XIANXING DAISHU FUDAO

线性代数辅导

主编 沈亦一 田原

东华大学出版社

线性代数辅导

主编　沈亦一　田　原
编者　李　娜　陈晓龙　梁亦孔
　　　谢秋玲　熊邦松　胡远波

東華大學出版社

内容提要

本书为《线性代数》(田原、沈亦一主编，东华大学出版社)的配套教学辅导用书，包含了配套教材中各章习题的详细解答。全书共七章，内容包括行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、矩阵的相似对角化、二次型、线性空间和线性变换。每章分为七个部分：基本要求、内容提要、重点难点、常见错误、典型例题、习题详解和补充习题(附解答和提示)。

本书内容详实，叙述精练，概括了各章的知识点，明确了教学要求，指出了重点、难点以及学习过程中常见的错误，拓宽了例题和习题的深度和广度。本书可供高等工科院校师生使用，也可供考研的学生参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数辅导 / 沈亦一，田原主编. —上海：东华大学出版社，2013.7

ISBN 978-7-5669-0326-6

Ⅰ.①线… Ⅱ.①沈… ②田… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 167058 号

责任编辑：杜亚玲
文字编辑：库东方
封面设计：潘志远

线性代数辅导
主编 沈亦一 田 原
出 版：东华大学出版社(上海市延安西路 1882 号，200051)
出版社网址：http://www.dhupress.net
天猫旗舰店：http://dhdx.tmall.com
营 销 中 心：021-62193056 62373056 62379558
印 刷：苏州望电印刷有限公司
开 本：710 mm×1 000 mm 1/16
印 张：13
字 数：270 千字
版 次：2013 年 7 月第 1 版
印 次：2013 年 7 月第 1 次印刷
书 号：ISBN 978-7-5669-0326-6/O·018
定 价：27.00 元

前　言

本书为《线性代数》(田原、沈亦一主编，东华大学出版社)的配套教学辅导用书，包含了配套教材中各章习题的详细解答。本书的章节次序与教材一致，内容包括行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、矩阵的相似对角化、二次型、线性空间和线性变换。每章分为七个部分：基本要求、内容提要、重点难点、常见错误、典型例题、习题详解和补充习题(附解答和提示)。

基本要求部分以教育部颁布的《高等学校工科各专业线性代数课程基本要求》为依据，明确了对各个章节的教学要求；内容提要部分概括了各章的知识点，包括定义、性质、定理以及重要的结论，便于读者对每一章的知识进行梳理、归纳和复习；重点难点部分进一步明确了学习的方向和策略，便于读者对可能遇到的困难有所准备；常见错误部分依据编者多年的教学经验，指出了学生在学习过程中容易出现的错误，分析了错误产生的原因，不仅给出正确的方法，而且就如何避免出现类似错误给出了建议；典型例题部分进一步拓宽了教材例题的广度和深度，题型更加丰富，分析更加详细透彻，一题多解开阔了读者的思路，有助于培养分析问题、解决问题的能力和灵活性；习题详解部分给出了配套教材中所有习题详尽的解答，方便读者自学，使读者不仅知道每道习题的正确答案，而且能够了解正确的解题过程和方法；补充习题部分包括了选择题、填空题和是非判断题，可供读者对每一章的学习进行自查。本书内容详实，叙述精练，可供高等工科院校作为教学辅导用书。例题和习题中也大量吸收了历年考研的真题，所以本书对考研学生也有很好的参考价值。

本书由沈亦一、田原主编，第一章至第七章分别由熊邦松、胡远波、田原、谢秋玲、梁亦孔、李娜和陈晓龙执笔撰写。

本书作为上海工程技术大学“建设与培养高素质应用型人才相适应的基础学科基地”学科建设项目之一，得到了学校和基础教学学院的大力支持。本书在编写过程中，得到了数学教学部全体教师的关心和支持，在此一并表示感谢！

由于编者的水平和能力有限，书中错误难免，敬请同行和读者批评和指正。

编者

2013 年 7 月

目　录

第一章 行 列 式

一、基 本 要 求

1. 熟练掌握对角线法则计算二阶、三阶行列式.
2. 了解 n 阶行列式的定义，知道代数余子式与行列式的关系.
3. 掌握行列式的性质，会用行列式的性质计算行列式.
4. 会用克拉默法则求解线性方程组.

二、内 容 提 要

1. 二阶行列式

(1) 定义 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

(2) 计算(对角线法则) 沿实线的主对角线两数乘积减去沿虚线的副对角线两数乘积. 如下图所示：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

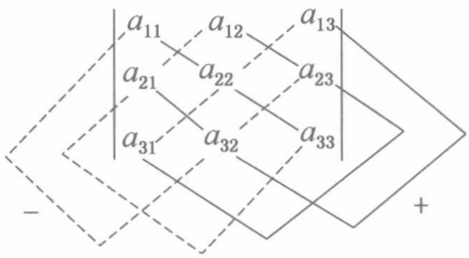
2. 三阶行列式

(1) 定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

(2) 计算(对角线法则) 三阶行列式含有 6 项，每项为取自不同行、不同列的

3 个元素的乘积，沿实线的乘积项带正号，沿虚线的乘积项带负号. 如下图所示：



3. n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\,(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

$$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\,(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式. 上述两式分别是 n 阶行列式 D 按第 i 行和第 j 列的展开式.

4. 几个特殊行列式

(1) 上三角行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$；

(2) 下三角行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$；

(3) 对角行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

5. 转置行列式

将行列式 D 的行与列互换得到的行列式称为 D 的转置行列式，记作 D^{T} 或 D'.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

6. 行列式的性质

(1) 性质 1　行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

(2) 性质 2　互换行列式的两行(列)，行列式变号.

推论 1　如果行列式有两行(列)完全相同，则此行列式等于零.

推论 2　行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\quad(i\neq j),$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0\quad(i\neq j).$$

令　$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$, 则有

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D, & i=j;\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D, & i=j;\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

(3) 性质 3　行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面.

推论 1　行列式的某一行(列)所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式.

推论 2　行列式的某一行(列)所有的元素全为零，则行列式等于零.

(4) 性质 4　行列式中如果有两行(列)元素成比例，则此行列式等于零.

(5) 性质 5　行列式的某一行(列)的元素都是两数之和，则行列式等于两个行列式之和.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(6) 性质 6　把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数,然后加到另一行(列)对应的元素上去,行列式值不变.

7. 范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$\begin{aligned} V_n &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)(x_3-x_2)\cdots(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1}) \\ &= \prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j). \end{aligned}$$

范德蒙德行列式 $V_n \neq 0$ 的充分必要条件是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 互不相等,而 $V_n = 0$ 的充分必要条件是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中至少有两个数相等.

8. 常用行列式计算方法

(1) 根据定义将行列式按某行或某列展开以降低阶数.

(2) 利用性质将行列式化为上(下)三角行列式.

(3) 拆分法:利用行列式的性质 5 将行列式拆分为两个或多个行列式之和.

(4) 加边法:将行列式加一行一列,变成高一阶行列式后再计算.

(5) 递推法:根据行列式特点找出 n 阶行列式 D_n 与相应低阶行列式 D_{n-1}, D_{n-2}, $\cdots$, D_1 间的递推关系,有时也可以用数学归纳法.

(6) 利用范德蒙德行列式的结论计算某些特殊的行列式.

9. 克拉默法则

对 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

当其系数行列式 $D \neq 0$ 时，方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n = \frac{D_n}{D},$$

其中 $D_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 是用方程组等号右边的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 替换系数行列式 D 中的第 k 列所得的 n 阶行列式.

若常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 全为零，则齐次线性方程组有非零解的充要条件是它的系数行列式 $D=0$.

三、重点难点

本章重点 行列式的定义与性质，利用行列式的性质计算行列式.

本章难点 行列式按行(列)展开，一些特殊行列式的计算.

四、常见错误

错误 1 互换两行(列)，行列式相等.

分析 互换行列式两行(列)，行列式应反号.

错误 2 $\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

分析 若 n 阶行列式的所有元素都有公因式 k，则每一行都可以提出公因式 k. 故

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

错误 3 $\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix}$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.
$$

分析 若行列式的每一行(列)的元素都是两数之和,则对于每一行(列)元素的分拆将每个行列式化为两个行列式之和.

$$
\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
+\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix}.
$$

重复上述步骤,最终将原行列式拆分成 2^n 个行列式之和,由此可见错误 3 中只写出了其中的 2 个行列式.

五、典型例题

【例 1】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

解一 $D\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&0&-1&1\\0&-1&0&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&-1&0&1\\0&0&-1&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_4+r_3]{r_4+r_2}-\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&-1&0&1\\0&0&-1&1\\0&0&0&3\end{vmatrix}=-3.$$

解二 由于行列式每行之和相等,将行列式的后三列都加到第一列,再提取第一列的公因数:

$$D=\begin{vmatrix}3&1&1&0\\3&1&0&1\\3&0&1&1\\3&1&1&1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{c_3-c_1\\c_4-c_1}]{c_2-c_1}3\begin{vmatrix}1&0&0&-1\\1&0&-1&0\\1&-1&0&0\\1&0&0&0\end{vmatrix},$$

按第 4 行展开,$D=3\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\-1&0&0\end{vmatrix}=-3.$

【例 2】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$.

分析 此题为一般数字行列式,可以选择零最多的某一行(列),利用行列式的性质将该行(列)元素化为只有一个元素不为零,然后展开行列式,化成一个降阶行列式计算.

解 $D\xlongequal[c_3+c_4]{c_1+2c_4}\begin{vmatrix}7&1&1&2\\-13&1&-1&-4\\0&0&0&-1\\-5&-5&0&-3\end{vmatrix}$

$$=(-1)\times(-1)^{3+4}\begin{vmatrix}7&1&1\\-13&1&-1\\-5&-5&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+r_1}\begin{vmatrix}7&1&1\\-6&2&0\\-5&-5&0\end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-6&2\\-5&-5\end{vmatrix}=40.$$

【例 3】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & c+d & 1 \\ b & c & d+a & 1 \\ c & d & a+b & 1 \\ d & a & b+c & 1 \end{vmatrix}$.

解 注意到前三列的每行元素之和相等，于是将行列式的第二列和第三列都加到第一列上，又所得行列式的第一列与第四列对应元素成比例，即

$$D\xlongequal[c_1+c_3]{c_1+c_2}\begin{vmatrix} a+b+c+d & b & c+d & 1 \\ a+b+c+d & c & d+a & 1 \\ a+b+c+d & d & a+b & 1 \\ a+b+c+d & a & b+c & 1 \end{vmatrix}=0.$$

【例 4】 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$.

解一(拆分法) 按行列式的最后一列，将它拆分成两个行列式之和，得

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}+b_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}+b_{n-1} & 0 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & b_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}+b_n\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}+b_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=b_1b_2\cdots b_{n-1}a_n+b_nD_{n-1}.$$

因为 $D_1=a_1+b_1$，由递推关系可得

$$\begin{aligned}D_n &= b_1b_2\cdots b_{n-1}a_n + b_n(b_1b_2\cdots b_{n-2}a_{n-1} + b_{n-1}D_{n-2}) \\ &= b_1b_2\cdots b_{n-1}a_n + b_1b_2\cdots b_{n-2}a_{n-1}b_n + b_nb_{n-1}D_{n-2} \\ &= \cdots = b_1b_2\cdots b_{n-1}a_n + b_1b_2\cdots b_{n-2}a_{n-1}b_n + \cdots + a_1b_2\cdots b_{n-1}b_n + b_1b_2\cdots b_{n-1}b_n.\end{aligned}$$

解二(加边法) 如果 $b_1b_2\cdots b_{n-1}b_n \neq 0$，显然有

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}+b_{n-1} & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,\,2,\,\cdots,\,n]{r_1 - \frac{a_i}{b_i}r_{i+1}} \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i}{b_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n \end{vmatrix}$$

$$= (1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i})b_1b_2\cdots b_{n-1}b_n.$$

如果 $b_1b_2\cdots b_{n-1}b_n = 0$，请读者自行考虑. 由本例可以看出，虽然行列式加边后增加了阶数，但计算量并不一定就增加. 对一行或一列有相同字母的行列式可以考虑这种方法.

【例 5】 已知 $abcd = 1$，计算行列式 $D = \begin{vmatrix} a^2+1/a^2 & a & 1/a & 1 \\ b^2+1/b^2 & b & 1/b & 1 \\ c^2+1/c^2 & c & 1/c & 1 \\ d^2+1/d^2 & d & 1/d & 1 \end{vmatrix}$.

解 $$D=\begin{vmatrix} a^2 & a & 1/a & 1 \\ b^2 & b & 1/b & 1 \\ c^2 & c & 1/c & 1 \\ d^2 & d & 1/d & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1/a^2 & a & 1/a & 1 \\ 1/b^2 & b & 1/b & 1 \\ 1/c^2 & c & 1/c & 1 \\ 1/d^2 & d & 1/d & 1 \end{vmatrix}$$

$$=abcd\begin{vmatrix} a & 1 & 1/a^2 & 1/a \\ b & 1 & 1/b^2 & 1/b \\ c & 1 & 1/c^2 & 1/c \\ d & 1 & 1/d^2 & 1/d \end{vmatrix}+(-1)^3\begin{vmatrix} a & 1 & 1/a^2 & 1/a \\ b & 1 & 1/b^2 & 1/b \\ c & 1 & 1/c^2 & 1/c \\ d & 1 & 1/d^2 & 1/d \end{vmatrix}=0.$$

【例 6】 证明 $$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$=a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots+a_2x^{n-2}+a_1x^{n-1}.$$

证一（递推法） 先计算出 $D_2=a_1x+a_2$，再将 D_n 按最后一行展开，得

$$D_n=(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}+$$

$$(-1)^{n+n}x\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=a_n+xD_{n-1},$$

$$D_n=a_n+xD_{n-1}=a_n+x(a_{n-1}+xD_{n-2})=a_n+a_{n-1}x+x^2D_{n-2}$$

$$=\cdots=a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots+x^{n-2}D_2$$

$$=a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots+a_2x^{n-2}+a_1x^{n-1}.$$

注：得到递推式后，可以用数学归纳法证明.

证二 从第二行起，依次加上上一行的 x 倍，得