全国十二大考研辅导机构指定用书

李永乐·王式安考研数学系列

★ 样卷篇　囊括历年考题精华

★ 模拟篇　查漏补缺最后冲刺

2012考研李永乐

数学最后冲刺5+3

数学二

主编　李永乐　王式安

“100题”与“400题”之经典在延续……

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

李永乐数学最后冲刺

5+3

数学二

主 编 李永乐 王式安

编 委：北京理工大学 王式安
北 京 大 学 刘西垣
北 京 大 学 李正元
清 华 大 学 李永乐
西安交通大学 武忠祥
（按姓氏笔画排序）

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

李永乐数学最后冲刺5+3.数学二/李永乐，王式安主编.—西安：西安交通大学出版社，2011.8
ISBN 978-7-5605-4022-1

Ⅰ.①李… Ⅱ.①李… ②王… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—习题集 Ⅳ.①013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第166937号

敬告读者

本书封面粘有专用防伪标识，凡有防伪标识的为正版图书，敬请读者识别。

李永乐数学最后冲刺5+3(数学二)

主 编：李永乐 王式安
责任编辑：李慧娜
装帧设计：金榜图文设计室
出版发行：西安交通大学出版社
地 址：西安市兴庆南路10号(邮编：710049)
电 话：(029)82668315 82669096(总编办)
(029)82668357 82667874(发行部)
印 刷：保定市中画美凯印刷有限公司
开 本：787mm×1092mm 1/8
印 张：10.25
字 数：186千字
版 次：2011年11月第1版
印 次：2011年11月第1次印刷
书 号：978-7-5605-4022-1/O·374
定 价：15.00元

图书如有印装质量问题，请与印刷厂联系调换 电话：(010)82570560

前　　言

本套试卷是一种新的尝试，是为参加全国硕士研究生入学统一数学考试的考生，在最后冲刺阶段设计的复习用书。针对考生在强化阶段出现的问题，从考研数学的热考内容和重点题型中多角度设计题目。它是“数学全程预测100题”和“数学全真模拟经典400题”的延续，希望能在最后冲刺阶段增强考生在应试中的变通能力，从而取得理想的成绩。

本套试卷特点为首次采用了5+3的形式，即5套样卷加3套模拟。

5套样卷是从1991年～2011年的真题中精心挑选与总结所组成，这5套样卷中的试题涵盖了这20多年来的重点考查内容和易考题型，这样更加利于考生温故知新，从而更好地把握考试的方向。

3套模拟集多年真题中的热考题型和重点考查知识点于一身，试图从模拟命题教师的角度来编写，旨在考前的摸底与练兵。

同学们在使用《数学最后冲刺5+3》的时候，每一套试卷都一定要按照正式考研时的程序答题，独立思考、认真书写，不能在答题的过程中对照解析，并且不要估分，但要查漏补缺、总结和提炼，这样方能达到事半功倍的效果！

编者

2011年11月

目　　录

注意：
因以下项目填写不清
而影响成绩责任自负
准考证号

姓名

考试
地点________
________考场______号
归属
区县________
（领准考证的区县）

（密 封 线 内 不 要 答 题）

样卷篇

第一套

得分	评卷人

一、选择题：$1\sim 8$ 小题，每小题 4 分，共 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$

(A) $-2f'(0)$. (B) $-f'(0)$. (C) $f'(0)$. (D) 0.

(2) 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

(3) 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内，方程 $|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x=0$

(A) 无实根. (B) 有且仅有一个实根.
(C) 有且仅有两个实根. (D) 有无穷多个实根.

(4) 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x}{x}\mathrm{d}x$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{x}{\tan x}\mathrm{d}x$，则

(A) $I_1>I_2>1$. (B) $1>I_1>I_2$.
(C) $I_2>I_1>1$. (D) $1>I_2>I_1$.

(5) 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$，已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下有一个极值点，下列选项正确的是

(A) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.
(B) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.
(C) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.
(D) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

(6) 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 等于

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

(7) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维列向量，$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，下列选项正确的是

(A) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.
(B) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关.
(C) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.
(D) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关.

(8) 已知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，k_1,k_2 为任意常数，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解必是

(A) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$. (B) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

(C) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$. (D) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

得分	评卷人

二、填空题：$9\sim 14$ 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 设 $\begin{cases}x=\cos t^2\\ y=t\cos t^2-\int_1^{t^2}\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cos u\mathrm{d}u\end{cases}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\Big|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=$ ________.

(10) $\int\dfrac{\ln\sin x}{\sin^2x}\mathrm{d}x=$ ________.

(11) 设函数 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数，且 $z=z(x,y)$ 由方程 $xe^x-ye^y=ze^z$ 所确定，则 $\mathrm{d}u=$ ________.

(12) 设 $y=e^x$ 是微分方程 $xy'+p(x)y=x$ 的一个解，则此微分方程满足

$y\big|_{x=\ln 2}=0$ 的特解是________.

(13) 设函数 $z=f(u)$，方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x p(t)\mathrm{d}t$ 确定 u 是 x,y 的函数，其中 $f(u),\varphi(u)$ 可微，$p(t),\varphi'(u)$ 连续，且 $\varphi'(u)\neq 1$，则 $p(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+p(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}$ $=$ ________.

(14) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,4,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,7,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(3,10,b,4)^{\mathrm{T}}$. 若 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，则 a,b 应满足的条件是____.

得分	评卷人

三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 的单调区间与极值.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $S(x)=\int_0^x|\cos t|\mathrm{d}t$，

(Ⅰ) 当 n 为正整数，且 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时，证明：$2n\leqslant S(x)<2(n+1)$；

(Ⅱ) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$.

(17)(本题满分 10 分)

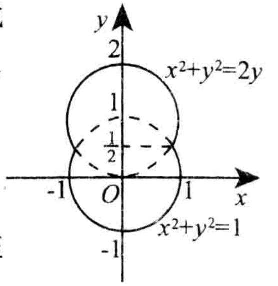
设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2t+t^2,\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(t>-1)$ 所确定，其中 $\psi(t)$ 具有 2 阶导数，且 $\psi(1)=\dfrac{5}{2}$，$\psi'(1)=6$，已知 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，求函数 $\psi(t)$.

密 封 线 内 不 要 答 题

密 封 线 内 不 要 答 题

(18)(本题满分 11 分)

一容器的内侧是由图中曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面,该曲线由 $x^2+y^2=2y\left(y\geqslant\frac{1}{2}\right)$ 与 $x^2+y^2=1\left(y\leqslant\frac{1}{2}\right)$ 连接而成.



(Ⅰ)求容器的容积;

(Ⅱ)若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出,至少需要做多少功?(长度单位:m,重力加速度为 $g\,\mathrm{m/s^2}$,水的密度为 $10^3\,\mathrm{kg/m^3}$)

(19)(本题满分 10 分)

设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数,且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$,又 $g(x,y)=f\left[xy,\frac{1}{2}(x^2-y^2)\right]$ 求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

(20)(本题满分 11 分)

设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2, & |x|+|y|\leqslant 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1<|x|+|y|\leqslant 2, \end{cases}$$

计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\,\big|\,|x|+|y|\leqslant 2\}$.

(21)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续,在开区间 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0,f(1)=\frac{1}{3}$.

证明:存在 $\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right),\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

(22)(本题满分 10 分)

设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵,$\boldsymbol{\xi}$ 是 n 维非零列向量,$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\xi}$ 的转置.

证明:(Ⅰ)$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=1$.

(Ⅱ)当 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=1$ 时,$\boldsymbol{A}$ 是不可逆矩阵.

(23)(本题满分 12 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{P}$,其中 $\boldsymbol{A}^{*}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值与特征向量.

(Ⅱ)求 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})$.

密 封 线 内 不 要 答 题

注意：
因以下项目填写不清而影响成绩责任自负
准考证号

姓名

考试地点________
________考场______号
归属区县________
（领准考证的区县）

（密 封 线 内 不 要 答 题）

第二套

得分	评卷人

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为

(A)0.　　(B)6.　　(C)36.　　(D)∞.

(2) 设当 $x\to 0$ 时，$e^x-(ax^2+bx+1)$ 是比 x^2 高阶无穷小，则

(A)$a=\dfrac{1}{2}, b=1$.　　(B)$a=1, b=1$.

(C)$a=-\dfrac{1}{2}, b=-1$.　　(D)$a=-1, b=1$.

(3) 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0, f''(x)>0$，Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量，Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则

(A)$0<dy<\Delta y$.　　(B)$0<\Delta y<dy$.

(C)$\Delta y<dy<0$.　　(D)$dy<\Delta y<0$.

(4) 曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x(a\neq 0)$ 相切，则 $a=$

(A)4e.　　(B)3e.　　(C)2e.　　(D)e.

(5) 设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$，其中函数 φ 具有二阶导数，ψ 具有一阶导数，则必有

(A)$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(B)$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(C)$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(D)$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

(6) 设函数 $f(u)$ 连续，区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2y\}$，则 $\iint\limits_D f(xy)dxdy$ 等于

(A)$\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(xy)dy$.　　(B)$2\int_0^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(xy)dx$.

(C)$\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)dr$.　　(D)$\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)rdr$.

(7) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{CA}$，则 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$ 为

(A)$\boldsymbol{E}$.　　(B)$-\boldsymbol{E}$.　　(C)$\boldsymbol{A}$.　　(D)$-\boldsymbol{A}$.

(8) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵，$\boldsymbol{A}^T$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，则对于线性方程组(Ⅰ)：$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和(Ⅱ)：$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，必有

(A)(Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解，(Ⅰ)的解也是(Ⅱ)的解.

(B)(Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解，但(Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解.

(C)(Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解，(Ⅱ)的解也不是(Ⅰ)的解.

(D)(Ⅰ)的解是(Ⅱ)的解，但(Ⅱ)的解不是(Ⅰ)的解.

得分	评卷人

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，则 $y^{(n)}(0)=$________.

(10) 曲线 $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ 的渐近线方程为________

(11) 设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^3+3t+1\\ y=t^3-3t+1\end{cases}$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 向上凸的 x 的取值范围为________.

(12) 设曲线的极坐标方程为 $\rho=e^{a\theta}(a>0)$ 则该曲线上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积为________.

(13) 微分方程 $yy''+(y')^2=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$ 的特解是________.

(14) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^T, \boldsymbol{\beta}=(1,0,k)^T$. 若矩阵 $\boldsymbol{\alpha\beta}^T$ 相似于 $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $k=$________.

得分	评卷人

三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

(16)(本题满分 10 分)

设 $e<a<b<e^2$，证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$.

(17)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=0$，$f(x,1)=0$，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，计算二重积分 $I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(18)(本题满分 11 分)

设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值和极值点.

密 封 线 内 不 要 答 题

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 具有二阶导数,且曲线 $l:y=y(x)$ 与直线 $y=x$ 相切于原点.记 α 为曲线 l 在点 (x,y) 处切线的倾角,若 $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,求 $y(x)$ 的表达式.

(20)(本题满分 10 分)

设非负函数 $y=y(x)(x\geqslant 0)$ 满足微分方程 $xy''-y'+2=0$.当曲线 $y=y(x)$ 过原点时,其与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成的平面区域 D 的面积为 2,求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

(21)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)$,$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值,$f(a)=g(a)$,$f(b)=g(b)$,证明存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

(22)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非奇异矩阵,$\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维列向量,b 为常数,记分块矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{*} & |\boldsymbol{A}|\end{pmatrix},\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & b\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}^{*}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵.

(Ⅰ)计算并化简 $\boldsymbol{PQ}$;

(Ⅱ)证明矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq b$.

(23)(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2,\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 的一个特征向量. $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ)验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量,并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值的特征向量;

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

密 封 线 内 不 要 答 题

注意：
因以下项目填写不清而影响成绩责任自负

准考证号

姓名

考试地点________________

________考场______号

归属区县________________

（领准考证的区县）

（密封线内不要答题）

第三套

得分	评卷人

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求．

(1) 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则常数 a，b 满足

(A) $a<0,b<0$.　　(B) $a>0,b>0$.

(C) $a\leqslant 0,b>0$.　　(D) $a\geqslant 0,b<0$.

(2) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内

(A) 处处可导.　　(B) 恰有一个不可导点.

(C) 恰有两个不可导点.　　(D) 至少有三个不可导点.

(3) 函数 $f(x)=\ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

(4) 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$，渐近线的条数为

(A) 0.　　(B) 1.

(C) 2.　　(D) 3.

(5) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^2+2t\\ y=\ln(1+t)\end{cases}$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 在 $x=3$ 处的法线与 x 轴交点的横坐标是

(A) $\dfrac{1}{8}\ln2+3$.　　(B) $-\dfrac{1}{8}\ln2+3$.

(C) $-8\ln2+3$.　　(D) $8\ln2+3$.

(6) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cot x\,dx$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,dx$，则 I,J,K 的大小关系为

(A) $I<J<K$.　　(B) $I<K<J$.

(C) $J<I<K$.　　(D) $K<J<I$.

(7) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都是4维列向量，且4阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|=m$，$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=n$，则4阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|=$

(A) $m+n$.　　(B) $-(m+n)$.

(C) $n-m$.　　(D) $m-n$.

(8) 若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$ 和对角矩阵相似，则 $a=$

(A) 0　　(B) 1

(C) 6　　(D) 2

得分	评卷人

二、填空题：9～14小题，每小题4分，共24分．把答案填在题中的横线上．

(9) 已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x}e^{-t^2}dt$ 在点 $(0,0)$ 处的切线相同，则 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{2}{n}\right)=$ ________.

(10) 曲线 $y=\int_0^x\tan t\,dt\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的弧长 $s=$ ________.

(11) 反常积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x\,dx}{(1+x^2)^2}=$ ________.

(12) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数，其中 φ 是可导函数，且 $\varphi'\neq-1$，则 $dz=$ ________.

(13) 设平面区域 D 由直线 $y=x$，圆 $x^2+y^2=2y$ 及 y 轴所围成，则二重积分 $\iint\limits_D xy\,d\sigma=$ ________.

(14) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，若 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+t\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4+t\boldsymbol{\alpha}_1$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，则 t 的取值为____.

得分	评卷人

三、解答题:15 ～ 23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 4t - t^2 \end{cases}$,$(t \geqslant 0)$,

(Ⅰ)讨论 L 的凹凸性;

(Ⅱ)过点 $(-1,0)$ 引 L 的切线,求切点 (x_0, y_0),并写出切线方程;

(Ⅲ)求此切线与 L(对应于 $x \leqslant x_0$ 的部分)及 x 轴所围成的平面图形的面积.

(16)(本题满分 10 分)

计算不定积分 $\int \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) dx \ (x > 0)$.

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有二阶导数,且 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 满足等式 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

(Ⅰ)验证 $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$;

(Ⅱ)若 $f(1) = 0, f'(1) = 1$,求函数的表达式.

密 封 线 内 不 要 答 题

(18)(本题满分 10 分)

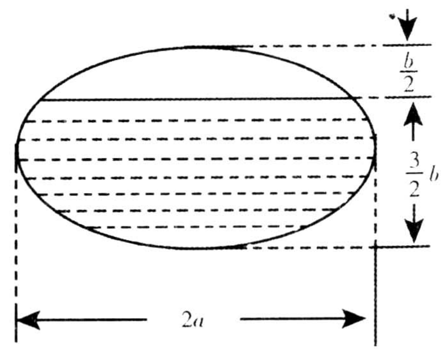
设数列$\{x_n\}$满足$0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n, (n = 1,2,\cdots\cdots)$

(Ⅰ)证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在,并计算该极限;

(Ⅱ)计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

(19)(本题满分 11 分)

一个高为l的柱体形贮油罐,底面是长轴为$2a$,短轴为$2b$的椭圆.现将贮油罐平放,当油罐中油面高度为$\frac{3}{2}b$时(如图),计算油的质量.(长度单位为 m,质量单位为 kg,油的密度为常数ρ kg/m^3)



(20)(本题满分 10 分)

计算二重积分$I = \iint\limits_D r^2 \sin\theta \sqrt{1 - r^2\cos 2\theta}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$,其中$D = \{(r,\theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant \sec\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}\}$.

(21)(本题满分 11 分)

已知函数$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且$f(0) = 0, f(1) = 1$,证明:

(Ⅰ)存在$\xi \in (0,1)$,使得$f(\xi) = 1 - \xi$;

(Ⅱ)存在两个不同的点$\eta, \zeta \in (0,1)$,使得$f'(\eta)f'(\zeta) = 1$.

(22)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

(Ⅰ) 求满足 $\boldsymbol{A\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\xi}_3$;

(Ⅱ) 对(Ⅰ) 中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\xi}_3$, 证明 $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

(23)(本题满分 11 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(Ⅰ) 求 a 的值;

(Ⅱ) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形;

(Ⅲ) 求方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

注意：

因以下项目填写不清而影响成绩责任自负

准考证号

姓名

考试地点________

________考场______号

归属区县________

（领准考证的区县）

（密 封 线 内 不 要 答 题）

第四套

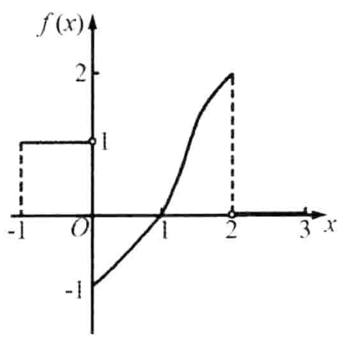
得分	评卷人

一、选择题：$1\sim 8$ 小题，每小题 4 分，共 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.

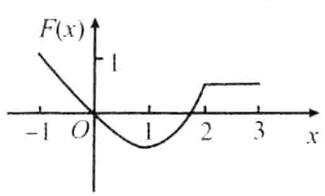
(1) 设函数 $f(x)=x^2(x-1)(x-2)$，则 $f'(x)$ 的零点个数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

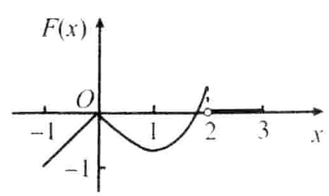
(2) 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形为



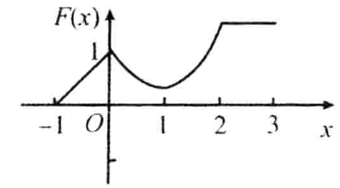
则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的图形为



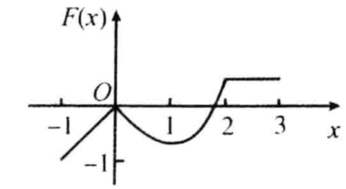
(A)



(B)



(C)



(D)

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数，且 $f''(x)>0$，令 $u_n=f(n)$，$n=1,2,\cdots$，则下列结论正确的是

(A) 若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛. (B) 若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散.

(C) 若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛. (D) 若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散.

(4) 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 均有二阶连续导数，满足 $f(0)>0$，$g(0)<0$，且 $f'(0)=g'(0)=0$，则函数 $z=f(x)g(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是

(A) $f''(0)<0$，$g''(0)>0$. (B) $f''(0)<0$，$g''(0)<0$.

(C) $f''(0)>0$，$g''(0)>0$. (D) $f''(0)>0$，$g''(0)<0$.

(5) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$.

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$.

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

(D) $\lim\limits_{x\to 0}[f'_x(x,0)-f'_x(0,0)]=0$，$\lim\limits_{y\to 0}[f'_y(0,y)-f'_y(0,0)]=0$.

(6) 设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$，$f(x)$ 为 D 上的正值连续函数，a，b 为常数，则 $\iint\limits_D \dfrac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma=$

(A) $ab\pi$. (B) $\dfrac{ab}{2}\pi$. (C) $(a+b)\pi$. (D) $\dfrac{(a+b)}{2}\pi$.

(7) n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有 n 个不同的特征值是 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似的

(A) 充分必要条件. (B) 充分而非必要条件.

(C) 必要而非充分条件. (D) 既非充分也非必要条件.

(8) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，则 $\boldsymbol{A}$ 相似于

(A) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

得分	评卷人

二、填空题:9～14小题,每小题4分,共24分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ ________.

(10) 微分方程 $y'+y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$ ________.

(11) 当 $x\to 0$ 时,$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小,则 k ________.

(12) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $\lambda>0$,则 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x=$ ________.

(13) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=\mathrm{e}^{2x-3z}+2y$ 确定,则 $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

(14) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩为________.

得分	评卷人

三、解答题:15～23小题,共94分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分10分)

试确定常数 A,B,C 的值,使得

$$\mathrm{e}^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3),$$

其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x^3 高阶的穷小.

(16)(本题满分10分)

证明:当 $0<a<b<\pi$ 时,$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a$.

(17)(本题满分10分)

设函数 $z=f(xy,yg(x))$,其中函数 f 具有二阶连续偏导数,函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$. 求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.