应用科学学报

JOURNAL OF APPLIED SCIENCES

第一卷　　第三期
VOL. 1　　NO. 3

《应用科学学报》编辑委员会编辑
上海科学技术出版社出版

应用科学学报

JOURNAL OF APPLIED SCIENCES

第一卷 第[illegible]期

VOL.1 NO.[illegible]

1983

[illegible]

[illegible]

征 稿 简 则

(一)本刊由《应用科学学报》编辑委员会编辑、上海科学技术出版社出版.

本刊积极反映我国应用科学方面的科研和学术成果,广泛开展国内外学术交流,促进应用科学的研究和发展,为实现我国的社会主义现代化服务.

本刊主要刊登创造性科研成果. 除特约稿外,一般不刊登综述性和动态性文章. 内容侧重于应用数学、应用物理、应用化学与材料科学、无线电电子学、计算机科学和精密机械等方面.

(二)本刊以强调科学的应用性为其特色. 理论性质的稿件须在文中阐明其理论的具体应用. 数学论文也须阐明其应用性. 对前沿科学与技术领域中探索研究的新成果,将优先刊登.

(三)本刊的阅读对象是从事应用科学方面的科研人员、大专院校教师、研究生及高年级学生.

(四)来稿刊登后将酌致稿酬. 未录用的稿件退还作者.

(五)来稿请用挂号寄:上海市 8224 信箱《应用科学学报》编辑部.

(六)对来稿的要求:

1. 来稿请寄一式两份. 文章体裁以学术论文和研究简报两种形式为主. 须主题突出、论证严密、数据可靠、言简意明. 学术论文一般不超过 6000 字(包括图表、参考文献),附 500 字以内的英文摘要;简报一般不超过 2000 字(包括图表、参考文献),附 100 字以内的英文摘要.

稿件应以主要篇幅用于阐明作者本人的研究成果,应用他人的有关资料须尽量简练,少占篇幅.

2. 请用单面方格稿纸钢笔书写. 须字迹清楚、稿面整洁. 不要写连笔字、草字和非正式的简化字. 文章中的外文及符号要符合标准,不可混淆,必要处用铅笔在字符下注明所属文种及字体(黑体、斜体、正体).

插图要符合制图规范,图中字符书写清楚,所用符号也应注明文种与字体,并应与正文统一;插图在文稿中的位置用方框标出,并注明图号、图注. 实物照片须黑白分明、层次清晰.

参考文献只列出与正文有关者,附在文末,按下列格式书写:文献作者、刊物(或书籍)名称、卷数、期数、页数、年份(如系书籍,须写明出版社名称).

文章排版后寄给作者的校样,应只修改排版上的错误,勿再变动内容或修改文字.

3. 来稿须写明作者真实姓名、工作单位、职务、技术职称及通讯处. 投稿时须寄作者所在单位的书面证明.

应用科学学报

第一卷 第三期

目 录

研 究 简 报

JOURNAL OF APPLIED SCIENCES

Vol. 1, No. 3, July 1983

CONTENTS

RESEARCH NOTES

第1卷 第3期 应 用 科 学 学 报 Vol. 1, No. 3
1983年7月 JOURNAL OF APPLIED SCIENCES July 1983

基础科学、应用科学与生产技术间的关系

孟昭英
(清华大学)

基础科学、应用科学与生产技术的研究范畴显然是很不相同的，但是其间却没有严格的分界线．在古代的西方，前二者，包括人文科学的研究在内，统称为哲学，而自然科学则称为自然哲学．在那时，研究的面一般都是很广的．一个突出的例子是达·芬奇．他曾从事的科学研究领域，从天文、地质、生物、解剖、医学、工程、建筑、绘画以至飞行，无所不包．我国古代也是如此．如《梦溪笔谈》、《天工开物》等，也都是百科全书一类的著作．

但在现代这是不可能的．从古至今在各个范畴都有了大量的知识积累．特别是在最近的几十年里，许多学科都动辄有上千篇的论文，所以一个人只能在很窄的范畴里钻研，才能探窥到科学研究的最前沿阵地．许多重大的科研课题，如高能粒子研究，需要庞大复杂的仪器设备，并要把各方面的人才组织起来，才能有效地进行．对于国家的建设而言，这些学科则又形成一个整体．它们之间必须有合理的布局、分工和协调，才能把科学最有效地变成生产力．

有人认为研究科学的动力是为了追求真理，满足求知欲．殊不知，如果科研成果不是直接或间接地，近期或远期地，对提高生产力有所贡献，这些成果的幼苗由于不能为人类造福，也就得不到必要的培植和浇灌，它将逐渐枯萎，更不必说开花结果了．固然，知识迟早总是有用的．可是其应用价值，有其时间性和阶段性．过迟则阻碍了其他部门的发展；过早则无用武之地，只好暂时搁置起来，甚至长久被人所遗忘．

现在不谈各学科之间的分工与协调，而只是就基础科学、应用科学、与生产技术间的关系谈一点浅显的意见．

从生产的观点来看，生产技术的研究目的是为了解决“今天”生产里的问题．应用科学是针对“明天”的，而基础科学是为了“后天”的问题．如果不积极地研究生产技术，就不能满足人民的衣食住行的需要更谈不上改善人民的生活条件了．因此这是最急迫的任务，必须投入大量的人力和物力．但是生产技术是不断发展的，而在最近的半个世纪，其发展又特别迅速，真是日新月异．因此就必须研究新的工艺、材料、技术、以至完全新的方法等．这就是应用科学的任务．应用科学的研究成果，有些是为了解决“今天”生产中的问题，更多的则是用于“明天”的生产．因此要想发展和提高生产力，也必须在应用科学的研究上投入足够的智力和物力．探索一切最基本的课题是基础科学的任务．最主要的三个方面是：宇宙的起源、物质的结构、和生命的衍迁．我们既然生活在宇宙之中，依靠其他物质和生命而存在，对这些有深邃的了解和认识就关系着切身的利害．基础科学的研究

1983年5月2日收到

课题，多数是看不到与发展生产力的直接关系的，但是它们能展示更远大的发展方向，为人类长久的幸福奠定基础．最初研究原子结构时，从未联想到应用，但其结果则为发展原子能开辟了道路．因此基础科学的研究也绝不能忽视．

这样我们就面对一个问题，即如何统筹地织组和分配科研力量，才能最快地发挥效益，变知识为生产力．

有人认为为了尽快地发展生产力，可以大量引进生产设备和技术，而无需大力发展应用科学的研究．这是短见的．即使是最先进的生产设备和技术，到它被引进之时，就早已脱离了发展的阶段．待引进投产之后，就已经落后了．何况凡是最先进的不会轻易地被转让呢！所以只靠引进，而不从事应用科学的研究，生产水平将永远追赶不上先进．固然，即使是最先进的国家，也要互相引进设备和技术．但是只是当本国的应用科学有相当的根底，才能最快和最有效地消化、吸收、利用、和进一步改进．只学习生产技术是不行的，必须把它培植在科学研究的土壤里，才不致枯萎．

生产技术的根本性变革和开拓，有赖于基础科学研究中的成果．如本世纪关于半导体物理的基础理论和实验有了突破性的进展，就导致了晶体管以及其后的集成电路的发明，使彼后的生产力突飞猛进，以致使世界几乎改变了面貌．关于基因方面的基础研究则导致生物工程的宏大远景．但这些都要几十年才出现一次．即使基础科学研究有了突破以后，还必须经过许多应用科学工作者的长期努力，才能使这些成果应用于生产．因此虽然不能忽视基础科学研究，但是更重要的是应用科学的研究．基础科研成果，一般都不是保密的，所以可以任意引用外国的．应用科学和生产技术的诀窍则必须靠自己探索得到．

在一个国家的生产力发展的不同阶段，投入基础与应用研究两方面的力量的对比，应该是不同的．象我国的经济发展还处于刚刚“起飞”的阶段，对基础可以少用力量．等到生产已经上去了之后，财力、物力、特别是人力，充实和丰富起来时，才可逐渐增加对基础科学的研究．

综观外国的经历，对我们或可有借鉴之处．英国和德国，在十九世纪和二十世纪的初期，基础科学是最先进的，而美国在这一时期则相当落后．以物理学这一基础科学而论，只有两三个诺贝尔奖金的获得者．甚至研究院用的书籍也都是英、德、法国的．但是它非常重视应用科学和生产技术，因之生产力居世界首位，人民的生活水平很高．到第二次大战结束后，由于它未遭战火的摧残，加以从欧洲聘请了许多大师，它的基础科学很快就提高到世界的前茅．仍以诺贝尔奖金的获得者数目作为衡量物理这一基础科学的水平，它已居于首位．再看日本，近四十年来它大力开展应用科学的研究，使得其生产力有了飞跃的进展，很快就赶上了最先进的国家．但是其基础科学仍逊于其他先进国家．现在是它更多地致力于基础科学研究的时机了，否则从长远计，其发展必将受到限制．苏联在基础科学的许多方面都是很先进的．但就是因为对应用科学和生产技术重视不够，限制了它的生产力的提高．我国现在正开始现代化的进程，经济力不足，高级科研人员匮乏，人民生活水平甚低，应当吸取以上各国的经验，先把主要的科研人力和物力用在应用科学和生产技术的研究上，使国家经济力量尽快地增强，人民生活大大地提高，才是上策．

应当大力发展应用科学与生产技术的另一个原因是这两项所需要的人数远多于从事基础科学的人．应用科学研究者从基本原理出发，需要经过相当长的实验探索阶段才能

确定其有无应用价值. 确定以后, 一般需要生产技术研究者把这些原意转化为实际可用的原型. 原型经过试用,再进一步改善并试行小量生产后,才能形成试用产品. 再经过一段的考验后才能进行大批量生产. 大批量生产中还有许多问题是试制和小量生产中所不能发现的. 这些仍需有人跟踪解决. 这就是一般的变科研成果为生产力的周期. 这周期里各个阶段的工作性质,其前一部分多是科研课题,而后一部分则多属工程工作. 由于工作性质不同, 很难期望同一批人, 既善于作开拓性的科研, 又同时善于组织和解决生产中出现的多方面的问题. 因此就既要有分工, 又要有衔接. 我国的科研有许多成果之所以不能及早转化为生产力,产生经济效果,缺乏健全的衔接体制和机构,可能是其主要原因.

决定四化实现迟早的主要因素是人. 仪器设备绝大部分可以自制,有的可以外购,但是人才则必须自己培养. 培养的周期是比较长的. 人的素质既然有所不同, 其所最适应的工作性质也有差异. 最好是在初等中学以后的教育里就引导和初步分配其将来要从事的工作的方向. 对将来的科研人员要注重培养其基础学科的学习和提高其分析能力与创造精神,因此学程要长些,例如现行的四年制大学以及其后的研究院. 对于一般的生产人员则给以普通的文化和科学知识, 以及生产技能. 有的在初中以后培养两年即可从事生产工作; 有的则可在高中以后继以两年的技术培训, 将来从事较高一级的生产技术工作. 重要的是人数的分配要大体上适应将来的科研与生产的需要. 我国现在的情况是知识层的结构全面地还嫌过低; 而分布上是上轻下重. 为了迎接即将出现的大生产的需要,必须及早地大大增加智力投资,才不致于因科技人员不足而阻滞了四化的实现.

RELATIONSHIP BETWEEN FUNDAMENTAL SCIENCES, APPLIED SCIENCES, AND PRODUCTIVE TECHNOLOGY

MENG CHAOYING
(*Tsinghua University*)

Abstract

From the viewpoint of production, the task of productive technology may be considered as the study aimed at solving productive problems of "today"; the task of applied sciences, that of "tomorrow"; and the task of fundamental sciences, that of "day after tomorrow". The first is of paramount importance because it involves the immediate well-being of the whole people, therefore the main force should be allotted. However, without research in applied sciences, means of production will soon become obsolete. So enough effort should be applied to it. The task of fundamental sciences is to study the ultimate nature of the universe, matter, and life. Most of the fruits of its research have no direct connection with production, but some findings thereof may open up entirely new means and directions, so it should not be neglected either.

The problem is how to organize and allot material and human resources so as to

most effectively transform knowledge into productive forces. Some argue that technology can be quickly imported. That is short-sighted, because no sooner a new technology is imported than it will soon be outmoded. Further, without intensive research on applied sciences, it would be inefficient to digest, absorb, utilize, and improve imported technology.

True enough that fundamental sciences research may open up new fields, but such findings are rare, perhaps only a few in a century. Furtheremore, they are not kept secrect, so can easily be taken over and utilized. Therefore no special effort should be emphasized in our country at present.

The allocation of effort among the three lines should be dialectically suited to the stage of development of the country. During the initial stage, less effort should be put on fundamental sciences, As the nation's economy develops it can be gradually increased, as the successful experiences of the United States and Japan well have shown.

Another argument for putting more emphasis on developing applied sciences and productive technology is that these two branches demand far more personnel than that for fundamental sciences. There should be very intimately coordinated organism and system between these three task forces.

The determining factor is human resources, which have to be brought up and trained domestically. This takes a fairly long period, so attention should be set about as early as possible.

第1卷 第3期　　应用科学学报　　Vol. 1, No. 3
1983年7月　　JOURNAL OF APPLIED SCIENCES　　July 1983

凸集上样条函数的一些新性质

关履泰
(中山大学)

提　　要

本文提出“外射集”与“照射面”的定义，得到凸集上样条函数的一些新的特征定理、唯一性定理与必要条件.

下面我们特别介绍定理7，用这个定理，我们可以获得一种凸集上样条函数的新算法.

定理7　如果存在唯一的 σ_1 与 σ 满足:

$$\langle t(\sigma_1)|t(\sigma_1)\rangle=\min_{x\in G_1}\langle t(\sigma_1)|t(x)\rangle;\ \ \langle t(\sigma)|t(\sigma)\rangle=\min_{x\in G}\langle t(\sigma)|t(x)\rangle,\ G_1\subset G,$$

则 σ 一定在 σ_1 关于 G_1 与 G 的外射集中.

1967年，Atteia[1] 首先定义凸集上的样条函数:

X、Y、Z 都是实希尔伯特空间.

t: $X\to Y$, a: $X\to Z$ 是两个线性连续算子.

$$C=\{x\in X\,|\,a(x)\in\Gamma\}$$

Γ 是 Z 中的一个凸闭集.

如果 C 的元素 σ 满足:

$$\|t(\sigma)\|_Y=\min_{x\in C}\|t(x)\|_Y,$$

就把它叫做在凸集 C 上关于 t 的(插值)样条函数.

Atteia[2] 由渐近锥出发，讨论凸集样条的存在性、唯一性与其他的性质. 他特别留意凸集(插值)样条的对偶性质.

1967年，P. J. Laurent 用容许方向锥的理论，得出凸集上样条函数很全面的特征[1].

1969年，Morin 总结用优化与规划方法求凸集上样条函数[4]. 他提到斜量法、Frank-wolfe 方法、松弛法等. 同年，Ritter 考虑解不等式条件约束的广义 HB 问题，提出求解某些凸集样条的二次规划方法；[3] Laurent 研究在 $C=\{x\in X\,|\,\forall l\in L,\ \langle l|x\rangle\leqslant t(l)\}$ 上样条函数的存在唯一性及其特征，提出适合于 $C=\{x\in X\,|\,\langle l_i|x\rangle\leqslant c_i,\ i=1,\ \cdots,\ n\}$, $I=\{x\in X\,|\,\langle l_i|x\rangle<c_i,\ i=1,\ \cdots,\ n\}\neq\phi$ 的对偶算法[4].

1969年，Schumaker 等从最优控制的基本原理出发，把凸集上样条函数看成是一类特殊的最优控制问题，得到凸集上样条函数的存在唯一性条件和某些特征[5].

1972年 P. J. Laurent[1] 以更新的观点处理以往凸集上样条函数的主要结果，他重

1981年12月11日收到.

新提出唯一性定理和几个典型的特征定理，举了六种有意义的例子，列出它们的对偶问题和特征. 他在书中强调，这些问题大多数可化为二次规划去解，目前的主要问题是寻找理想的算法.

1980 年，Laurent 与 Wahba 讨论某类凸集上的样条函数[6]，提出目标函数强凸的充分条件与一种迭代算法，每次迭代只须重新解一个或者两个线性代数方程组. 这种算法还可以用来解带不等式约束的强凸泛函的极小化问题.

本文继文献[7]后提出一些新的特征定理、必要条件与存在唯一性定理，为一种新的算法提供理论依据. 我们将在另一篇文章中讨论一种新算法.

一、特征定理

定理 1 如果 σ 是在凸集 C 上关于 t 的样条函数，那么

$$\langle t(\sigma)\,|\,t(\sigma)\rangle\leqslant\langle t(\sigma)\,|\,t(x)\rangle\leqslant\langle t(x)\,|\,t(x)\rangle,\ \forall x\in C \tag{1-1}$$

如果 $\langle t(\sigma)\,|\,t(\sigma)\rangle=\min\limits_{x\in C}\langle t(\sigma)\,|\,t(x)\rangle$，那么 σ 就是在凸集 C 上关于 t 的样条函数，而且有(1-1)式成立.

证：因为
$$\langle t(\sigma-x)\,|\,t(\sigma-x)\rangle\geqslant 0,$$
所以
$$\langle t(x)\,|\,t(x)\rangle-\langle t(x)\,|\,t(\sigma)\rangle\geqslant\langle t(x)\,|\,t(\sigma)\rangle-\langle t(\sigma)\,|\,t(\sigma)\rangle. \tag{1-2}$$

如果 σ 是在凸集 C 上关于 t 的样条函数，应用最佳逼近特征定理[1] 可以得出
$$\langle t(x)\,|\,t(\sigma)\rangle\geqslant\langle t(\sigma)\,|\,t(\sigma)\rangle.\ \forall x\in C$$
把它用到(1-2)式就证出(1-1)式.

如果
$$\langle t(\sigma)\,|\,t(\sigma)\rangle=\min_{x\in C}\langle t(\sigma)\,|\,t(x)\rangle,$$
利用(1-2)式得出(1-1)式，所以 σ 就是在凸集 C 上关于 t 的样条函数.

文献[1]的特征定理(9.2.5)可以看作本定理的推论. 下面的特征定理是该文献中相应定理的推广，由于取消内部非空的假定，应用范围更为广泛.

定理 2 $C=\{x\in X\,|\,\alpha_i\leqslant\langle l_i|x\rangle\leqslant\beta_i,\ i=1,\ \cdots,\ n\}$，$\sigma$ 是在 C 上关于 t 的样条函数当且仅当
$$t't(\sigma)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i l_i.$$

如果 $\alpha_i<\langle l_i|\sigma\rangle<\beta_i,\ i\in I_1$ 则 $\lambda_i=0$；$\alpha_i=\langle l_i|\sigma\rangle,\ i\in I_2$ 则 $\lambda_i\geqslant 0$；$\beta_i=\langle l_i|\sigma\rangle,\ i\in I_3$ 则 $\lambda_i\leqslant 0$. $(I_1\cup I_2\cup I_3=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\})$

证：$\Rightarrow$ 因为 $t't(S)=R(t')\cap R(a')$，所以存在 $\lambda=[\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n]\in R^n$，使
$$t't(\sigma)=a'(\lambda).$$

注意：$a(x)=[\langle l_1|x\rangle,\langle l_2|x\rangle,\ \cdots,\ \langle l_n|x\rangle]$，得
$$\left\langle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i l_i\,\middle|\,x\right\rangle=\langle a(x)\,|\,\lambda\rangle=\langle x\,|\,a'(\lambda)\rangle=\langle x\,|\,t't(\sigma)\rangle,\ \forall x\in X$$
由 x 的任意性得出
$$t't(\sigma)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i l_i. \tag{1-3}$$

由于约束条件 $\alpha_i \leqslant \langle l_i | x \rangle \leqslant \beta_i$ 等价于存在实数 z_i, 使

$$\left(\langle l_i | x \rangle - \frac{\alpha_i + \beta_i}{2} \right)^2 + z_i^2 = \left(\frac{\beta_i - \alpha_i}{2} \right)^2, \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

运用变分原理, 取

$$F(x) = \| t(x) \|_Y^2 + \sum_{i=1}^n \mu_i \left\{ \left(\langle l_i | x \rangle - \frac{\alpha_i + \beta_i}{2} \right)^2 + z_i^2 - \left(\frac{\beta_i - \alpha_i}{2} \right)^2 \right\},$$

$$F(\sigma) = \min_{x \in X} F(x).$$

因为 $\dfrac{\partial F}{\partial z_i} = 0$, 所以 $\mu_i z_i = 0$, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$.

如果 $\alpha_i < \langle l_i | \sigma \rangle < \beta_i$, $i \in I_1$, 那么 $z_i \neq 0$, $\mu_i = 0$.

因为
$$\frac{1}{2} \left. \frac{\partial F(\sigma + s\eta)}{\partial s} \right|_{s=0} = 0,$$

$\forall \eta \in X$ 满足 $\alpha_i \leqslant \langle l_i | \sigma + s\eta \rangle \leqslant \beta_i$, $i=1,\ \cdots,\ n$, 所以

$$\langle t(\sigma) | t(\eta) \rangle + \sum_{i=1}^n \mu_i \langle l_i | \eta \rangle \left(\langle l_i | \sigma \rangle - \frac{\alpha_i + \beta_i}{2} \right) = 0, \tag{1-4}$$

$$\langle t' t(\sigma) | \eta \rangle + \sum_{i=1}^n \mu_i \left(\langle l_i | \sigma \rangle - \frac{\alpha_i + \beta_i}{2} \right) \langle l_i | \eta \rangle = 0.$$

根据(1-3)式, 从上式推出:

$$\sum_{i=1}^n \left(\lambda_i + \mu_i \left(\langle l_i | \sigma \rangle - \frac{\alpha_i + \beta_i}{2} \right) \right) \langle l_i | \eta \rangle = 0.$$

适当选取 η 就可以得到:

$$\lambda_i = -\mu_i \left(\langle l_i | \sigma \rangle - \frac{\alpha_i + \beta_i}{2} \right) \quad i=1,\ \cdots,\ n \tag{1-5}$$

根据定理 1, 有 $\langle t(x) | t(\sigma) \rangle \geqslant \langle t(\sigma) | t(\sigma) \rangle$, $\forall x \in C$.

在(1-4)式中取 $\eta = \sigma - x$, $x \in C$ 满足相应约束, 则

$$\sum_{i=1}^n \mu_i \left(\langle l_i | \sigma \rangle - \frac{\alpha_i + \beta_i}{2} \right) (\langle l_i | \sigma \rangle - \langle l_i | x \rangle) = \langle t(\sigma) | t(x) \rangle - \langle t(\sigma) | t(\sigma) \rangle \geqslant 0.$$

取 x 满足 $\langle l_j | x \rangle = \langle l_j | \sigma \rangle$, $j \neq i$; $\langle l_i | x \rangle = \dfrac{\alpha_i + \beta_i}{2}$, $x \in C$, 所以

$$\mu_i \left(\langle l_i | \sigma \rangle - \frac{\alpha_i + \beta_i}{2} \right)^2 \geqslant 0,$$

对 $i \overline{\in} I_1$, $\mu_i \geqslant 0$. 利用(1-5)式, 即得所证.

$\Leftarrow$ 因为

$$\begin{aligned} \langle t(x) | t(\sigma) \rangle &= \langle x | t' t(\sigma) \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle l_i | x \rangle \\ &= \sum_{i \in I_1} \lambda_i \langle l_i | x \rangle + \sum_{i \in I_2} \lambda_i \langle l_i | x \rangle + \sum_{i \in I_3} \lambda_i \langle l_i | x \rangle \\ &\geqslant \sum_{i \in I_2} \lambda_i \alpha_i + \sum_{i \in I_3} \lambda_i \beta_i = \sum_{i \in I_1} \lambda_i \langle l_i | \sigma \rangle + \sum_{i \in I_2} \lambda_i \langle l_i | \sigma \rangle \\ &\quad + \sum_{i \in I_3} \lambda_i \langle l_i | \sigma \rangle = \langle t(\sigma) | t(\sigma) \rangle. \qquad \forall x \in C \end{aligned}$$

根据定理 1 得证.

定理 3　$C = \{x \in X | \langle l_i | x \rangle \leqslant c_i,\ i=1,\ \cdots,\ n\}$, σ 是在 C 上关于 t 的样条函数当且仅当

$$t' t(\sigma) = \sum_{i=1}^n \lambda_i l_i,\ \lambda_i \leqslant 0,\ \lambda_i (\langle l_i | \sigma \rangle - c_i) = 0,\ i=1,\ \cdots,\ n$$

证：⇒用证明上定理相同的方法，得

$$t't(\sigma)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i l_i$$

取
$$F(x)=\|t(x)\|_Y^2+\sum_{i=1}^{n}\mu_i(\langle l_i|x\rangle+z_i^2-c_i),$$

运用变分原理

$$F(\sigma)=\min_{x\in X}F(x),\quad \frac{\partial F}{\partial z_i}=0,\quad \left.\frac{\partial F(\sigma+\varepsilon\eta)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0.$$

所以 $\mu_i z_i=0,\ i=1,\ \cdots,\ n$

$$2\langle t(\sigma)\,|\,t(\eta)\rangle+\sum_{i=1}^{n}\mu_i\langle l_i|\eta\rangle=0,\quad \forall\eta\in X,\ \langle l_i|\sigma+\varepsilon\eta\rangle\leqslant c_i,\quad i=1,\ \cdots,\ n \tag{1-6}$$

所以
$$\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i+\frac{\mu_i}{2}\right)\langle l_i|\eta\rangle=0.$$

适当选取 η 就得到：

$$\lambda_i=-\frac{\mu_i}{2} \tag{1-7}$$

如果 $\langle l_i|\sigma\rangle<c_i$，那么 $z_i\neq0$，$\mu_i=0$. 如果 $\langle l_i|\sigma\rangle=c_i$，取 $x\in X$ 满足：$\langle l_i|x\rangle<c_i$，$\langle l_j|x\rangle=\langle l_j|\sigma\rangle$，$j\neq i$ 这时 $x\in C$，根据定理 1 有

$$\langle t(x)\,|\,t(\sigma)\rangle\geqslant\langle t(\sigma)\,|\,t(\sigma)\rangle$$

取 $\eta=\sigma-x$，满足约束条件，代入(1-6)式得：

$$\mu_i(\langle l_i|\sigma\rangle-\langle l_i|x\rangle)\geqslant0$$

因为这时 $\langle l_i|\sigma\rangle-\langle l_i|x\rangle>0$，所以 $\mu_i\geqslant0$. 利用(1-7)式得 $\lambda_i\leqslant0$，$\lambda_i(\langle l_i|\sigma\rangle-c_i)=0$，$i=1,\ \cdots,\ n$.

⇐用类似定理 2 的证法，注意

$$\langle t(\sigma)\,|\,t(\sigma)\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i l_i\,\middle|\,\sigma\right\rangle=\sum_{i\in I_2}\lambda_i c_i\leqslant\left\langle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i l_i\,\middle|\,x\right\rangle=\langle t(\sigma)\,|\,t(x)\rangle,\quad \forall x\in C.$$

根据定理 1 得证.

二、唯一性定理

定理 4 $C=\{x\in X\,|\,\alpha_i\leqslant\langle l_i|x\rangle\leqslant\beta_i,\ i=1,\ \cdots,\ n\}$，如果 $N(t)+C$ 在 X 中闭，$N(t)\cap N(a)=\{0\}$，$N(t)\cap C=\phi$，并且 $N(t)$ 是有限维的，那么在 C 上关于 t 的样条函数 σ 存在且唯一.

证 因为 $N(t)+C$ 在 X 中闭，所以在 C 上关于 t 的样条函数必存在[1].

设有 σ_1、$\sigma_2\in C$，使 $t(\sigma_1)=t(\sigma_2)=\tau$. 令 $\sigma=\dfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$，$t(\sigma)=\tau$. 根据定理 2 有：

$$\langle l_i|\sigma\rangle=\beta_i,\ i=1,\ \cdots,\ m_1.$$
$$\langle l_i|\sigma\rangle=\alpha_i,\ i=m_1+1,\ \cdots,\ m.$$
$$t't(\sigma)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i l_i.$$

如果 $\dim N(t)=q$，$w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_q$ 是 $N(t)$ 的一组基.

由于 $N(t)\cap N(a)=\{0\}$，所以对满足 $a(x)=0$ 的 $N(t)$ 中元素 x 有 $x\equiv\theta$，即如果

$$x=\sum_{i=1}^{q}\mu_i w_i,$$

$$\sum_{i=1}^{q}\mu_i\langle w_i|l_j\rangle=0,\ \ j=1,\ \cdots,\ n,$$

那么 $\mu_i=0,\ i=1,\ \cdots,\ n$，所以在 $l_1,\ \cdots,\ l_n$ 中任取 q 个，不妨设 $l_1,\ \cdots,\ l_q$.

$$\det|\langle l_i|w_j\rangle|\neq 0,\ i,\ j=1,\ \cdots,\ q \tag{2-1}$$

又因为 $t't(\sigma)\in N(t)^{\perp}$，所以 $\langle t't(\sigma)|w_j\rangle=0,\ j=1,\ \cdots,\ q$，即

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\langle l_i|w_j\rangle=0,\ j=1,\ \cdots,\ q. \tag{2-2}$$

如果 $m\leqslant q$，由(2-1)与(2-2)式就会得出 $\lambda_i=0,\ i=1,\ \cdots,\ m$，这样 $\|t(\sigma)\|=0,\ t(\sigma)=\theta$ 与 $N(t)\cap C=\phi$ 矛盾，所以 $m>q$.

从
$$\langle l_i|\sigma\rangle=\left\langle l_i\middle|\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right\rangle=\beta_i,\ i=1,\ \cdots,\ m_1,$$

$$\langle l_i|\sigma\rangle=\left\langle l_i\middle|\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right\rangle=\alpha_i,\ \ i=m_1+1,\ \cdots,\ m$$

与 $\alpha_i\leqslant\langle l_i|\sigma_1\rangle\leqslant\beta_i,\ \alpha_i\leqslant\langle l_i|\sigma_2\rangle\leqslant\beta_i,\ i=1,\ \cdots,\ m$ 得到

$$\begin{aligned}&\langle l_i|\sigma_1\rangle=\langle l_i|\sigma_2\rangle=\beta_i,\quad i=1,\ \cdots,\ m_1\\&\langle l_i|\sigma_1\rangle=\langle l_i|\sigma_2\rangle=\alpha_i,\quad i=m_1+1,\ \cdots,\ m\end{aligned} \tag{2-3}$$

令 $p=\sigma_1-\sigma_2$，根据(2-3)式

$$\langle l_i|p\rangle=\langle l_i|\sigma_1\rangle-\langle l_i|\sigma_2\rangle=0,\quad i=1,\ \cdots,\ m \tag{2-4}$$

而
$$t(p)=t(\sigma_1)-t(\sigma_2)=0,\ p\in N(t)$$

令
$$p=\sum_{i=1}^{q}\alpha_i w_i.$$

用(2-4)式得
$$\sum_{i=1}^{q}\alpha_i\langle w_i|l_j\rangle=0,\ j=1,\ \cdots,\ m$$

利用(2-1)式，得 $\alpha_i=0,\ i=1,\ \cdots,\ q$

$$p\equiv 0\quad 得证$$

根据定理 3，按照定理 4 的方式可以证明

定理 5　$C=\{x\in X\,|\,\langle l_i|x\rangle\leqslant c_i,\ i=1,\ \cdots,\ n\}$，如果 $N(t)+C$ 在 X 中闭，$N(t)\cap N(a)=\{0\}$，$N(t)\cap C=\phi$，并且 $N(t)$ 是有限维的，那么在 C 上关于 t 的样条函数 σ 存在且唯一.

这两个定理与希尔伯特空间插值样条的唯一性定理相像，比前人得到的凸集样条唯一性定理简单，条件“$N(t)+C$ 在 X 中闭”可以换成“存在在 C 上关于 t 的样条函数”. 当 $t=d^q$，$C=\{f\in H^q|\alpha_i\leqslant f(x_i)\leqslant\beta_i,\ i=1,\ \cdots,\ n\}$ 时，文献[1]得到的定理可看作定理 4 的推论，但我们不要 $\alpha_i<\beta_i(i=1,\ \cdots,\ n)$ 的假设.

引理 1　令 $\hat{C}=\{\hat{x}\in X\,|\,\hat{x}=x-y,\ \forall x、y\in C\}$，如果 $N(t)\cap\hat{C}=\{0\}$，那么

$$f(x)=\frac{1}{2}\|t(x)\|^2$$

是严格凸泛函.

证：因为
$$(\|t(x)\|-\|t(y)\|)^2\geqslant 0$$

对 $1>\lambda>0$ 就有

$$\lambda(1-\lambda)\|t(x)\|^2+(1-\lambda)\lambda\|t(y)\|^2\geqslant 2\lambda(1-\lambda)\|t(x)\|\|t(y)\|$$

展开、移项并化简得:

$$\lambda\|t(x)\|^2+(1-\lambda)\|t(y)\|^2\geqslant(\lambda\|t(x)\|+(1-\lambda)\|t(y)\|)^2 \tag{2-5}$$

应用 Schwarz 不等式,有

$$(\lambda\|t(x)\|+(1-\lambda)\|t(y)\|)^2\geqslant\|t(\lambda x+(1-\lambda)y)\|^2 \tag{2-6}$$

如果 $N(t)\cap\hat{C}=\{0\}$ 且 $x\neq y$, (2-5)、(2-6)式等号就不能同时成立,这时

$$\lambda\|t(x)\|^2+(1-\lambda)\|t(y)\|^2>\|t(\lambda x+(1-\lambda)y)\|^2$$

根据严格凸泛函的定义证得引理 1[8].

定理 6 如果 $N(t)\cap\hat{C}=\{0\}$, 而且存在在 C 上关于 t 的样条函数,那么这个样条函数就一定唯一.

证: 记
$$f(x)=\frac{1}{2}\|t(x)\|^2.$$

设 σ_1 与 σ_2 都是在 C 上关于 t 的样条函数,

$$f(\sigma_1)=f(\sigma_2)=\min_{x\in C}f(x).$$

利用引理 1 推知:

$$f\left(\frac{1}{2}\sigma_1+\frac{1}{2}\sigma_2\right)<\frac{1}{2}f(\sigma_1)+\frac{1}{2}f(\sigma_2)=f(\sigma_1) \tag{2-7}$$

注意 $\frac{1}{2}\sigma_1+\frac{1}{2}\sigma_2\in C$, (2-7)式与 σ_1 是 $f(x)$ 的极小点矛盾,得证.

利用定理 6 容易推出:

推论 1 令 $C=\{f\in H^m|\alpha_i\leqslant f(x_i)\leqslant\beta_i,\ i=1,\cdots,n\}$, $p(x)$ 是任一次数不高于 $m-1$ 的多项式. 如果由 $\alpha_i-\beta_i\leqslant p(x_i)\leqslant\beta_i-\alpha_i$ 可推出 $p(x)\equiv0$, 那么在 C 上关于 d^m $(d^mf=f^{(m)}(x))$ 的样条函数存在且唯一.

这是 Ritter[3] 曾经得到的结果. 他把要满足的条件称为强 m 正则条件.

三、必要条件

定义 1 设 $G_1\subset G$, A 是 G_1 表面 ∂G_1 上的一点,称 G 的子集 $\overline{G}$ 为点 A 关于 G_1 和 G 的外射集,如果连结 A 与 $\overline{G}$ 中任一点 B 的线段与 G_1 仅交于 A 点.

显然有

(1) $\overline{G}$ 是 A 的外射集当且仅当:

$$\forall B\in\overline{G},\ 1>\lambda>0\quad 有\quad x=\lambda B+(1-\lambda)A\,\overline{\in}\,G_1.$$

(2) A 的外射集正好是 G_1 在 A 点切超平面的外半空间与集合 G 的交集.

定义 2 称集合 G 的子集 $\widetilde{G}$ 为点 A 关于 G 的照射面,如果 A 与 $\widetilde{G}$ 任意一点 B 的连线,除 B 外都不在 G 中.

我们有

(1) $\widetilde{G}$ 为点 A 的照射面,当且仅当:

$$\forall B\in\widetilde{G}\ 有\ x=\lambda B+(1-\lambda)A\,\overline{\in}\,G\quad 对\ 1>\lambda>0\ 成立.$$

(2) $A\in G$, 它的照射面是空集; $A\bar{\in} G$, 它的照射面含于 G 的表面.

定理 7　如果存在唯一的 σ_1 和 σ 满足:

$$\langle t(\sigma_1)\,|\,t(\sigma_1)\rangle=\min_{x\in G_1}\langle t(\sigma_1)\,|\,t(x)\rangle,\ \langle t(\sigma)\,|\,t(\sigma)\rangle=\min_{x\in G}\langle t(\sigma)\,|\,t(x)\rangle,$$

$G_1\subset G$, 那么 σ 一定在 σ_1 关于 G_1 和 G 的外射集中.

证: 假定 σ 不在 σ_1 的外射集中, 存在 λ_0, $1>\lambda_0>0$, $x_0=\lambda_0\sigma+(1-\lambda_0)\sigma_1\in G_1$

根据假设

$$\langle t(\sigma)\,|\,t(x_0)\rangle\geqslant\langle t(\sigma)\,|\,t(\sigma)\rangle$$

$$\langle t(\sigma_1)\,|\,t(x_0)\rangle\geqslant\langle t(\sigma_1)\,|\,t(\sigma_1)\rangle$$

由此可得　$$\lambda_0\langle t(\sigma)\,|\,t(\sigma)\rangle+(1-\lambda_0)\langle t(\sigma)\,|\,t(\sigma_1)\rangle\geqslant\langle t(\sigma)\,|\,t(\sigma)\rangle,$$

化简得　$$(1-\lambda_0)\langle t(\sigma)\,|\,t(\sigma_1)\rangle\geqslant(1-\lambda_0)\langle t(\sigma)\,|\,t(\sigma)\rangle.$$

因为 $1-\lambda_0>0$, 所以

$$\langle t(\sigma)\,|\,t(\sigma_1)\rangle\geqslant\langle t(\sigma)\,|\,t(\sigma)\rangle.\tag{3-1}$$

同理, 有

$$\langle t(\sigma_1)\,|\,t(x_0)\rangle=\lambda_0\langle t(\sigma_1)\,|\,t(\sigma)\rangle+(1-\lambda_0)\langle t(\sigma_1)\,|\,t(\sigma_1)\rangle\geqslant\langle t(\sigma_1)\,|\,t(\sigma_1)\rangle.$$

注意 $\lambda_0>0$ 化简得

$$\langle t(\sigma)\,|\,t(\sigma_1)\rangle\geqslant\langle t(\sigma_1)\,|\,t(\sigma_1)\rangle.\tag{3-2}$$

利用(3-1)与(3-2)式得

$$\langle t(\sigma_1-\sigma)\,|\,t(\sigma_1-\sigma)\rangle\leqslant 0.$$

所以　$$\langle t(\sigma_1-\sigma)\,|\,t(\sigma_1-\sigma)\rangle=0.$$

$t(\sigma)=t(\sigma_1)$, 与唯一性矛盾.

定理 8　σ_1、σ 分别是在凸集 C_1、C 上关于 t 的唯一的样条函数, $C_1\subset C$, 那么 σ 一定在 σ_1 关于 C_1 和 C 的外射集中.

证: 根据定理 1,

$$\langle t(\sigma)\,|\,t(\sigma)\rangle=\min_{x\in C}\langle t(\sigma)\,|\,t(x)\rangle,$$

$$\langle t(\sigma_1)\,|\,t(\sigma_1)\rangle=\min_{x\in C_1}\langle t(\sigma_1)\,|\,t(x)\rangle.$$

应用定理 7 就可以证出定理 8.

定理 9　如果存在唯一的 σ_1 和 σ 满足:

$$\langle t(\sigma_1)\,|\,t(\sigma_1)\rangle=\min_{x\in G_1}\langle t(\sigma_1)\,|\,t(x)\rangle,$$

$$\langle t(\sigma)\,|\,t(\sigma)\rangle=\min_{x\in G}\langle t(\sigma)\,|\,t(x)\rangle$$

对希尔伯特空间 X, 有线性连续算子 a, $G_1\subset G$, $G_1=\{x\in X\,|\,a(x)\in\Gamma_1\}$, $G=\{x\in X\,|\,a(x)\in\Gamma\}$, 那么 $a(\sigma)$ 一定在 $a(\sigma_1)$ 关于 Γ_1 和 Γ 的外射集中.

证: 若不然, 存在 λ_0, $1>\lambda_0>0$, 使

$$z_0=\lambda_0 a(\sigma)+(1-\lambda_0)a(\sigma_1)\in\Gamma_1.$$

取　$$x_0=\lambda_0\sigma+(1-\lambda_0)\sigma_1,$$

$$a(x_0)=z_0.$$