅格布・伯努利的《猜度术》一书中，将伯努利双纽线广泛应用到赌博术中。伯努利双纽线的综合信息见表 1.13 和表 1.14。