金融投资学与数量经济学若干问题研究

王雪峰　著

哈爾濱工業大學出版社

金融投资学与数量经济学若干问题研究

王雪峰　著

哈爾濱工業大學出版社

内容简介

本书的内容是属于金融投资学和数量经济学的。金融投资学方面包括连续现金流的内在价值函数、连续现金流的久期问题和没有正负号限制的连续现金流的投资学问题研究，新的股价指数编制方法，能够反映成交量信息的股价移动平均线系统，股票期权定价公式相关问题研究等内容；数量经济学方面包括结合生产函数的利润最大化法则的数理经济分析方法，N-线性计量经济学模型研究，幂指数求和型生产函数模型研究，线性计量经济学模型的最大相关系数参数估计法，计量经济学模型的最小变差平方和参数估计方法，微分方程半问题模型研究等内容。

本书的内容适合作为大专院校经济管理专业师生的参考书。特别地，本书适合作为金融专业的研究生、博士生和喜欢金融数学的学生们的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

金融投资学与数量经济学若干问题研究/王雪峰著.
—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2013.11
ISBN 978-7-5603-4262-7

Ⅰ.①金… Ⅱ.①王… Ⅲ.①金融投资－研究 ②数量经济学－研究 Ⅳ.①F830.59 ②F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 251186 号

责任编辑 尹继荣
封面设计 古杨文
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451－86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 黑龙江省地质测绘印制中心印刷厂
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张 18.25 字数 418 千字
版　　次 2013 年 11 月第 1 版 2013 年 11 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-4262-7
定　　价 48.00 元

前　言

本书的大部分内容是我近十几年来与我的研究生们共同在金融学领域和数量经济学领域中所做的一些研究的总结，这实际上是一本论文集，其中的部分结果已在国内外学术期刊上发表。我在讲授和学习金融学理论的过程中经常会产生一些有趣的新想法，我把其中我认为有学术价值的想法进行反复的分析与考证，在确认这些想法值得研究的情况下，根据我带的研究生的数学基础、金融学基础、经济学基础和兴趣特点为他们确定硕士论文和博士论文的题目。值得欣慰的是，我的学生们都能投入较多的精力和较大的热情参与其中，完成预期的研究任务。当然，研究中经常面临的各种数学困难需要我来做相应的论证和推导。幸运的是这些研究课题中所遇到的各种数学方面的难题都得到了满意的解决。

由于我一直不愿意申报课题，所以本书得到的这些研究结果几乎都是在没有课题经费支持的情况下完成的。我的这种行事方式完全不合现在的潮流。由于没有经费支持，所以我很少参加学术会议，这些研究成果也几乎不被同行们所知晓。我知道我的这种做研究的方式有许多不合理之处，但习惯已形成，我对自己也无可奈何。在把我的研究生们和博士生们的学位论文整理成书稿的过程中，我不断地发现许多问题，包括语言表述欠妥、资料不完善、逻辑结构不合理等，甚至还有一些数学公式推导方面的小错误。我只好重新推导这些公式和反复修改所发现的各种错误。这当然需要投入巨大的精力，这是一个艰苦的过程。

在 2010 年，我考虑到了资产收益率的定义式可以作为这项研究的出发点，我与我的硕士研究生陈正同学一起研究这个问题，得到了一些预期的结果。后来我又在此基础上深入讨论了有关连续现金流的久期问题和没有正负号限制的连续现金流的投资学问题，这些内容构成了第 1 章的主要内容。在第 2 章中提出了一种新的股价指数编制方法并做了深入的理论研究，对已有的各种股价指数编制方法的合理性提出疑问。新的股价指数编制方法能够反映市场中不同股票股价变动的不同步情况。由于这样的研究内容不适合让研究生来做，我只好自己来做。在第 3 章中构建了一类新的能够反映成交量信息的股价移动平均线系统，这是一种新的关于风险资产市场价格的技术分析方法，该方法最大的特点是计算股价移动平均线时所使用的时间窗宽度是动态变化的，时间窗的宽度由固定交易时间内积累成交量的水平决定。第 3 章的内容是基于我的硕士研究生单文涛同学的硕士学位论文整理而成。第 4 章中讨论了著名的 Black－Scholes 期权定价公式的相关问题，结论是 Black－Scholes 期权定价公式并不正确，而当年萨缪尔森发表的期权定价公式是正确的。由于这样的研究内容不适合让研究生来做，我也只好自己来做。第 4 章中的一些计算工作是由我的硕士研究生张贺清同学帮助完成的。在第 5 章中讨论了在数

理经济分析中经常使用的结合生产函数的利润最大化法则，指出了其中的不合理之处，推导出一些合理的数学公式。在第 6 章中我们仔细研究了 N－线性计量经济学模型的理论问题和应用问题，这是一类特殊的可以线性化的非线性计量经济学模型。在第 7 章中我们深入研究了一类幂指数求和型生产函数模型的理论问题和应用问题。第 6 章和第 7 章的内容是基于我指导的博士生苏杭同学的博士学位论文并增加若干新内容而构成。在第 8 章中给出一类新的线性计量经济学模型的最大相关系数参数估计方法。第 8 章中的算例部分是由我的硕士研究生王丹萍同学帮助完成的。在第 9 章中给出一类非线性计量经济学模型的最小变差平方和参数估计方法，通过算例分析说明该方法可以较好地识别被解释变量与所关心变量之间的非线性关系。第 10 章主要研究一类特殊的微分方程问题，我们称之为微分方程半问题，给出了若干种微分方程半问题模型的形式，并对每一种模型给出了求解方法。第 8 章至第 10 章内容是作者本人完成的。

没有我的研究生们的学位论文资料，我不可能完成本书的整理工作，所以我要感谢我的研究生们的辛勤劳动。我也要感谢他们对我的信任，因为我为他们选择的题目他们都毫无怨言地接受了，而且一旦选定目标就进入良好的研究状态。我带过的研究生中有几位是有很好的研究天赋的，但他们都选择了到金融企业工作，他们不愿意当一名学者，这让我感到有些遗憾。我想当他们看到本书时一定会很高兴的。

王雪峰

2013 年 6 月于哈工大

目　录

第 1 章 连续现金流决定的内在价值函数的投资学性质研究

本章的研究方法是用函数的观点来考察资产的内在价值随时间的变动规律，这实际上是在每一时刻用经典的现金流贴现模型原理求得资产的内在价值。我们从连续形式的收益率方程导出资产的内在价值函数公式，证明了内在价值函数的若干性质，给出连续现金流所决定的久期函数的定义，并研究内在价值函数与久期函数之间的内在关系，对于一些常用形式的现金收益函数（现金流）给出了相应的内在价值函数的解析公式。当我们对现金流的符号没有限制时，相应的内在价值函数和久期函数有许多特殊的性质，涉及一些新的投资学问题，本章对此进行了尽可能深入和全面的研究。

1.1 收益率方程决定的资产的内在价值函数及其性质

1.1.1 资产的现金流贴现模型及其各种形式

内在价值理论的研究开始于美国投资大师本杰明·格雷厄姆。格雷厄姆被人们誉为证券分析原则的确立者，他与大卫·多德于 1934 年出版的《证券分析》一书标志着证券分析业的诞生。在《证券分析》一书中格雷厄姆对 1929 年美国股票市场价格暴跌进行了深刻反思，认为股票价格的波动是建立在股票“内在价值”基础上的，股票价格会由于各种非理性原因偏离“内在价值”，但随着时间的推移这种偏离会得到纠正而回到“内在价值”。因此，股票价格的未来表现可通过与“内在价值”的比较而加以判断。

此后人们开始对内在价值进行量化分析的研究与探索，其中历史最为悠久的当属市盈率模型。此后欧文·费雪提出了现金流贴现模型（DCF），在这一理论模型的指导下出现了一些经典的模型，其中包括威廉姆斯在 1938 年提出的股利贴现模型（DDM），其最一般的表达式为

$$V = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+r)^t}$$

其中，V 表示股票的内在价值；D_t 表示股票在未来第 t 期支付的股利和红利；r 表示市场认可的预期的收益率。由此派生出了若干个内在价值的贴现模型，这些模型在现今股票投资分析中得到了普遍应用。

当未来的股息收入取一个固定的常数时，最简单形式的现金流贴现模型（股票内在价值的公式）成立，这就是零增长股息贴现模型，即

$$V = \frac{D_0}{r}$$

其中，D_0 是每一期固定的股息收入，r 是贴现率。

若股票未来的股息收入以固定的增长率(g) 增加，即有

$$D_i = D_0\ (1+g)^i$$

代入 DDM 模型，经整理可得到下面的 Gordon 模型，即

$$V = \frac{D_1}{r-g}$$

其中，$D_1 = D_0(1+g)$，r 是贴现率，g 是红利增长率，V 是资产在 $t=0$ 时刻的内在价值。该模型的特点是公式简洁，重要的投资学变量间的关系简单，便于定量分析和定性分析。

三阶段增长模型将股息的增长分成三个不同的阶段：在第一个阶段，股息的增长率为一个常数 g_a；第二阶段是股息增长的转折期，股息的增长率由 g_a 线性增长为 g_n；在第三阶段股息以不变的增长率 g_n 一直到永远。当 $g_a > g_n$ 时表现为在转折期股息收入水平递减，当 $g_a < g_n$ 时表现为在转折期股息收入水平递增。第一个阶段的时间为[0，A]，第二个阶段的时间为[A，B]，第三个阶段的时间为[B，∞)。相应的内在价值公式为

$$V = D_0 \sum_{t=1}^{A} \left(\frac{1+g_a}{1+r}\right)^t + \sum_{t=A+1}^{B} \frac{D_{t-1}(1+g_t)}{(1+r)^t} + \frac{D_B(1+g_n)}{(1+r)^B(r-g_n)}$$

其中

$$g_t = g_a - (g_a - g_n)\frac{t-A}{B-A}$$

股息贴现模型的 H 模型假定初始增长率为 g_a，然后以线性方式递增或递减，从 $2H$ 期后股息的增长率为一个常数 g_n。相应的内在价值公式为

$$V = \frac{D_0}{(r-g_n)}[(1+g_n) + H(g_a - g_n)]$$

H 模型的优点是有简单的内部收益率(IRR) 公式，即

$$IRR = \frac{D_0}{P}[(1+g_n) + H(g_a - g_n)] + g_n$$

可以方便地用市场价格 P 计算相应的内部收益率 IRR，从而判断股票价值是被高估还是被低估。

若考虑投资者持有资产的期限为有限时间的情况，有相应的股利贴现模型为

$$V = \sum_{t=1}^{N} \frac{D_t}{(1+r)^t} + \frac{P_N}{(1+r)^N}$$

其中，P_N 是期末时刻资产的价格。

在这之后，人们开始寻找比股利更能客观衡量企业预期收益的经济指标，最终确定为一个比较基本的变量 —— 自由现金流，并由此提出了自由现金流贴现模型(FCF)，即

$$V = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{FCF_t}{(1+WACC)^t}$$

其中，FCF_t 表示资产第 t 期的自由现金流，$WACC$ 指企业加权资金成本。

当使用自由现金流贴现模型表达债券的内在价值时，有以下的贴现公式，即

$$\text{债券价值} = \sum_{t=1}^{T} \frac{\text{息票利率}}{(1+r)^t} + \frac{\text{面值}}{(1+r)^T}$$

1.1.2 用函数的观点来考察资产的内在价值

现金流贴现模型是人们在投资分析中用来评估资产价值的最主要的数学模型，对于股票价值的评估有股息贴现模型，对于债券和其他金融资产的价值评估有一般的自由现金流贴现模型。资产在未来时期内的现金收益和期末时刻的资产价格，再加上未来的贴现率水平是决定当前时刻资产内在价值的三个重要因素。通过现金流贴现模型，人们可以方便地研究利率的变动与资产内在价值变动之间的定量关系。人们还可以将资产的市场价格当作其内在价值，通过现金流贴现模型求解出对应的内部收益率 *IRR*，比较所求得的内部收益率与市场利率的关系，再考虑到投资者对投资于风险资产所要求的风险溢价因素，人们就可以评估市场对资产的定价是否是高估的或是低估的，从而指导投资者的投资行动。

关于现金流贴现模型可以在一些方面进行更为深入的探讨。一方面，离散形式的现金流贴现模型是金融学家们所熟悉的，而连续形式的现金流贴现模型还没有被系统地研究过，这需要定义连续形式的现金收益函数，还要推导出连续形式的现金流贴现公式。另一方面，有一点被金融学家们所忽略，那就是对于给定未来各时期的现金收益，用现金流贴现模型考察所有不同时刻资产的内在价值，并进而用函数的观点和方法来研究由所有不同时刻资产的内在价值所构成的内在价值函数的各种性质。人们使用现金流贴现模型的通常做法是利用未来的现金流数值和贴现率水平来计算当前时刻资产的内在价值，进而进行资产的价值评估工作，在这个过程中缺少对于内在价值随时间变化的性质的深入探讨。对于内在价值函数的深入分析需要使用更为复杂的数学工具，从而使得相应的投资学理论问题的研究更为深入，这包括内在价值函数曲线的各种性质的研究，函数变换工具的使用，对特定时间段内（而不是在一个时间点上）的资产特征指标的综合分析等。可以说，在引入了内在价值函数的概念以后，人们可以展开关于资产价值评估的新研究。

虽然现金流贴现模型是基于现金的时间价值而建立的，但该模型仍然是一个定义式。若能通过更为基本的金融学原理来推导出现金流贴现公式则是一种有意义的尝试，而且这样的尝试可能有助于对现金流贴现模型的更为深入的研究。本节的主要研究内容集中在用函数的观点和方法来研究由所有不同时刻资产的内在价值所构成的内在价值函数及其各种性质，研究的基础不是从已有的现金流贴现模型出发并通过不断猜测的方式来建立新的模型，我们的做法是从资产收益率的定义式出发进行演绎推理。由连续形式的资产收益率的定义式可以导出连续形式的资产收益率方程，这是一个微分方程，由该方程的解来定义资产的内在价值函数。资产的内在价值函数公式的导出以及进一步的关于这些公式所具有的投资学性质的研究构成了本节的主要内容。

1.1.3 连续形式现金流的收益率方程

假设有一项资产 B，其现金收益是连续实现的，用 $D(t)$ 表示 t 时刻每单位时间实现的现金收益，我们称函数 $D(t)$ 为现金收益函数。用 $P(t)$ 表示 t 时刻每份资产的价格，按照现金收益函数 $D(t)$ 的定义，在时间段 $[t, t+\Delta t]$ 内实现的现金收益为 $D(t)\Delta t$。用 $r(t)$ 表示 t 时刻瞬时的投资收益率，则在时间段 $[t, t+\Delta t]$ 上的投资收益率为 $r(t)\Delta t$。考察时间段 $[t, t+\Delta t]$，有以下的收益率公式成立，即

$$r(t)\Delta t = \frac{D(t)\Delta t + [P(t+\Delta t) - P(t)]}{P(t)}$$

其中，$P(t+\Delta t) - P(t)$ 是时间段 $[t, t+\Delta t]$ 内的资本利得。我们取一个固定贴现率(或称为预期收益率) r，有

$$r\Delta t = \frac{D(t)\Delta t + [P(t+\Delta t) - P(t)]}{P(t)}$$

让 $\Delta t \to 0$，有

$$r = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{D(t) + [P(t+\Delta t) - P(t)]/\Delta t}{P(t)} = \frac{D(t) + P'(t)}{P(t)}$$

对上式整理，有

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} = rP(t) - D(t) \tag{1.1}$$

我们称方程(1.1) 为连续形式的资产收益率方程，这是一个关于 $P(t)$ 的微分方程。对于固定的贴现率 r，若已知未来一段时间内的现金收益函数 $D(t)$，则可以通过方程(1.1) 来求解资产的价格函数 $P(t)$。满足方程(1.1) 的价格函数 $P(t)$ 是公平合理的价格，它就应该是资产 B 的内在价值函数。同样地，对于固定的贴现率 r，若已知资产的内在价值函数 $P(t)$，可以通过方程(1.1) 来求解资产 B 应该实现的现金收益函数 $D(t)$。

1.1.4 由连续现金流的收益率方程推导资产的内在价值函数

在本节中，我们由方程(1.1) 导出内在价值函数 $P(t)$ 的数学公式。先考虑无限长期限的情况，即有现金收益函数 $D(t)$，$t \in [0, +\infty)$。我们假设在 $t \in [0, +\infty)$ 时，$D(t) \geqslant 0$，$P(t) \geqslant 0$，并且有 $r > 0$。方程(1.1) 是一阶微分方程。对于一般的一阶微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$，其通解为

$$y = \mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int q(x)\,\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c\right]$$

方程(1.1) 的自变量用时间参数 t。相应地有 $p(t) = -r$，$q(t) = -D(t)$，代入通解表达式，有

$$P(t) = \mathrm{e}^{rt}\left[\int_0^t -D(\xi)\,\mathrm{e}^{-r\xi}\mathrm{d}\xi + C_0\right] \tag{1.2}$$

其中，C_0 为一个常数。令 $t=0$，由上式得 $C_0 = P(0)$，即

$$P(t) = \mathrm{e}^{rt}\left[\int_0^t -D(\xi)\,\mathrm{e}^{-r\xi}\mathrm{d}\xi + P(0)\right]$$

由于合理的前提是 $0 < r < 1$，$D(t) \geqslant 0$，所以要求 $P(t) \geqslant 0$ 是合理的。

在较宽的前提下积分$\int_0^\infty D(\xi)\,\mathrm{e}^{-r\xi}\mathrm{d}\xi$收敛，我们取 $P(0) = \int_0^\infty D(\xi)\,\mathrm{e}^{-r\xi}\mathrm{d}\xi + C$，其中 C 是待定常数。将 $P(0)$ 的表达式代入上面的 $P(t)$ 的表达式，整理有

$$P(t) = \mathrm{e}^{rt}\left[\int_t^{+\infty} D(\xi)\,\mathrm{e}^{-r\xi}\mathrm{d}\xi + C\right]$$

当 $D(t) \equiv 0$ 时，$P(t)$ 应该等于 0，而这时 $P(t) = \mathrm{e}^{rt} \cdot C$，故有 $C=0$。这样我们就得到了微分方程(1.1) 的符合投资学意义的解 $P(t)$，$P(t)$ 是资产 A 的内在价值函数，$P(t)$ 由下面的公式给出

$$P(t)=e^{rt}\int_t^{+\infty}D(\xi)\,e^{-r\xi}d\xi \tag{1.3}$$

特别当 $t=0$ 时,有

$$P(0)=\int_0^{+\infty}D(\xi)\,e^{-r\xi}d\xi$$

这是连续形式的内在价值的现金流贴现公式。

我们再考虑有限时间期限的情况,即 $t\in[0,T]$。取通解表达式(1.2) 中的 C_0 为

$$C_0=\int_0^T D(\xi)\,e^{-r\xi}d\xi+C$$

C 是待定常数。代入通解表达式(1.2),整理得

$$P(t)=e^{rt}\left[\int_t^T D(\xi)\,e^{-r\xi}d\xi+C\right]$$

假设 $D(t)$ 是 $[0,T]$ 上的连续有界函数,则必有

$$\lim_{t\to T}e^{rt}\int_t^T D(\xi)\,e^{-r\xi}d\xi=0$$

所以有 $P(T)=Ce^{rT}$,即 $C=e^{-rT}P(T)$。$P(T)$ 是 T 时刻资产 B 每一单位资产的价格,C 是 T 时刻资产 B 的价格贴现到 0 时刻的值。所以有

$$P(t)=e^{rt}\left[\int_t^T D(\xi)\,e^{-r\xi}d\xi+e^{-rT}P(T)\right] \tag{1.4}$$

式(1.4) 是有限时间期限的资产 B 的内在价值函数的公式。特别地,当 $t=0$ 时有以下的连续形式的内在价值的贴现公式,即

$$P(0)=\int_0^T D(\xi)\,e^{-r\xi}d\xi+e^{-rT}P(T)$$

1.1.5 连续现金流的内在价值函数的若干性质

在本节中我们给出内在价值函数 $P(t)$ 的若干性质,包括式(1.3) 和式(1.4)。

定理 1.1 由公式(1.3)、(1.4) 决定的内在价值函数 $P(t)$ 关于现金收益函数 $D(t)$ 都是线性的。即若 $D(t)$ 决定了 $P(t)$,则对于任意的 $\alpha\geqslant 0$,$\alpha D(t)$ 决定了 $\alpha P(t)$。若 $D_1(t)$ 决定了 $P_1(t)$,$D_2(t)$ 决定了 $P_2(t)$,则对于任意的 $\alpha\geqslant 0$,$\beta\geqslant 0$,现金收益函数 $\alpha D_1(t)+\beta D_2(t)$ 决定的内在价值函数为 $\alpha P_1(t)+\beta P_2(t)$。

证明 由公式(1.3) 有

$$P(t)=e^{rt}\int_t^{+\infty}D(\xi)\,e^{-r\xi}d\xi$$

对于现金收益函数 $\alpha D(t)$,其内在价值函数用 $P_\alpha(t)$ 表示,有

$$P_\alpha(t)=e^{rt}\int_t^{+\infty}\alpha D(\xi)\,e^{-r\xi}d\xi=\alpha P(t)$$

对于公式(1.4),考虑到现金收益函数 $\alpha D(t)$ 一定是 α 单位的 B 资产所产生的现金收益,所以在 T 时刻 α 单位的 B 资产的价值必为 $\alpha P(T)$。由公式(1.4) 有

$$P(t)=e^{rt}\left[\int_t^T D(\xi)\,e^{-r\xi}d\xi+e^{-rT}P(T)\right]$$

对于现金收益函数 $\alpha D(t)$,有

$$P_\alpha(t)=e^{rt}\left[\int_t^T\alpha D(\xi)\,e^{-r\xi}d\xi+e^{-rT}\alpha P(T)\right]=\alpha P(t)$$

假设现金收益函数 $D_1(t)$ 决定了 $P_1(t)$，现金收益函数 $D_2(t)$ 决定了 $P_2(t)$，则对于无限期限的情况来说，有

$$P_1(t)=e^{rt}\int_t^{+\infty}D_1(\xi)e^{-r\xi}d\xi,\ P_2(t)=e^{rt}\int_t^{+\infty}D_2(\xi)e^{-r\xi}d\xi$$

对于任意的 $\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0$，不难看出下式成立，即

$$\alpha P_1(t)+\beta P_2(t)=e^{rt}\int_t^{+\infty}(\alpha D_1(\xi)+\beta D_2(\xi))e^{-r\xi}d\xi$$

即说明现金收益函数 $\alpha D_1(t)+\beta D_2(t)$ 决定的内在价值函数为 $\alpha P_1(t)+\beta P_2(t)$。对于有限期限的情况，证明方法完全相同，定理得证。

定理 1.1 说明资产的内在价值函数与现金收益函数之间存在线性关系。

定理 1.2 假设 $D(t)$ 为现金收益函数，由公式(1.1) 确定的连续形式的内在价值函数 $P(t)$ 构成一条价格曲线，价格曲线的极大值和极小值点 t 满足

$$rP(t)-D(t)=0$$

当 $rP(t)>D(t)$ 时，$\frac{dP}{dt}>0$，价格曲线递增；当 $rP(t)<D(t)$ 时，$\frac{dP}{dt}<0$，价格曲线递减。而价格曲线的拐点 t 满足

$$r^2P(t)-rD(t)-D'(t)=0$$

证明 定理 1.2 中关于极值问题的结论是公式(1.1) 的显然结果。下面只证明定理中的拐点问题。由于价格曲线的拐点 t 应该满足 $\frac{d^2P}{dt^2}=0$，而由公式(1.1) 有

$$\frac{dP(t)}{dt}=rP(t)-D(t)$$

两边对 t 求导数，有

$$\frac{d^2P}{dt^2}=r\cdot\frac{dP(t)}{dt}-D'(t)=0$$

再将公式(1.1) 代入上式可得

$$r^2P(t)-rD(t)-D'(t)=0$$

定理证毕。

由公式(1.3) 可知，当贴现率为定值时，t 时刻资产 A 的内在价值 $P(t)$ 为

$$P(t)=e^{rt}\int_t^{+\infty}D(\xi)e^{-r\xi}d\xi$$

显然，当 r 的取值不同时，相应的内在价值 $P(t)$ 也将有所不同。这时的表达式应写成 $P(t,r)$，即有

$$P(t,r)=e^{rt}\int_t^{+\infty}D(\xi)e^{-r\xi}d\xi$$

因而我们可以考察内在价值函数 $P(t,r)$ 对 r 的变动的敏感程度。我们有下面的定理。

定理 1.3 由公式(1.3) 决定的内在价值函数 $P(t)$ 与贴现率 r 呈负相关关系。

证明 我们只需证明 $\frac{\partial P(t,r)}{\partial r}\leqslant 0$ 即可。根据 $P(t,r)$ 的表达式有

$$\frac{\partial P(t,r)}{\partial r}=-\int_t^{+\infty}(\xi-t)D(\xi)e^{r(t-\xi)}d\xi$$

因为 $\xi \geqslant t, D(\xi) \geqslant 0, e^{r(t-\xi)} > 0$,积分号中的被积函数取非负值,所以有 $\frac{\partial P(t,r)}{\partial r} \leqslant 0$。定理证毕。

1.1.6 若干现金收益函数与相应的内在价值函数

从函数变换的角度来看,公式(1.3) 定义了由现金收益函数 $D(t)$ 到内在价值函数 $P(t)$ 的一个变换,而收益率公式(1.1) 则定义了由内在价值函数 $P(t)$ 到现金收益函数 $D(t)$ 的变换。在本节中我们选择一些常用形式的现金收益函数 $D(t)$ 来给出解析形式的内在价值函数 $P(t)$,并说明其特点。

1. 现金收益函数取常数值是最简单的一种收益模式,该收益模式描述一类收益水平保持基本不变的企业的收益特征。一些大型企业,其生产规模已经达到适当的水平,已经不存在大规模扩张的可能性,其未来的现金收益可以用常数函数来表达,即 $D(t) = D_0$。与此相对应的内在价值函数的推导如下:

注意到原函数公式 $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$,有

$$P(t) = e^{rt} \int_t^{+\infty} D(\xi) e^{-r\xi} d\xi = e^{rt} \int_t^{+\infty} D_0 e^{-r\xi} d\xi = D_0 e^{rt} \left(-\frac{1}{r} e^{-r\xi}\right) \Big|_t^{+\infty} = \frac{D_0}{r}$$

这时的内在价值函数 $P(t)$ 为一个常数,且 $P(t)$ 与 r 成反比例关系。

2. 现金收益函数取线性形式可以反映一类收益水平稳定增长的企业的收益模式,即 $D(t) = a + bt, a > 0, b > 0$。$b$ 越大,则其收益的增长速度越大。$b = 0$ 时现金收益函数变成了常数。一些企业靠着自身的资本积累不断地平稳地壮大自己,这些企业并不依赖巨额的债务来试图迅速发展壮大自己(比如巨额的银行贷款,或发行巨额的企业债券),这些企业的未来收益水平用线性模型描述比较合适。与此相对应的内在价值函数的推导如下:

注意到原函数公式 $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}, \int x e^{ax} dx = \frac{1}{a^2} e^{ax}(ax - 1)$,有

$$P(t) = e^{rt} \int_t^{+\infty} (a + b\xi) e^{-r\xi} d\xi = a \cdot e^{rt} \int_t^{+\infty} e^{-r\xi} d\xi + b \cdot e^{rt} \int_t^{+\infty} \xi e^{-r\xi} d\xi = \frac{a + bt}{r} + \frac{b}{r^2}$$

3. 某些企业具有这样的特征,在未来的一定时期内,收益水平处于基本不变的状态,但一定会在未来某个时刻开始企业的收益水平进入一个较长的平稳增长期。比如企业在现阶段投入研发力量研制一种新产品,或研制一项新技术,预计在 10 年后研制成功,并由此而带来较长时期的收益增长。这样的收益模式可以用分段线性函数表达,即

$$D(t) = \begin{cases} a & 0 \leqslant t \leqslant t_0 \\ a + b(t - t_0) & t > t_0 \end{cases}$$

其中,$a > 0, b > 0$。t_0 反映收益增长期起始时间,b 反映增长速度的大小。与此相对应的内在价值函数的推导如下: