高等院校数学教材同步辅导及考研用书

概率论与数理统计习题精解及考研辅导（第2版）

高等数学习题精解及考研辅导（第2版）

线性代数习题精解及考研辅导（第2版）

ISBN 978-7-5641-4024-3

9 787564 140243 >

定价：48.00元

高等数学习题精解及考研辅导

(第2版)

高教版《高等数学》(第六版)(同济大学编)

周华任 等编

东南大学出版社

内 容 简 介

本书是根据高等教育出版社的《高等数学》(第六版)(同济大学编)编写的辅导及考研教材,包括了知识逻辑结构图,基础知识及考研考试内容,学习目的及考研考试要求,课后习题精解,考研真题精选五大部分,在详细给出书中习题解答过程的基础上,分析了考试的热点及出题的角度以及重点考察的知识点,具有很强的针对性和应用性。本书题目丰富,难度由浅入深,以研究生入学考试的题目难度为标准,循序渐进,在笔者的课程教学和考研辅导中取得了很好的效果。

本书适合于大学工科、经济学、管理学等专业的学生作为学习参考用书,也可供硕士研究生入学考试学习使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题精解及考研辅导/周华任等编. —2版. —南京:东南大学出版社,2014.2

高等院校数学教材同步辅导及考研用书

ISBN 978-7-5641-4024-3

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①周… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第025957号

高等数学习题精解及考研辅导(第2版)

编　　者 周华任等
责任编辑 宋华莉
编辑邮箱 52145104@qq.com

出版发行 东南大学出版社
出 版 人 江建中
社　　址 南京市四牌楼2号(邮编:210096)
网　　址 http://www.seupress.com
电子邮箱 press@seupress.com
印　　刷 南京京新印刷厂
开　　本 700 mm×1 000 mm　1/16
印　　张 28.75
字　　数 787千
版　　次 2012年8月第1版　2014年2月第2版第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5641-4024-3
定　　价 48.00元

经　　销 全国各地新华书店
发行热线 025-83790519　83791830

(本社图书若有印装质量问题,请直接与营销部联系,电话:025-83791830)

第 2 版前言

这一版我们对本书第 1 版中的一些考研真题重新归类整合，修改了其中的一些疏漏和不妥之处，增加了 2013 年和 2014 年全国硕士研究生入学考试的数学一、数学二和数学三的真题。

书中不足之处，诚恳地希望广大读者批评指正。

作者

2014 年 1 月

前　言

高等数学是高等学校理工科各专业的一门重要基础课程，是学习后续课程及进行科学理论研究与实践的数学基础，也是研究生入学考试的必考科目之一。为此，我们精心组织策划了这本复习辅导用书。

本书是与《高等数学》(同济六版)同步配套的复习辅导用书，编写本书的目的有两个：一是帮助读者熟练掌握各种题型的解题思路、方法和技巧；二是通过精心选取的部分考研真题，帮助读者掌握考题的特点、重点和热点，做到知识的系统把握和灵活运用，为之研究生入学考试做好准备。

本书由以下几个部分组成：

1. 知识逻辑结构图：将每章知识点列式图表，以便学习掌握。

2. 基础知识及考研考试内容：列出了各章的主要内容，突出必须掌握或考试中出现频率较高的核心内容。

3. 学习目的及考研考试要求：列出相应各章的考点内容，给出了相应的考研考试要求说明，以帮助广大同学对相应内容重点把握。

4. 课后习题精解：教材中课后习题丰富、层次多，对课后习题给出了详细的解答。为了突出重点，我们把选学内容和考研考试不做要求的题目进行了删除，这样便于突出重点。

5. 考研真题精选：精选历年全国研究生入学考试试题中具有代表性的题目进行了详细的解答，这些题目涉及内容广、题型多、技巧性强，可以使广大同学举一反三，触类旁通，开拓解题思路，更好地掌握高等数学的基本内容、考试题型和解题方法。

本书由周华任，宿兴涛，王秋良，熊春晖，王知田，刘硕松，李喜波，陈玉金编写。

本书适合于大学工科、经济学、管理学等专业的学生以及硕士研究生入学考试时使用。由于水平所限，不妥之处在所难免，恳请读者及同行批评指正。

目　录

反之，$y\in f(A)\cup f(B)$，则 $y\in f(A)$ 或 $y\in f(B)$，则存在 $x\in A$ 或 $x\in B$，使 $y=f(x)$，则 $y\in f(A\cup B)$，这表示 $f(A)\cup f(B)\subset f(A\cup B)$.

于是 $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

(2) 由 $y\in f(A\cap B)$，则存在 $x\in A\cap B$，使 $y=f(x)$，则 $y\in f(A)$ 且 $y\in f(B)$，则 $y\in f(A)\cap f(B)$，知 $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

4. 求下列函数的自然定义域：

(1) $y=\sqrt{3x+2}$；　(2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$；　(3) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；

(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；　(5) $y=\sin\sqrt{x}$；　(6) $y=\tan(x+1)$；

(7) $y=\arcsin(x-3)$；　(8) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；　(9) $y=\ln(x+1)$；

(10) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

【解】 (1) $3x+2\geqslant 0, x\geqslant -\dfrac{2}{3}$，定义域为 $\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.

(2) $1-x^2\neq 0, x\neq\pm 1$，定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(3) $x\neq 0$ 且 $1-x^2\geqslant 0$，即 $x\neq 0$ 且 $|x|\leqslant 1$，定义域为 $[-1,0)\cup(0,1]$.

(4) $4-x^2>0$，$|x|<2$，定义域为 $(-2,2)$.

(5) 定义域为 $[0,+\infty)$.

(6) $x+1\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$，

定义域为 $\left(k\pi+\dfrac{\pi}{2}-1, k\pi+\dfrac{3\pi}{2}-1\right)(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

(7) $-1\leqslant x-3\leqslant 1, 2\leqslant x\leqslant 4$，定义域为 $[2,4]$.

(8) $3-x\geqslant 0$ 且 $x\neq 0$，即 $x\leqslant 3$ 且 $x\neq 0$，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,3]$.

(9) $x+1>0$，即 $x>-1$，定义域为 $(-1,+\infty)$.

(10) $x\neq 0$，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

5. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$；

(2) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$；

(4) $f(x)=1, g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

【解】 (1) 不相同. 因为 $\lg x^2$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $2\lg x$ 的定义域是 $(0,+\infty)$.

(2) 不相同. 因为两者对应法则不同，当 $x<0$ 时，$g(x)=-x$.

(3) 相同. 因为两者定义域、对应法则均相同.

(4) 不相同. 因为两者定义域不同.

6. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$

求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right),\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right),\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right),\varphi(-2)$，并作出 $y=f(x)$ 的图形.

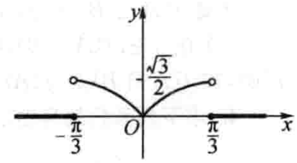
【解】 因为 $|x|=\left|\dfrac{\pi}{6}\right|<\dfrac{\pi}{3}$，所以

$$\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2}.$$

同理可得 $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2},\varphi(-2)=0$$

$y=\varphi(x)$ 的图形见右图.



7. 试证下列函数在指定区间内的单调性：

(1) $y=\frac{x}{1-x},(-\infty,1)$;

(2) $y=x+\ln x,(0,+\infty)$.

【证】 (1) $\forall x_1,x_2\in(-\infty,1)$，且 $x_1<x_2$，由

$$\frac{x_2}{1-x_2}-\frac{x_1}{1-x_1}=\frac{x_2(1-x_1)-x_1(1-x_2)}{(1-x_1)(1-x_2)}=\frac{x_2-x_1}{(1-x_1)(1-x_2)}>0,$$

从而 $y(x_2)>y(x_1)$，所以$\frac{x}{1-x}$ 在$(-\infty,1)$ 内单调递增.

(2) $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，由 $y_2-y_1=(x_2+\ln x_2)-(x_1+\ln x_1)=x_2-x_1+\ln\frac{x_2}{x_1}$，因为 $x_2>x_1>0$，所以 $x_2-x_1>0$，且$\frac{x_2}{x_1}>1,\ln\frac{x_2}{x_1}>0$，从而 $y_2>y_1$，所以 $x+\ln x$ 在$(0,+\infty)$ 内单调递增.

8. 设 $f(x)$ 为定义在$(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在$(0,l)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在$(-l,0)$ 内也单调增加.

【证】 $\forall x_1,x_2\in(-l,0)$，且 $x_1<x_2$，则 $-x_1,-x_2\in(0,l)$，且 $-x_2<-x_1$.

由于 $f(x)$ 是$(-l,l)$ 内的奇函数，且在$(0,l)$ 内单调增加，所以

$$f(-x_2)-f(-x_1)=-f(x_2)+f(x_1)<0,$$

从而 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $f(x)$ 在$(-l,0)$ 内也单调增加.

9. 设下面所考虑的函数都是定义在区间$(-l,l)$ 上的，证明：

(1) 两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数.

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

【证】 设 $f_1(x),f_2(x)$ 为奇函数，而 $g_1(x),g_2(x)$ 为偶函数.

(1) $g_1(-x)+g_2(-x)=g_1(x)+g_2(x)$，所以两个偶函数的和仍为偶函数.

$f_1(-x)+f_2(-x)=-[f_1(x)+f_2(x)]$，所以两个奇函数的和仍为奇函数.

(2) $g_1(-x)\cdot g_2(-x)=g_1(x)\cdot g_2(x)$，所以两个偶函数的乘积是偶函数. 而

$$f_1(-x)\cdot f_2(-x)=-f_1(x)\cdot[-f_2(x)]=f_1(x)\cdot f_2(x),$$

所以两个奇函数的乘积是偶函数. 又

$$g_1(-x)\cdot f_1(-x)=g_1(x)\cdot[-f_1(x)]=-g_1(x)\cdot f_1(x),$$

所以偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

10. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些是既非偶函数又非奇函数？

(1) $y=x^2(1-x^2)$; (2) $y=3x^2-x^3$; (3) $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$;

(4) $y=x(x-1)(x+1)$; (5) $y=\sin x-\cos x+1$; (6) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$.

【解】 (1) $f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x)$,

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(2) $f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3\neq -f(x)$,且 $f(-x)\neq f(x)$,

所以 $f(x)$ 是既非偶函数又非奇函数.

(3) $f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$,所以 $f(x)$ 为偶函数.

(4) $f(-x)=(-x)[(-x)-1][(-x)+1]=-x(x-1)(x+1)=-f(x)$,

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(5) $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1$,

$f(-x)\neq -f(x)$ 且 $f(-x)\neq f(x)$,

所以 $f(x)$ 是既非偶函数又非奇函数.

(6) $f(-x)=\dfrac{a^{(-x)}+a^{-(-x)}}{2}=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}=f(x)$,

所以 $f(x)$ 为偶函数.

11. 下列各函数中哪些是周期函数?对于周期函数,指出其周期.

(1) $y=\cos(x-2)$;　(2) $y=\cos 4x$;　(3) $y=1+\sin \pi x$;

(4) $y=x\cos x$;　(5) $y=\sin^2 x$.

【解】 (1) $y=\cos(x-2)$ 是周期函数,周期 $l=2\pi$.

(2) $y=\cos 4x$ 是周期函数,周期 $l=\dfrac{\pi}{2}$.

(3) $y=1+\sin \pi x$ 是周期函数,周期 $l=2$.

(4) $y=x\cos x$ 不是周期函数.

(5) $y=\sin^2 x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x$ 是周期函数,周期 $l=\pi$.

12. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$;　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$;

(3) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$;　(4) $y=2\sin 3x\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{6}\right)$;

(5) $y=1+\ln(x+2)$;　(6) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

【解】 (1) 由 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 则 $x=y^3-1$,则反函数为 $y=x^3-1$.

(2) 由 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 则 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$,则反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

(3) 由 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 则 $x=\dfrac{-dy+b}{cy-a}$,则反函数为 $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$.

(4) 由 $y=2\sin 3x\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{6}\right)$ 则 $x=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{y}{2}$,则反函数 $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$.

(5) 由 $y=1+\ln(x+2)$ 则 $x=e^{y-1}-2$,则反函数 $y=e^{x-1}-2$.

(6) 由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 则 $2^x=2^x\cdot y+y$,即 $2^x(1-y)=y$,$2^x=\dfrac{y}{1-y}$,$x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$,

则反函数 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

13. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义,试证:函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

【证】 充分性:设 $M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2$,则 $\forall x\in X$,取 $M=\max\{|M_1|,|M_2|\}$,则 $|f(x)|\leqslant M$,

从而 $f(x)$ 在 X 上有界.

必要性:设 $f(x)$ 有界,即 $\forall x\in X$,有 $|f(x)|\leqslant M$,则 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$,故知 $f(x)$ 既有下界 $M_1=-M$,又有上界 $M_2=M$,得证.

14. 在下列各题中,求由所给函数构成的复合函数,并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

(1) $y=u^2,u=\sin x,x_1=\dfrac{\pi}{6},x_2=\dfrac{\pi}{3}$;

(2) $y=\sin u,u=2x,x_1=\dfrac{\pi}{8},x_2=\dfrac{\pi}{4}$;

(3) $y=\sqrt{u},u=1+x^2,x_1=1,x_2=2$;

(4) $y=e^u,u=x^2,x_1=0,x_2=1$;

(5) $y=u^2,u=e^x,x_1=1,x_2=-1$.

【解】 (1) $y=\sin^2 x,y_1=\dfrac{1}{4},y_2=\dfrac{3}{4}$;

(2) $y=\sin 2x,y_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2},y_2=1$;

(3) $y=\sqrt{1+x^2},y_1=\sqrt{2},y_2=\sqrt{5}$;

(4) $y=e^{x^2},y_1=1,y_2=e$;

(5) $y=e^{2x},y_1=e^2,y_2=e^{-2}$.

15. 设 $f(x)$ 的定义域 $D=[0,1]$,求下列各函数的定义域:

(1) $f(x^2)$; (2) $f(\sin x)$; (3) $f(x+a)\ (a>0)$; (4) $f(x+a)+f(x-a)\ (a>0)$.

【解】 (1) $x^2\in[0,1]$,即 $x\in[-1,1]$,故定义域为$[-1,1]$.

(2) $\sin x\in[0,1]$,即 $x\in[2k\pi,2k\pi+\pi],k\in\mathbf{Z}$,故定义域为$[2k\pi,2k\pi+\pi],k\in\mathbf{Z}$.

(3) $x+a\in[0,1]$,即 $x\in[-a,1-a]$,故定义域为$[-a,1-a]$.

(4) 由 $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\0\leqslant x-a\leqslant 1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\a\leqslant x\leqslant 1+a.\end{cases}$

所以 ① 当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时,有 $a\leqslant x\leqslant 1-a$,即定义域为$[a,1-a]$;

② 当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时,定义域为空集.

16. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\0, & |x|=1,\\-1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=e^x$,求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$,并作出这两个函数的图形.

【解】 将 $g(x)=e^x$ 代替 x 代入 $f(x)$ 中,得

$$f[g(x)]=f(e^x)=\begin{cases}1, & |e^x|<1,\\0, & |e^x|=1,\\-1, & |e^x|>1.\end{cases}$$

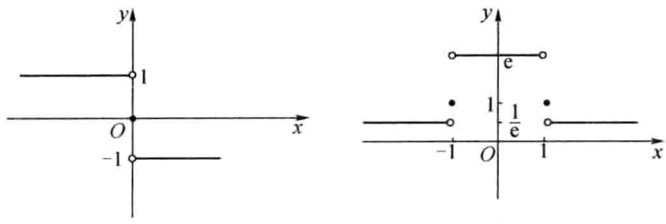
即 $$f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0,\\0, & x=0,\\-1, & x>0.\end{cases}$$

函数 $f[g(x)]$ 的图形如下图(a) 所示.

将 $f(x)$ 代替 x 代入 $g(x)$ 中,得

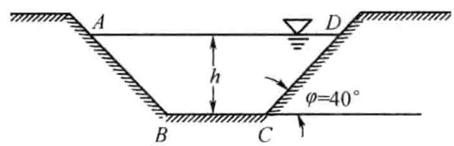
$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases} e^1=e & |x|<1, \\ e^0=1, & |x|=1, \\ e^{-1}=\dfrac{1}{e}, & |x|>1. \end{cases}$$

函数 $g[f(x)]$ 的图形如下图(b) 所示.



(a)　　(b)

17. 已知水渠的横断面为等腰梯形,斜角 $\varphi=40^\circ$(如图所示). 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时,求四周 $L(L=AB+BC+CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式,并指明其定义域.



【解】 由图可知 $h=AB\sin\varphi=DC\sin\varphi$,故

$$AB=DC=\frac{h}{\sin 40^\circ},$$

又从梯形的面积公式 $S_0=\dfrac{1}{2}h(BC+AD)$,得

$$\frac{1}{2}h(BC+(BC+2h\cot 40^\circ)]=S_0,$$

从而 $BC=\dfrac{S_0}{h}-h\cot 40^\circ$,

所以 $L=AB+BC+CD=\dfrac{2h}{\sin 40^\circ}+\dfrac{S_0}{h}-h\cot 40^\circ$,

即　$L=\dfrac{S_0}{h}+\dfrac{2-\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}h.$

自变量 h 的取值范围由不等式组

$$\begin{cases} h>0, \\ \dfrac{S_0}{h}-h\cot 40^\circ>0 \end{cases}$$

确定,故定义域为 $0<h<\sqrt{S_0\tan 40^\circ}$.

18. 收音机每台售价为 90 元,成本为 60 元,厂方为鼓励销售商大量采购,决定凡是订购量超过 100 台以上的,每多订购 1 台,售价就降低 1 分,但最低为每台 75 元.

(1) 将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数;

(2) 将厂方所获的利润 P 表示成订购量 x 的函数;

(3) 某一销售商订购了 1 000 台,厂方可获利润多少?

【解】 (1) 由所给条件,实际售价 p 的函数表达式为

$$p=\begin{cases} 90, & 0\leqslant x\leqslant 100, \\ 90-(x-100)\times 0.01, & 100<x<1\,600, \\ 75, & x\geqslant 1\,600. \end{cases}$$

(2) 厂方所获利润 P 的函数表达式为

$$P=(p-60)\cdot x=\begin{cases}30x, & 0\leqslant x\leqslant 100,\\ 31x-0.01x^2, & 100<x<1\,600,\\ 15x, & x\geqslant 1\,600.\end{cases}$$

(3) 所获利润 $P=31\times 1\,000-0.01\times 1\,000^2=21\,000$(元).

19. 求联系华氏温度(用 F 表示) 和摄氏温度(用 C 表示) 的转换公式,并求

(1) 90℉ 的等价摄氏温度和 -5 ℃ 的等价华氏温度;

(2) 是否存在一个温度值,使华氏温度计和摄氏温度计的读数是一样的?如果存在,那么该温度值是多少?

【解】 由物理学的知识知道,华氏温度和摄氏温度之间的关系是一个线性函数,于是,可设

$$F=kC+l,$$

其中 k,l 为常数,且 32℉ 相当于 0 ℃,212℉ 相当于 100 ℃,即 $32=l,212=100k+l$. 由此解得 $l=32,k=1.8$,故华氏温度与摄氏温度的转换公式为 $F=1.8C+32$.

(1) 当 $F=90$ 时,则 $90=1.8C+32$,解得 $C=32.2$;

当 $C=-5$ 时,则 $F=1.8\times(-5)+32=23$.

(2) 设 $F=C=t$,即 $t=1.8t+32$,

由此解得 $t=-40$,即华氏温度 -40 ℉ 时,摄氏温度也是 -40 ℃.

20. 利用以下联合国统计办公室提供的世界人口数据以及指数模型来推测 2010 年的世界人口.

年　份	人口数(百万)	当年人口数与上一年人口数的比值
1986	4 936	
1987	5 023	1.017 6
1988	5 111	1.017 5
1989	5 201	1.017 6
1990	5 329	1.024 6
1991	5 422	1.017 5

【解】 观察表的第 3 列,可以猜想 1986 年后的每一年,人口数约是上一年 1.018 倍,于是,1986 年后的第 n 年,世界人口数将是(单位:百万)

$$P(n)=4\,936\times 1.018^n,$$

而 2010 年相应于 $t=24$,则

$$P(24)=4\,936\times 1.018^{24}\approx 7\,573.9(\text{百万})$$

故 2010 年世界人口数估计为 7 573.9 百万.

习题 1－2

1. 下列各题中,哪些数列收敛?哪些数列发散?对收敛数列,通过观察数列 $\{x_n\}$ 的变化趋势,写出它们的极限:

(1) $x_n=\dfrac{1}{2^n}$;　　(2) $x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$;　　(3) $x_n=2+\dfrac{1}{n^2}$;

(4) $x_n=\dfrac{n-1}{n+1}$;　　(5) $x_n=n(-1)^n$;　　(6) $x_n=\dfrac{2^n-1}{3^n}$;

(7) $x_n=n-\dfrac{1}{n}$;　　(8) $x_n=[(-1)^n+1]\dfrac{n+1}{n}$.

答 (5)(7)(8) 发散,(1)(2)(3)(4)(6) 收敛,极限为:(1) 0;(2) 0;(3) 2;(4) 1;(6) 0.

2. 设数列 $\{x_n\}$ 的一般项 $x_n=\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}$,问 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=$?求出 N,使当 $n>N$ 时,x_n 与其极限之差的

绝对值小于正数 ε,当 $\varepsilon=0.001$ 时,求出数 N.

【解】 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=0$.

$|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\right|=\frac{1}{n}\left|\cos\frac{n\pi}{2}\right|\leqslant\frac{1}{n}$,于是 $\forall\varepsilon>0$,要使 $|x_n-0|<\varepsilon$,只要$\frac{1}{n}<\varepsilon$,即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$,取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$即可.

当 $\varepsilon=0.001$ 时,$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]=1\,000$,即若取 $\varepsilon=0.001$,只要 $n>1\,000$,就有 $|x_n-0|<0.001$.

3. 根据数列根限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}=1$.

【证】 (1) $\forall\varepsilon>0$,欲使$\left|\frac{1}{n^2}-0\right|=\frac{1}{n^2}<\varepsilon$,只需 $n^2>\frac{1}{\varepsilon}$,即 $n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. 于是 $\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$,只要 $n>N$,就有$\left|\frac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

(2) $\forall\varepsilon>0$,由

$$\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{6n+2-6n-3}{2(2n+1)}\right|=\left|\frac{-1}{2(2n+1)}\right|$$
$$=\frac{1}{2(2n+1)}<\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

可知只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,于是 $\forall\varepsilon>0$,只要 $n>N$,就有

$$\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon,\text{所以}\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}.$$

(3) $$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}\right|=\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}$$
$$=\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\frac{a^2}{n},$$

要使$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$,只要$\frac{a^2}{n}<\varepsilon$,即 $n>\frac{a^2}{\varepsilon}$,于是 $\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{a^2}{\varepsilon}\right]$,只要 $n>N$,就有$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

(4) $$|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}-1|=\left|1-\frac{1}{10^n}-1\right|=\frac{1}{10^n}<\frac{1}{n},$$

要使 $|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}-1|<\varepsilon$,只要$\frac{1}{n}<\varepsilon$,即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$,于是 $\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,就有 $|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}-1|<\varepsilon$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}=1$.

4. 若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$. 并举例说明:如果数列$\{|x_n|\}$有极限,但数列$\{x_n\}$未必有极限.

【证】 因为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$,所以 $\forall\varepsilon>0$,$\exists N$,当 $n>N$ 时,总有 $|u_n-a|<\varepsilon$,

故　$||u_n|-|a||\leqslant|u_n-a|<\varepsilon$.

于是 $\forall\varepsilon>0$,$\exists N>0$,当 $n>N$ 时,亦总有

$||u_n|-|a||<\varepsilon$,

所以$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$.

反例:取 $x_n=(-1)^n$,显然$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$,但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

5. 设数列$\{x_n\}$有界,又$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

【证】 因数列$\{x_n\}$有界,故 $\exists M>0$,对一切 n 均有 $|x_n|\leqslant M$.

$\forall\varepsilon>0$,由于$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,所以 $\exists N$,当 $n>N$ 时,总有 $|y_n-0|=|y_n|<\dfrac{\varepsilon}{M}$,

从而 $|x_ny_n-0|=|x_n|\cdot|y_n|<M\cdot\dfrac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

6. 对于数列$\{x_n\}$,若 $x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$,$x_{2k}\to a(k\to\infty)$,证明:$x_n\to a(n\to\infty)$.

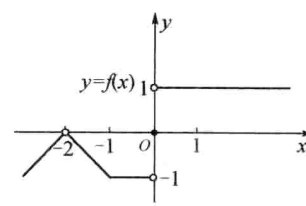
【证】 $\forall\varepsilon>0$,因为 $x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$,所以 $\exists k_1>0$,当 $2k-1>2k_1-1$ 时,有 $|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$;又因为 $x_{2k}\to a(k\to\infty)$,所以 $\exists k_2>0$,当 $2k>2k_2$ 时,有 $|x_{2k}-a|<\varepsilon$.

现取 $N=\max(2k_1-1,2k_2)$,当 $n>N$ 时,恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

习题 1-3

1. 对右图所示的函数 $f(x)$,求下列极限,如极限不存在,说明理由.



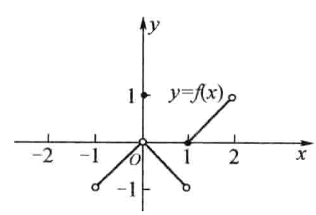
(1) $\lim\limits_{x\to-2}f(x)$; (2) $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$; (3) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=0$;

(2) $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-1$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在,因为 $f(0^-)=-1$,$f(0^+)=1$,$f(0^-)\neq f(0^+)$.

2. 对右图所示的函数 $f(x)$,下列陈述中哪些是对的,哪些是错的?



(1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在; (2) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$; (4) $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$;

(5) $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在;

(6) 对每个 $x_0\in(-1,1)$,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在.

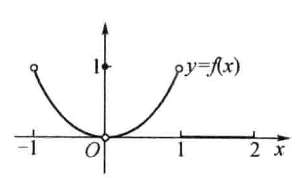
答 (1) 错;(2) 对;(3) 错. 事实上,$f(0^+)=f(0^-)=0$,因而$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.

(注意:$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 是否存在及存在时极限值等于多少,与 $f(0)$ 是否有定义及有定义时 $f(0)$ 等于多少都没有关系.)

(4) 错;(5) 对. 事实上,$f(1^-)=-1$,$f(1^+)=0$,两者不等,因而$\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在.

(6) 对.

3. 如右图所示的函数,下列陈述中哪些是对的,哪些是错的?



(1) $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=1$; (2) $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)$ 不存在;

(3) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$; (4) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$;

(5) $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1$; (6) $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=0$;

(7) $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=0$；　　　(8) $\lim\limits_{x\to2}f(x)=0$.

答　(1) 对. (2) 对,因为当 $x<-1$ 时,$f(x)$ 无定义. (3) 对,因 $f(0^+)=f(0^-)=0$. 注意:不要因为 $f(0)=1$ 而误认为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$. (4) 错. 注意:$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 的值与 $f(0)$ 的取值无关. (5)(6)(7) 对. (8) 错,因 $x>2$ 时 $f(x)$ 无定义,故 $f(2^+)$ 不存在.

4. 求 $f(x)=\dfrac{x}{x}$,$\varphi(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 当 $x\to0$ 时的左、右极限,并说明它们在 $x\to0$ 时的极限是否存在.

【解】　$f(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}1=1$,$f(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}1=1$,

因为 $f(0^-)=f(0^+)$,所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

$\varphi(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$,$\varphi(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x}=1$,

因为 $\varphi(0^-)\neq\varphi(0^+)$,所以 $\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)$ 不存在.

5. 根据函数极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to3}(3x-1)=8$；　　　(2) $\lim\limits_{x\to2}(5x+2)=12$；

(3) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$；　　　(4) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

【解】　(1) $\forall\varepsilon>0$,要使 $|(3x-1)-8|=3|x-3|<\varepsilon$,只需 $|x-3|<\dfrac{\varepsilon}{3}$,取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$,当 $0<|x-3|<\delta$ 时,就都有 $|(3x-1)-8|<\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{x\to3}(3x-1)=8$.

(2) $\forall\varepsilon>0$,要使 $|(5x+2)-12|=5|x-2|<\varepsilon$,只需 $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}$,取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$,当 $0<|x-2|<\delta$ 时,就都有 $|(5x+2)-12|<\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{x\to2}(5x+2)=12$.

(3) $\forall\varepsilon>0$,要使 $\left|\dfrac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|=|x+2|<\varepsilon$,只需取 $\delta=\varepsilon$,当 $0<|x-(-2)|<\delta$ 时,就都有 $\left|\dfrac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|<\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$.

(4) $\forall\varepsilon>0$,要使 $\left|\dfrac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|=|2x+1|=2\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$,只需 $\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$,取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$,当 $0<\left|x-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right|<\delta$ 时,就都有 $\left|\dfrac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|<\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

6. 根据函数极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$；　　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

【证】　(1) $\forall\varepsilon>0$,要使 $\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2|x|^3}<\varepsilon$,只需 $|x|>\dfrac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$,取 $X=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$,当 $|x|>X$ 时,就都有 $\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$.

(2) $\forall\varepsilon>0$,要使 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|=\dfrac{|\sin x|}{\sqrt{x}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$,只需 $x>\dfrac{1}{\varepsilon^2}$,取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$,当 $x>X$ 时,就都有 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

7. 当 $x\to2$ 时,$y=x^2\to4$. 问 δ 等于多少,使当 $|x-2|<\delta$ 时,$|y-4|<0.001$?

【解】　$|y-4|=|x^2-4|=|x+2|\cdot|x-2|$

当 $x\to 2$ 时，$|x-2|\to 0$. 不妨设 $|x-2|<1$，即 $1<x<3$，从而 $3<x+2<5$，则 $|y-4|=|x+2|\cdot|x-2|<5|x-2|$. $\forall\varepsilon>0$，要使 $|y-4|<\varepsilon$，只要 $5|x-2|<\varepsilon$.

即 $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}$.

于是 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\{1,\dfrac{\varepsilon}{5}\}$. 当 $0<|x-2|<\delta$ 时，$|y-4|<\varepsilon$. 取 $\varepsilon=0.001$，则 $\delta=0.000\,2$(即 $\delta=0.000\,2$ 时. 当 $|x-2|<\delta$ 时，$|y-4|<0.001$) 满足题意.

8. 当 $x\to\infty$ 时，$y=\dfrac{x^2-1}{x^2+3}\to 1$. 问 X 等于多少，使当 $|x|>X$ 时，$|y-1|<0.01$?

【解】 要使 $|y-1|=\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+3}-1\right|=\dfrac{4}{x^2+3}<0.01$，只需 $|x|>\sqrt{\dfrac{4}{0.01}-3}=\sqrt{397}$，取 $X=\sqrt{397}$，当 $|x|>X$ 时，就有 $|y-1|<0.01$.

9. 证明函数 $f(x)=|x|$ 当 $x\to 0$ 时极限为零.

【证】 $\forall\varepsilon>0$，要使 $||x|-0|=|x|<\varepsilon$，只需取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-0|<\delta$ 时，就有 $||x|-0|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$.

10. 证明：若 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限都存在且都等于 A，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

【证】 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X_1>0$，当 $x>X_1$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$；又 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，对于上述 $\varepsilon>0$，$\exists X_2>0$，当 $x<-X_2$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

取 $X=\max\{X_1,X_2\}$，则当 $|x|>X$ 时，有 $x>X$ 或 $x<-X$，因而有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

11. 根据极限定义证明：函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

【证】 充分性：设 $f(x_0^-)=A=f(x_0^+)$，于是对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$ 及 $\delta_2>0$，当 $-\delta_1<x-x_0<0$ 或 $0<x-x_0<\delta_2$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $-\delta<x-x_0<0$ 或 $0<x-x_0<\delta$ 时，上式也成立. 这表示 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

必要性：设 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=A$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$. 取 $\delta_1=\delta_2=\delta$，则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$ 及 $\delta_2>0$，当 $-\delta_1<x-x_0<0$ 及 $0<x-x_0<\delta_2$ 时，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，因此 $f(x_0^-)=f(x_0^+)=A$.

12. 试给出 $x\to\infty$ 时函数极限的局部有界性的定理，并加以证明.

【解】 $x\to\infty$ 时函数极限的局部有界性定理为：如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，那么存在常数 $M>0$ 和 $N>0$，使得当 $|x|>N$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

定理证明：取 $\varepsilon=1$，因为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，则 $\exists N>0$，当 $|x|>N$ 时，有 $|f(x)-A|<1$，则 $|f(x)|\leqslant|f(x)-A|+|A|<|A|+1$，记 $M=|A|+1$，则有 $|f(x)|\leqslant M$，定理得证.

习题 1－4

1. 两个无穷小的商是否一定是无穷小？举例说明之.

答 两个无穷小的商不一定是无穷小. 例如当 $x\to 0$ 时，$x^2,3x^2,x^3$ 都是无穷小，但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{x^2}{3x^2}$ 不是无穷小；$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^3}$ 也不是无穷小.

2. 根据定义证明：

(1) $y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ 为当 $x\to 3$ 时的无穷小；