中国高等学校计算机科学与技术专业（应用型）规划教材

丛书主编 陈明

数理逻辑

张再跃 张晓如 编著

清华大学出版社

中国高等学校计算机科学与技术专业（应用型）规划教材

丛书主编 陈明

数理逻辑

张再跃 张晓如 编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书共分 7 章。第 0 章绪论，介绍元数学的形成与发展，以及元数学与数理逻辑之间的关系，同时简要说明课程学习的目的和意义；第 1 章介绍集合论的基础知识，包括有穷集与无穷集的概念、可数集与不可数集的性质、集合的基数、无穷基数的比较等方面的内容；第 2 章介绍可计算性理论的基本知识，包括计算概念的形成与发展、算法的基本描述、计算概念的数学定义、可计算性函数的基本性质等；第 3 章～第 5 章是关于经典数理逻辑的内容，包括命题演算和谓词演算两个部分，重点介绍逻辑演算以及相关形式系统的基本性质，内容涉及形式证明、形式推理、形式系统的语法、语义等概念以及逻辑系统的可靠性与充分性等方面的知识；第 6 章以一阶算术系统为例，介绍基于逻辑系统扩展的数学应用系统的描述方法，最终给出“哥德尔不完备性定理”的证明。在本书的附录中给出了全书的习题解答。

本书面向计算机科学与技术、软件工程以及相关专业的高等院校学生，尤其是高校相关专业的高年级本科生及研究生，可以作为教材，也可作为希望了解数理逻辑基础知识的高校学生和科研技术工作者的阅读材料或参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

数理逻辑/张再跃，张晓如编著. —北京：清华大学出版社，2013
中国高等学校计算机科学与技术专业（应用型）规划教材
ISBN 978-7-302-33102-5

Ⅰ. ①数…　Ⅱ. ①张…　②张…　Ⅲ. ①数理逻辑－高等学校－教材　Ⅳ. ①O141

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 150348 号

责任编辑：谢　琛　徐跃进
封面设计：常雪影
责任校对：焦丽丽
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
网　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课 件 下 载：http://www.tup.com.cn，010-62795954
印 装 者：北京嘉实印刷有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：185mm×260mm　　**印　张**：9.25　　**字　数**：226 千字
版　次：2013 年 9 月第 1 版　　**印　次**：2013 年 9 月第 1 次印刷
印　数：1～2000
定　价：23.00 元

产品编号：054550-01

编委会

序言

应用是推动学科技术发展的原动力，计算机科学是实用科学，计算机科学技术广泛而深入的应用推动了计算机学科的飞速发展。应用型创新人才是科技人才的一种类型，应用型创新人才的重要特征是具有强大的系统开发能力和解决实际问题的能力。培养应用型人才的教学理念是教学过程中以培养学生的综合技术应用能力为主线，理论教学以够用为度，所选择的教学方法与手段要有利于培养学生的系统开发能力和解决实际问题的能力。

随着我国经济建设的发展，对计算机软件、计算机网络、信息系统、信息服务和计算机应用技术等专业技术方向的人才的需求日益增加，主要包括软件设计师、软件评测师、网络工程师、信息系统监理师、信息系统管理工程师、数据库系统工程师、多媒体应用设计师、电子商务设计师、嵌入式系统设计师和计算机辅助设计师等。如何构建应用型人才培养的教学体系以及系统框架，是从事计算机教育工作者的责任。为此，中国计算机学会计算机教育专业委员会和清华大学出版社共同组织启动了《中国高等学校计算机科学与技术专业（应用型）学科教程》的项目研究。参加本项目的研究人员全部来自国内高校教学一线具有丰富实践经验的专家和骨干教师。项目组对计算机科学与技术专业应用型学科的培养目标、内容、方法和意义，以及教学大纲和课程体系等进行了较深入、系统的研究，并编写了《中国高等学校计算机科学与技术专业（应用型）学科教程》（简称《学科教程》）。《学科教程》在编写上注意区分应用型人才与其他人才在培养上的不同，注重体现应用型学科的特征。在课程设计中，《学科教程》在依托学科设计的同时，更注意面向行业产业的实际需求。为了更好地体现《学科教程》的思想与内容，我们组织编写了《中国高等学校计算机科学与技术专业（应用型）规划教材》，旨在为计算机专业应用型教学的课程设置、课程内容以及教学实践起到一个示范作用。本系列教材的主要特点如下：

1. 完全按照《学科教程》的体系组织编写本系列教材，特别是注意在教材设置、教材定位和教材内容的衔接上与《学科教程》保持一致。

2. 每门课程的教材内容都按照《学科教程》中设置的大纲精心编写，尽量体现应用型教材的特点。

3. 由各学校精品课程建设的骨干教师组成作者队伍，以课程研究为基础，将教学的研究成果引入教材中。

4. 在教材建设上，重点突出对计算机应用能力和应用技术的培养，注重教材的实践性。

5. 注重系列教材的立体配套，包括教参、教辅以及配套的教学资源、电子课件等。

高等院校应培养能为社会服务的应用型人才，以满足社会发展的需要。在培养模式、教学大纲、课程体系结构和教材都应适应培养应用型人才的目标。教材体现了培养目标和育

人模式，是学科建设的结晶，也是教师水平的标志。本系列教材的作者均是多年从事计算机科学与技术专业教学的教师，在本领域的科学研究与教学中积累了丰富的经验，他们将教学研究和科学研究的成果融入教材中，增强了教材的先进性、实用性和实践性。

目前，我们对于应用型人才培养的模式还处于探索阶段，在教材组织与编写上还会有这样或那样的缺陷，我们将不断完善。同时，我们也希望广大应用型院校的教师给我们提出更好的建议。

《中国高等学校计算机科学与技术专业（应用型）规划教材》主编

陳明

2008 年 7 月

前言

数理逻辑是用数学方法研究逻辑问题的学科，是基础数学的一个重要分支，在计算机科学理论中起着奠基作用。随着计算机科学与技术的发展，计算机在各种领域的应用不断深入，许多与信息技术密切相关的学科分支相继形成，并呈现出不断扩展和永无止境的发展趋势。这种发展对计算科学理论研究不断提出新的要求，对数理逻辑的发展也起到巨大的促进作用。我们已经看到，许多在经典数理逻辑基础上发展起来的应用逻辑分支，不仅在有关的信息技术领域得到重要应用，而且已成为相关学科理论与应用的逻辑基础，如作为粗糙集与粒计算理论基础的模态逻辑与粒逻辑；作为决策信息系统知识表示与推理理论基础的决策逻辑；作为语义网知识处理理论基础的描述逻辑等。因此可以看出，数理逻辑是一门内容丰富、涉及面极广的学科。

长期以来，作为计算机科学理论与应用的基础，数理逻辑一直是我国高等教育和研究生培养阶段计算机科学与技术专业的核心基础课程。然而，作为整个专业培养计划中的一门课程，数理逻辑的学时分配非常有限，因此教学内容的组织是数理逻辑课程施教过程中首先要面临的问题。不同高校在培养方案制定和课程设置方面都存在着一定的差异，再结合学校专业的特色和学生的学习特点，使得数理逻辑课程内容的组织不尽相同，可谓各具特色。但可以肯定的是，课程教学内容的组织与课程目的密切相关。课程目的通常包括两个方面，即课程设置目的和课程教学目的。对数理逻辑课程来说，课程设置与课程教学目的可以分别概括为“承上启下”和“能力培养”。

作为计算机科学与技术专业培养计划中的一门课程，数理逻辑课程应该是一些前置课程，如高等数学、离散数学等课程学习的深入，同时又是某些后续课程，如粗糙集与粒计算、语义网技术、知识表示与知识推理、形式语言与自动机理论等课程学习的基础；课程教学目的可归纳为知识学习和能力培养，所谓知识学习是指作为学科基础的逻辑知识学习，而能力培养则应侧重于思维能力的培养，包括抽象思维能力、逻辑思维能力与计算思维能力的培养等。鉴于此，同时考虑到工科学生的特点，本书在选材上遵循的原则是“至精而不失完整，至简而不乏基础”，也就是尽可能多地介绍数理逻辑相关知识，并在内容组织上尽可能做到精练；同时在内容陈述上尽可能做到简洁，重在思想与方法，为后续课程学习以及计算机应用实践建立思维基础。

本书在内容组织上包括集合论基础知识、可计算性理论基础知识和经典数理逻辑 3 个部分，其中集合论基础部分着重介绍可数集与不可数集的概念，并运用集合的基数以及基数的比较等有关知识，阐述“无穷可比”的思想，目的在于扩展学生的思维空间，深化学生对计算机有穷空间的认识；可计算性理论基础部分以递归函数、图灵计算和理想计算机为对象，

从多个角度给出“计算”概念的精确描述，目的在于帮助学生深入了解“计算”的本质，并对计算机的计算“行为”与“能力”有一个充分认识；经典逻辑部分包括命题逻辑和谓词逻辑，着力于形式系统，重点介绍形式证明、形式推理，形式系统的语法、语义等概念，以及逻辑系统的可靠性与充分性等方面的知识，并以一阶算术系统为例介绍逻辑系统的扩展方法，旨在帮助学生了解和掌握形式化方法，以此为工具更好地开展计算机基础理论研究和计算机程序分析、设计与开发工作。为了让学生能够更好地理解和掌握课程学习的主要内容，并能得到比较扎实的数理逻辑的训练，同时也考虑课程施教方便，本书在内容陈述上尽可能做到直观简洁，多采用条目方式使概念一目了然，而不拘泥于“复杂的证明与个别的技巧”，重在思想与方法，运用“即述即注”方式，帮助学生准确地理解和把握相关的概念与知识，正确地掌握有关方法和技术。此外，本书中还编入了一些有关数理逻辑知识背景的材料，概括性地叙述各部分内容的形成与发展过程，阐述了许多著名逻辑学家的重要思想，以及为学科的建立与发展所做出的杰出贡献，这对加深学生对本学科的认识，提高学生的素养无疑会起到积极的作用。

本书的内容主要取自于格林(Kleene)的《元数学导论》[①]和汉密尔顿(Hamilton)的《数学家的逻辑》[②]两本著名著作，同时收纳了顾兰德(Gutland)的《可计算性》[③]一书的部分内容，并根据课程教学需要对所选取的内容和表示形式进行了精简、编辑、统一与整合。此外，书中有关知识背景的介绍参阅了网络提供的大量素材，尽管有些素材的准确性与严格性尚待进一步考证，但大量的网络信息的确为我们更好地了解相关知识的产生与发展以及科学家们的贡献提供了很好的帮助。

在十多年数理逻辑课程教学实践中，作者一直使用讲稿施教，教学内容也根据需要不断调整，先后在经典逻辑的基础上增加了集合论基础知识和可计算性理论基础知识方面的内容。随着研究生招生规模的不断扩大，个别讲授已变成了班级授课，因此在讲稿的基础上整理成书，以教材的形式出版。在此过程中，江苏科技大学研究生部对本课程进行了教材立项建设并给予了经费资助，洪志强同学完成本书的文字录入，在此一并表示诚挚的感谢。

限于作者的水平，书中的缺点甚至错误在所难免，诚请读者批评指正。

作　者
2013 年 7 月

① S. C. Kleene(美)著. 元数学导论. 莫绍揆译. 北京：科学出版社，1985.

② A. G. Hamilton. Logic for mathematicians. London：Cambridge University Press，1978.

③ N. Gutland. Computability：An introduction to recursive function theory. London：Cambridge University Press，1980.

目录

绪　论

1. 何谓元数学

要弄清楚这个问题，首先要知道“元数学”(meta-mathematics) 和“数学”的区别究竟在哪里。我们知道，“数学”是关于“数”的学问，一切在特定范围内可以被理解为“数”的东西，都可以是数学研究的对象。由于数学的高度抽象和研究对象的广泛性，使得数学被誉为几乎所有学科的基础。于是便有人问：数学的基础又是什么呢？

每门“学问”都有特定的研究对象，弄清一门学问的研究对象至关重要，将不是某学问研究的对象同其研究对象混淆，往往是引起“悖论”的根源。例如，自然数理论研究的对象是“自然数”，将所有自然数放在一起得到自然数集 **N** 就不再有自然数的性质，如果还将 **N** 作为自然数理论研究的对象就会出现问题。再如集合论研究的对象是“集合”，如自然数集 **N** 就是其研究对象之一，将所有的集合放在一起就得到一个类 L，如果仍将 L 作为集合论研究的对象同样也会出现问题，著名的“罗素悖论”(Russell's paradox)就是因此产生的。数学研究的对象是“数”，不同的数学分支有其各自的论域，如果将所有数学分支的“汇集”作为研究的论域，以其“共性”分析为内容，以为其建立完备与协调的共同基础为目的，那么这样的“任务”就不能再由任何作为对象的数学分支来完成，对此需要一套独立于各个数学分支之外的理论，“元数学”的概念与理论由此产生。

一般而言，“元数学是一种将数学作为人类意识和文化客体的科学思维或知识”；进一步说，“元数学是一种用来研究数学和数学哲学的数学”[①]；通俗地讲，元数学是“数学的数学”。但此数学非彼“数学”，将二者混为一谈就会导致矛盾。对此，需首先了解和认识一下元数学的形成与发展过程。

2. 元数学的形成与发展

元数学的形成与发展和数学发展史上曾经发生过的三次重大危机有着密切的关系[②]。

大约在公元前 500 年左右，无理数$\sqrt{2}$的出现对毕达哥拉斯(Pythagoras)学派所谓“宇宙间的一切现象都能归结为整数或整数之比”的信条形成致命冲击，毕达哥拉斯的得意门生希帕索斯(Hippasus)因无意中透露了$\sqrt{2}$的存在而被处死，这就是所谓的“第一次数学危机”。此次数学危机使人们认识到直觉和经验不一定靠得住，而推理证明才是可靠的。从此希腊人便开始了以“公设”(即公理)为出发点，运用演绎推理来建立几何学体系的方法研究与实践。作为第一次数学危机的产物，得以形成欧几里得(Euclid)《几何原本》的公理体系与亚里士多德(Aristotle)的逻辑体系。

---

① http://en.wikipedia.org/wiki/Metamathematics.

② http://baike.baidu.com/view/96916.htm.

第二次数学危机是由无穷小量的矛盾引起的。17 世纪后半叶，英国数学家牛顿(Newton)和德国数学家莱布尼茨(Leibniz)分别独立地建立了微积分学。虽然微积分以其运算的完整性和应用范围的广泛性成为当时解决问题的重要工具，但是由于对其中涉及的“无穷小量”概念无法做出合理的解释，从而引发了第二次数学危机。这说明当时人们的数学思想依旧缺乏严密性，对相关数学概念的理解和认识尚处在直观的层面，只强调形式的计算，而忽视基础的可靠性问题。直到 19 世纪 20 年代，一些数学家才开始关注微积分的严格基础。从波尔查诺(Bolzano)、阿贝尔(Abel)、柯西(Cauchy)、狄里克莱(Dirichlet)等人的工作开始，最终由魏尔斯特拉斯(Weierstrass)消除了其中不确切的地方，给出了现在通用的 $\varepsilon-\delta$ 极限定义，并将导数、积分等概念都严格地建立在极限的基础上，从而克服了危机和矛盾。随后历经近半个世纪，魏尔斯特拉斯、戴德金(Dedekind)、康拓尔(Cantor)等人又独立地建立了实数理论，并在此基础上建立了极限论的基本定理，从而使数学分析最终建立在实数理论的严格基础之上。

经过第一、第二次数学危机，人们将数学基础理论的无矛盾性，归结为集合论的无矛盾性，集合论已成为整个现代数学的理论基础，数学这座富丽堂皇的大厦就算竣工了。看来集合论似乎是不会有矛盾的，数学的严格性的目标快要达到了。在 1900 年巴黎召开的国际数学家大会上，数学家们为这一成果的喜悦溢于言表。然而，事隔不到两年，英国著名数理逻辑学家和哲学家罗素(Russell)即宣布了一条惊人的消息：集合论是自相矛盾的，并不存在什么绝对的严密性！史称“罗素悖论”。

当时，人们将“集合”描述成具有某种特性事物的汇集。依据这个描述，如果 $\varphi(x)$ 表示 x 具有特性 φ，则 $S=\{x:\varphi(x)\}$ 就应当为集合。对此，罗素给出了一个特性 φ，$\varphi(x)$ 当且仅当 $x\notin x$，于是存在“集合”L，满足

$$L = \{x: x \notin x\}$$

接下来问是否有 $L\in L$？如果 $L\in L$，那么作为 L 的元素，L 应有特性 φ，即 $L\notin L$；如果 $L\notin L$，那么 L 满足特性 φ，又有 $L\in L$。

1918 年，罗素将这个悖论通俗化，给出了“理发师悖论”：*某一村落中的一个理发匠，他只替村中所有不给自己理发的人理发，到底他是否替自己理发？*

罗素悖论的发现，无异于晴天霹雳，使人们从美梦中惊醒。罗素悖论以及集合论中其他一些悖论，深入到集合论的理论基础之中，从而从根本上危及了整个数学体系的确定性和严密性，于是在数学和逻辑学界引起了一场轩然大波，形成了数学史上的第三次危机。

“理发师悖论”不难解决，只须说不会有这样的一个理发师即可。但是对罗素悖论人们却不能说没有这样的 L，因为 L 已经实实在在地构造出来。为了消除“罗素悖论”，人们必须对“集合”这一基本概念进行重新思考，方法是在传统“集合”概念的基础上增加一些限制以排除“太大的集”。对此，德国数学家策梅罗(Zermelo)首先提出了集合论公理化方案，并在 1908 年提出了第一个公理集合论系统①。后经德国的以色列数学家弗兰克尔(Fraenkel)②

① E. Zermelo. Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. Math. Ann. 65 (1908): 261-281.

② A. A. Fraenkel. Uber den Begriff “definit” und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms. S.-B. Berlin. Math. Ges. (1922): 250-273.

和挪威数学家斯科兰姆(Skolem)[①]的补充修正,得到了策梅罗-弗兰克尔公理系统 ZF,加上选择公理(AC),便形成了现在普遍使用的集合论公理系统 ZFC[②]。ZFC 公理系统将 L 视为集合论的论域而不再是传统意义上的集合,进而排除了"罗素悖论"。

为了避免数学中出现类似的悖论,数学家们做了各种努力。由于解决问题的出发点和所遵循的途径不同,20 世纪初期形成了不同的数学哲学流派,其中以罗素为首的逻辑主义学派,布劳威尔(Brouwer)为首的直觉主义学派和希尔伯特(Hilbert)为首的形式主义学派成为主流。这三大学派的形成与发展,将数学基础理论研究推向了一个新的阶段。20 世纪 20 年代初,德国数学家希尔伯特就古典数学的基础问题研究提出一项建议(该建议随后成为著名的 Hilbert 计划):首先强调数学理论的严格形式化,将数学具体分支中的概念进一步抽象,其结果是形成一个形式系统(形式理论或形式数学);其次,是将这个形式系统当作数学研究的对象,并能证明该形式系统是协调的。研究这个形式系统的数学理论必须具有相对的独立性,这套数学理论就称为元数学或证明论。元数学研究的最重要的成果之一是"哥德尔不完备性定理"。

3. 元数学与数理逻辑

元数学与数理逻辑息息相关,两者具有相同的发展根系。早在 17 世纪,人们就有"利用计算的方法来代替人们思维中的逻辑推理过程"的想法。当时德国著名的数学和物理学家莱布尼茨就曾经设想过能否创造一种"通用的科学语言",可以将推理过程像数学一样利用公式进行计算,从而得出正确的结论。这一思想可谓是现代数理逻辑中部分内容的萌芽。1847 年,英国数学家布尔(Boole)发表了《逻辑的数学分析》,建立了"布尔代数",并创造一套符号系统,利用符号来表示逻辑中的各种概念。布尔给出了一系列运算法则,利用代数的方法研究逻辑问题,初步奠定了数理逻辑的基础。19 世纪末 20 世纪初数理逻辑有了比较大的发展,德国数学家弗雷格(Frege)分别在 1879 年和 1884 年出版了著作《概念文字——模仿算术的纯思维的形式语言》和《算术基础——关于数概念的逻辑数学研究》[③],使得数理逻辑的符号系统更加完备,为现代数理逻辑(包括元数学)的形成与发展奠定了基础。

"数理逻辑"(Mathematical logic)的名称是由意大利著名数学家、逻辑学家和语言学家皮亚诺(Peano)首先给出的[④],又称为符号逻辑。无论是数理逻辑,还是元数学,都是关于数学基础研究的理论与方法,经过长期的发展与完善,已形成一个比较系统的理论体系,该理论体系的主要分支包括逻辑演算、模型论、证明论、递归论和公理集合论。各个分支既独立又相互关联,其研究内容和应用范围各有侧重。目前,"数理逻辑"的侧重点在于逻辑演算,包括命题演算与谓词演算,"元数学"则侧重于证明论的某些方面。由于"元数学"的侧重方面较之"数理逻辑"在应用领域有一定的局限性,因此使得"数理逻辑"逐步成为数学基础学科的代名词而被更多的人认识并接受。

4. 本课程学习目的

数理逻辑与计算机科学有着密切的联系,许多计算机科学的先驱者既是数学家,又是逻

---

① T. Skolem. Selected Works in Logic. Edited by J. E. Fenstad. Universitetsforlaget, Oslo, 1970. MR 44 # 2562.

② T. Jech. Set Theory. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003: 3-13.

③ http://en.wikipedia.org/wiki/Gottlob_Frege.

④ http://en.wikipedia.org/wiki/Giuseppe_Peano.

辑学家，如冯·诺依曼(von Neumann)、图灵(Turing)和邱奇(Church)等。数理逻辑和计算机科学有一个共同的基本属性，那就是两者都属于模拟人类认知机理的科学，前者试图以形式化的方法加以描述，后者却努力用程序化的设计加以实现。几个世纪以来，数学家和逻辑学家在数学基础研究领域的贡献为计算机科学的产生与发展奠定了强有力的理论基础，反之，现代计算机科学的理论研究与实践又大大促进了数理逻辑的研究、发展与进步。

数理逻辑的教材很多，其中不乏数理逻辑在计算机科学领域应用的内容，如数理逻辑在数字电路分析、编译方法、程序设计语言、程序设计方法学、关系数据库、知识表示与知识推理、人工智能方面的应用等。这样的内容安排无疑可以起到"学以致用"作用。然而，作为计算机科学与技术及相关专业研究生课程体系中的一门课程，加以"应用"来介绍数理逻辑会因受学时数的限制而"浮于皮毛"，容易造成对"逻辑"一知半解，对"应用"又难以深入的结果。与其"面面俱到"不如深入"精华"，因此本课程主要内容以元数学的基本理论与基本方法为主加以组织，同时兼顾了计算机科学与技术及相关专业特点。课程学习的主要目的是要让学习者更好地认识数理逻辑的精髓，使数理逻辑真正成为学习者知识体系和思维方式的有机组成部分。同时培养学习者抽象思维能力，提高学习者逻辑推理水平，强化学习者学科素养，使学习者在今后的工作与实践中，能够自觉或不自觉地将所学知识加以推广和应用。

Chapter 1

第 1 章　集合论基础

集合是数学中最原始的概念之一，通常不加定义而只给出描述。集合一般被描述为“按照某种特征或规律汇合起来的事物的总体”。集合论的全部历史是围绕着“无穷”的概念展开的，因此集合论又称为是关于无穷集合和超穷数的数学理论。

早在集合论创立之前，数学家和哲学家们就已经接触到大量有关“无穷”的问题。由于现实生活中并没有“无穷”的实体，因此无穷集的存在性一度受到人们的质疑，这其中就包括有“数学家之王”美誉的高斯(Gauss)和法国著名的大数学家柯西(Cauchy)。1831 年 7 月，高斯在给他的朋友舒马赫尔(Schumacher)的信中说：“我必须最最强烈地反对你把无穷作为一完成的东西来使用，因为这在数学中是从来不允许的。”然而，“无穷”问题却像一块具有魔力的“磁铁”，深深地吸引着那些勇于探索真理、意志顽强的数学家们。数学分析严格化的先驱、捷克数学家波尔查诺(Bolzano)是第一个为了建立集合的明确理论而做出积极努力的人，他坚持实无穷集合的存在性，通过引进一一对应的概念，给出了无穷集合的一个部分或子集可以等价于其整体的重要思想。19 世纪 70 年代，德国数学家康拓尔在研究函数 $f(x)$ 的三角级数表示的唯一性过程中，引进了点集的极限、点集的导集等重要概念，为点集论奠定了基础。随后，他又建立了“可数集”的概念，并明确指出无穷集的存在，证明了“并非所有的无穷集都是可数的”以及“无穷集和有穷集一样也有数量(基数)上的差别”。围绕集合论的基本问题康拓尔发表了一系列文章，直到 19 世纪末，康拓尔最后一部重要著作《对超穷集合论基础的贡献》面世，标志集合论已从点集论过渡到抽象集合论，即今天人们所说的古典集合论或朴素集合论。

康拓尔的工作给数学发展带来了一场革命，同时也引来了许多“非难”和“质疑”，致使康拓尔在精神上受到巨大的打击。然而，历史终究公平地评价了他的创造。集合论在 20 世纪初已逐渐渗透到各个数学分支，成为分析理论、测度论、拓扑学及数理科学中必不可少的工具。在这个时期，世界上最伟大的数学家希尔伯特在德国传播了康拓尔的思想，称之为“数学家的乐园”和“数学思想最惊人的产物”，英国哲学家罗素把康拓尔的工作誉为“这个时代所能夸耀的最巨大的工作”。

本章介绍集合论基础知识，内容包括可数集与不可数集的基本概念与基本性质、有穷集与无穷集的本质区别以及无穷基数的比较等。在学习过程中，大家将体会“可数集”的精妙，认识“无穷集”的神奇，感受证明方法的精彩，领略数学大家的智慧。通过本章的学习，要充分认识有穷集和无穷集在本质上的区别，深入理解可数集的基本概念，掌握康拓尔对角线证明思想与方法，知晓不可数集的存在以及无穷量之间的差别。

1.1 可数集

“可数集”是康拓尔集合论中最基本也是最重要的概念之一。这一概念的引入为无穷集的研究奠定了重要基础,它不仅定义了一类无穷集存在的实例,而且它也是所有无穷集中的“最小者”,是人们跨越有穷,迈向无穷的出发点。可以说“可数集”是一个极富智慧的概念。在给出“可数集”定义之前,这里先回顾一下“映射”的概念。

1.1.1 映射

“映射”是一个重要的数学工具,通过映射可以建立数学对象之间的联系,分析数学对象之间的关联,抽象相关数学对象的一般规律。

1. 映射的概念

1)映射的定义

设 X 和 Y 是两个集合,φ 是一个法则,它使得对任意的 $x\in X$,都有 Y 中唯一确定的元素 y 与之对应,则 φ 称为集 X 到 Y 中的一个对应(映射),记为 $\varphi:X\to Y$。

对 $x\in X$,经规则 φ 在 Y 中与之对应的元素为 y,记为 $y=\varphi(x)$ 或 $\varphi(x)=y$,其中 x 称为原像,y 称为 x 经 φ 在 Y 中的像。集合 $\varphi(X)=\{\varphi(x)\mid x\in X\}$ 称为 φ 关于 X 的像集(简称 φ 的像集),显然 $\varphi(X)\subseteq Y$。

2)满射

设 $\varphi:X\to Y$,如果对任意 $y\in Y$,都有 $x\in X$ 使得 $\varphi(x)=y$,则称 φ 是满射(或到上的映射)。显然,映射 $\varphi:X\to Y$ 是满射当且仅当 $\varphi(X)=Y$。

3)单射

设 $\varphi:X\to Y$,如果对任意 $x_1,x_2\in X$,若 $x_1\neq x_2$ 则有 $\varphi(x_1)\neq\varphi(x_2)$,则称 φ 是单射。

考察单射的方法通常是设 $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$ 并由此推出 $x_1=x_2$。

4)双射(又称 1-1 映射)

设 $\varphi:X\to Y$,如果 φ 既是满射又是单射,则称 φ 是 X 到 Y 的双射(1-1 映射)。φ 是 X 到 Y 的双射可表示为:$\varphi:X\xrightarrow{1\text{-}1}Y$。

5)复合映射

设 $\varphi:X\to Y,\psi:Y\to Z$,对任意 $x\in X$,定义对应法则 $\varphi\circ\psi$ 满足 $\varphi\circ\psi(x)=\psi(\varphi(x))$,则 $\varphi\circ\psi$ 称为 φ 与 ψ 的复合(或合成)映射。显然 $\varphi\circ\psi:X\to Z$。