21世纪独立学院应用型创新人才培养系列规划教材

主 编 李冬娜

副主编 张 霞 窦祖芳 张希娜 曹 斌

（上）

高等数学同步指要（上）

（第二版）

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

21 世纪独立学院应用型创新人才培养系列规划教材

高等数学同步指要(上)

(第二版)

主　审　张民悦

主　编　李冬娜

副主编　张　霞　窦祖芳　张希娜　曹　斌

同济大学出版社

TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是《高等数学》教材的同步辅导书. 高等数学的概念、公式、定理较抽象难懂，解题方法也多样化，难以掌握，针对这个现状，我们编写了本书.

全书分上、下两册，共 13 章，以小节为单位编写. 每章开篇有“本章知识体系”，包括三个板块：知识要点，重点、难点解析及典型例题和练习题.“本章知识体系”部分概述了每章的主要内容；“知识要点”部分归纳总结了每小节的主要内容，包括基本概念、性质、定理、公式及基本解题方法等；“重点、难点解析及典型例题”部分对那些重点、难点及易混淆的知识点进行了详细诠释，并精选典型例题进行分析讲解；“练习题”部分分为 A，B 两级，习题 A 主要用于培养学生对基础知识的掌握能力，习题 B 用于巩固提高. 另外，每章配有“本章自测题”，可用于学生进行自我测试.

本书可作为理工科院校“高等数学”课程的参考书和学习指导书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步指要：全 2 册/李冬娜主编. --2 版. --上海：同济大学出版社，2013. 8

ISBN 978-7-5608-5221-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 157475 号

---

21 世纪独立学院应用型创新人才培养系列规划教材

高等数学同步指要(上、下)(第二版)

主　　编　李冬娜

副 主 编　张　霞　窦祖芳　张希娜　曹　斌

责任编辑　姚烨铭　**策划编辑**　张崇豪　**责任校对**　徐春莲　**封面设计**　陈益平

出版发行　同济大学出版社 www. tongjipress. com. cn

（上海市四平路 1239 号　邮编 200092　电话 021 - 65985622）

经　　销　全国各地新华书店

印　　刷　同济大学印刷厂

开　　本　787 mm×1 092 mm　1/16

印　　张　21. 5

印　　数　1—4 100

字　　数　536 000

版　　次　2013 年 8 月第 2 版　　2013 年 8 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 978-7-5608-5221-8

定　　价　46. 00 元(全 2 册)

前　　言

本书是在高等教育大众化的背景下，为适应教学改革需要，而为工科专业编写的应用型创新人才培养系列规划教材之一，作为公共课程辅导教材，供各高校选用。

本书是与《高等数学》教学同步的辅导书，按照国家最新制定的工科本科高等数学教学基本要求，着重对高等数学的基本知识进行了叙述，阐述和解释了重点、难点及易混淆的知识点，分析各种题型的解题方法及技巧，从而培养学生的学习和解题能力，是在校大学生练习和自学该课程的指导书。本书具有以下特色：

（1）对学习中易混淆和被忽略的问题进行清楚明了的解释说明。

（2）注重解题思路及技巧的培养，例题部分精选各类典型例题，对各种题型的解题思路及技巧作了重点分析，还对每一类型题目进行总结、归纳和评注。

（3）不少例题采用了多种解法，这样有利于举一反三，扩大知识面，以便全面地掌握所学知识。

（4）加强课后练习，精选了教材中的例题、习题，时效性强，并且分 A、B 两级，兼顾不同水平的读者需要。

本书经过几年的教学实践，在第二次改版中得到了很好的完善，删减了部分偏难和知识点重复的习题，增加了一些典型例题和难度适中的习题，从而更加适合于学生练习之用。

本书由李冬娜任主编，章节具体编写安排是：李冬娜编写第五、八、十、十二章；张霞编写第二、七章；窦祖芳编写第一、九、十三章；张希娜编写第四、六章；曹斌编写第三、十一章。

本书的编写得到了兰州理工大学技术工程学院的大力支持与帮助，在此表示衷心的感谢。由于编者的水平有限，书中难免有疏漏和错误，敬请读者及同行批评指正。

编　者

2013 年 6 月

目　录

第1章　函　数

本章知识体系

- 函数
  - 基础 → 集合 → 数集 → 区间 → 邻域
  - 概念 → 映射 → 反函数 → 复合函数 → 三要素
    - 对应关系
    - 定义域 → 数集
    - 值域 → 数集
  - 性质
    - 奇偶性
    - 单调性
    - 有界性
    - 周期性
  - 分类
    - 初等函数
    - 非初等函数

一、知识要点

1. 邻域的定义

设点 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，称集合 $E=\left\{x\,\middle|\,|x-a|<\delta\right\}$ 为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$. 称集合 $E=\left\{x\,\middle|\,0<|x-a|<\delta\right\}$ 为点 a 的 δ 去心邻域，记作 $\dot{U}(a,\delta)$.

此处邻域是个开区间，区间是个实数集，在后面的极限等概念中有很大的作用.

2. 函数的定义

设 x,y 是两个变量，x 的取值范围是非空数集 D，f 是某个对应法则. 如果对每一个 $x\in D$，按照此法则，f 都能确定唯一的一个 y 值与之对应，则称此对应法则 f 为定义于 D 上的函数，或称变量 y 是变量 x 的函数，记作

$$y=f(x),\quad x\in D.$$

其中，x 称为自变量，y 称为因变量或函数，D 叫做函数的定义域，常记作 D_f. D_f 中每个数 x 在 f 下的像 $f(x)$（即对应的 y 值），也称为函数在点 x 处的函数值，全体函数值的集合称为函数的值域，记为 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D_f\}.$$

平面点集 $\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D_f\}$ 称为函数 $f(x)$ 的图像. 确定函数的要素：定义域和对应法则.

3. 函数的几种特性

(1) 设 $y=f(x)$ 是一给定的函数. 如果对所有的 $x\in D_f$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 是偶函数;其图形对称于 y 轴. 如果对所有的 $x\in D_f$,都有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 是奇函数;其图形关于原点对称.

(2) 设 $f(x)$ 是一给定的函数,区间 $I\subset D_f$,对区间 I 上任意两点 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$,如果恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\qquad (f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加(单调减少). 单调增加或单调减少的函数统称为单调函数. 区间 I 上的增(减) 函数的图形是沿 x 轴正向上升(下降) 的.

(3) 设 $f(x)$ 是一给定函数,区间 $I\subset D_f$,如果存在正常数 M,使对区间 I 上任一点 x,恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上有界;如果这样的 M 不存在,则称 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

(4) 对函数 $f(x)$,如果存在正常数 T,使对 D_f 内任意一点 x,都有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数,正常数 T 称为周期,把满足上式的最小正常数 T 称为函数的最小正周期或基本周期,简称周期. 通常所说的周期一般指最小正周期.

4. 反函数

设 $y=f(x)$ 是一给定函数,如果对每个 $y\in R_f$,都有唯一的一个满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D_f$ 与之对应,则 x 也是 y 的函数,称此函数为原函数 $y=f(x)$ 的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$,而把 $y=f(x)$ 称为直接函数,或说它们互为反函数. 为与习惯一致,常将反函数改写为 $y=f^{-1}(x)$.

$y=f(x)$ 存在反函数的充分必要条件是: $y=f(x)$ 为一一映射. 严格单调是存在反函数的充分条件;$D_{f^{-1}}=R_f$;$R_{f^{-1}}=D_f$;$f^{-1}[f(x)]=x$;$f[f^{-1}(x)]=x$;$y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称. 而 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 的图像则是同一条曲线.

5. 复合函数

设 y 是 u 的函数: $y=f(u)$,而 u 是 x 的函数: $u=\varphi(x)$. 如果 $D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$,则 $y=f[\varphi(x)]$ 是定义于数集 $\{x\mid u=\varphi(x)\in D_f,x\in D_\varphi\}$ 上的函数,称此函数为由 $y=f(u)$ 与函数 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数,x 仍为自变量,y 仍为因变量,而 u 称为中间变量.

6. 初等函数

基本初等函数:

常数函数　　$y=c$　(c 为实常数);

幂函数　　$y=x^\alpha$　(α 为实常数);

指数函数　　$y=a^x$　($0<a\neq 1$);

对数函数　　$y=\log_a x$　($0<a\neq 1$);

三角函数　　$y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x$;

反三角函数　　$y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\operatorname{arccot} x$.

初等函数是由六种基本初等函数经过有限次的四则运算以及有限次的复合运算所得到的，由一个式子表示的函数称为初等函数.

二、重点、难点解析及典型例题

1. 函数的概念、定义域是本章的重点，必须理解函数的概念，掌握求函数的定义域的方法.

2. 理解函数的奇偶性、单调性、有界性和周期性.

3. 理解反函数和复合函数的概念，会求反函数，会正确分析复合函数的复合过程.

4. 熟悉基本初等函数及其图形，理解初等函数的概念(最好自己总结一下，熟记于心).

5. 了解常见的几种非初等函数.

例 1.1　求下列函数的定义域.

分析　函数的定义域就是使函数的解析表达式有意义的自变量 x 的集合或有特殊规定的自变量 x 的取值范围. 往往归结为不等式组的解集合.

(1) $y=\dfrac{1}{\lg(1-x)}$.

解：$\begin{cases}1-x>0,\\1-x\neq 1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<1,\\x\neq 0.\end{cases}\quad D_f=(-\infty,0)\cup(0,1).$

(2) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{x^2-25}$.

解：$\begin{cases}\sin x\geqslant 0,\\x^2-25\geqslant 0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2k\pi\leqslant x<(2k\pi+1)\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots),\\x\leqslant -5 \text{ 或 } x\geqslant 5.\end{cases}$

$\Rightarrow -2\pi\leqslant x\leqslant -5$ 或 $2k\pi\leqslant x<(2k\pi+1)\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,

$D_f=[-2\pi,-5]\cup(\bigcup\limits_{\substack{k\in\mathbf{Z}\\k\neq-1,0}}[2k\pi,(2k+1)\pi])$.

(3) $y=\log_2\log_{\frac{1}{2}}\lg x$.

解：$\begin{cases}x>0,\\\lg x>0,\\\log_{\frac{1}{2}}\lg x>0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0,\\x>1,\\0<\lg x<1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0,\\x>1,\\1<x<10.\end{cases}\Rightarrow 1<x<10, D_f=(1,10).$

例 1.2　已知 $y=f(2^x)$ 的定义域为$[-1,1]$，求函数 $y=f(\log_2 x)+f(x-1)$ 的定义域.

分析　先由 $f(2^x)$ 的定义域求出 $f(x)$ 的定义域，再求所给函数的定义域.

解：因 $-1\leqslant x\leqslant 1$，所以，$\dfrac{1}{2}\leqslant 2^x\leqslant 2$，即 $f(x)$ 的定义域为$[\dfrac{1}{2},2]$；

再由$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\leqslant\log_2 x\leqslant 2,\\\dfrac{1}{2}\leqslant x-1\leqslant 2,\end{cases}$解得$\begin{cases}\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 4,\\\dfrac{3}{2}\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$

所求定义域为$[\dfrac{3}{2},3]$.

例 1.3　判断函数的奇偶性.

分析　关键是要理解对定义域中的所有 x，都有 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的某种恒等关系.

(1) $y=\begin{cases}x(1+x), & x<0;\\ x(1-x), & x\geqslant 0.\end{cases}$

解: $f(x)=\begin{cases}x(1+x), & x<0;\\ x(1-x), & x\geqslant 0.\end{cases}$

$$f(-x)=\begin{cases}-x(1-x), & -x<0;\\ -x(1+x), & -x\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}-x(1+x), & x\leqslant 0;\\ -x(1-x), & x>0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-x(1+x), & x<0;\\ -x(1-x), & x\geqslant 0\end{cases}=-f(x),$$

所以,$f(x)$ 是奇函数.

(2) $F(x)=f(x)\left(\dfrac{1}{2^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$,其中,$f(x)$ 为 R 上的奇函数.

解: $F(-x)=f(-x)\left(\dfrac{1}{2^{-x}+1}-\dfrac{1}{2}\right)=-f(x)\left(\dfrac{2^x}{2^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$

$$=-f(x)\left(1-\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}\right)=f(x)\left(\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}\right)=F(x).$$

所以,$F(x)$ 是偶函数.

例 1.4 判断函数的有界性.

分析 关键是要理解对定义域中的所有 x 都要满足的某种关系.

(1) 证明 $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ 是有界函数.

证明: $\forall x\in\mathbf{R}$,有 $|y|=\dfrac{|x|}{1+x^2}$. 因 $1+x^2\geqslant 2|x|\geqslant|x|$,

所以,$|y|=\dfrac{|x|}{1+x^2}\leqslant 1$. 故 $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ 是有界函数.

(2) 证明 $y=\dfrac{x+\sin x}{x}$ 是有界函数.

证明: 此函数的定义域为 $x\neq 0$,即 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

因为 $|y|=\left|\dfrac{x+\sin x}{x}\right|=\left|1+\dfrac{\sin x}{x}\right|\leqslant 1+\dfrac{|\sin x|}{|x|}$.

又 $\forall x\in\mathbf{R}$,有 $|\sin x|\leqslant|x|$. 当 $x\neq 0$ 时,$\dfrac{|\sin x|}{|x|}\leqslant 1$,

所以,$\forall x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 有 $|y|\leqslant 1+\dfrac{|\sin x|}{|x|}\leqslant 2$.

故 $y=\dfrac{x+\sin x}{x}$ 是有界函数.

例 1.5 求函数的反函数.

分析 首先要判断原函数的定义域,其次必须求原函数的值域.

(1) $y=2\arcsin\dfrac{4x+1}{3}-5$.

解: $D_f=\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]$, $R_f=[-\pi-5,\pi-5]$.

$$\arcsin\frac{4x+1}{3}=\frac{y+5}{2},\quad \frac{4x+1}{3}=\sin\frac{y+5}{2},$$

$$x=\frac{3}{4}\sin\frac{y+5}{2}-\frac{1}{4},$$

$$y=\frac{3}{4}\sin\frac{x+5}{2}-\frac{1}{4},\quad x\in[-\pi-5,\pi-5].$$

(2) $y=\cos x, x\in[-\pi,0]$.

解法一: $D_f=[-\pi,0], R_f=[-1,1]$.

因为 $-\pi\leqslant x\leqslant 0$,所以 $0\leqslant x+\pi\leqslant\pi$,

$y=\cos x=-\cos(x+\pi), x+\pi=\arccos(-y)$,

$x=-\pi+\arccos(-y)=-\pi+\pi-\arccos y=-\arccos y$,

即　$y=-\arccos x, x\in[-1,1]$.

解法二: 因为 $-\pi\leqslant x\leqslant 0$,所以,$0\leqslant -x\leqslant\pi$.

$y=\cos x=\cos(-x), -x=\arccos y$.

即　$y=-\arccos x, x\in[-1,1]$.

(3) $y=\begin{cases}-x^2-1, & -2<x<0;\\ \sqrt{1-x^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 2^{x-1}, & x>1.\end{cases}$

解: 当 $-2<x<0$ 时,$y=-x^2-1\in(-5,-1), x=-\sqrt{-y-1}$,

即　$y=-\sqrt{-x-1}, x\in(-5,-1)$.

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$y=\sqrt{1-x^2}\in[0,1], x=\sqrt{1-y^2}$,

即　$y=\sqrt{1-x^2}, x\in[0,1]$.

当 $x>1$ 时,$y=2^{x-1}\in(1,+\infty), x=\log_2(y+1)$,

即　$y=\log_2(x+1), x\in(1,+\infty)$.

所以,反函数为　$y=\begin{cases}-\sqrt{-x-1}, & -5<x<-1;\\ \sqrt{1-x^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ \log_2(x+1), & x>1.\end{cases}$

例 1.6　某产品的单价为 400 元 / 台,当年产量为 1 000 台时,可以全部售出,当年产量超过 1 000 台时,经广告宣传,可以再多售出 200 台,每台平均广告费 40 元,生产再多时,本年就售不出去.试将本年的销售总收入 R 表示为年产量 x 的函数.

分析　函数的定义域就是使函数的解析表达式有意义的自变量 x 的集合或有特殊规定的自变量 x 的取值范围.往往归结为不等式组的解集合.

解: 当 $0\leqslant x\leqslant 1\,000$(台)时,可全部售出,此时总收入为:$R(x)=400x$(元);

当 $1\,000<x\leqslant 1\,200$(台)时,前 1 000 台按 400 元 / 台售出,后 $x-1\,000$ 台按 360 元 / 台售出,此时总收入为:$R(x)=1\,000\times400+(x-1\,000)\times360=360x+40\,000$(元);

当 $x>1\,200$(台)时,前 1 000 台按 400 元 / 台售出,后 200 台按 360 元 / 台售出,再多余的 $x-1\,200$ 台没有收入,此时总收入为:$R(x)=1\,000\times400+200\times360=472\,000$(元).

综上所述,收入函数为

$$y=\begin{cases}400x, & 0\leqslant x\leqslant 1\,000;\\ 40\,000+360x, & 1\,000<x\leqslant 1\,200;\\ 427\,000, & x>1\,200.\end{cases}$$

例 1.7 设 $f(x)=\begin{cases}2x, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2, & 1<x\leqslant 4,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}4x, & x\leqslant 2,\\ x-2, & x>2.\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$.

分析 求 $f[g(x)]$ 的方法是:在内函数 $g(x)$ 的每一段上,讨论使 $g(x)$ 的值落在外函数 $f(x)$ 的定义域各个段内的自变量 x 的取值范围.在每个取值范围内,将 $g(x)$ 代入 $f(x)$ 的相应表达式,若某个范围是空集,则在该范围内 $f[g(x)]$ 无意义.

解:(1) 当 $x\leqslant 2$ 时,使 $g(x)=4x$ 的值落在外函数 $f(x)$ 的定义域的两段 $[-1,1]$ 和 $(1,4]$ 内的自变量 x 的取值范围分别为:$\begin{cases}x\leqslant 2,\\ -1\leqslant 4x\leqslant 1\end{cases}$ 的解集;$-\dfrac{1}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{4}$ 和 $\begin{cases}x\leqslant 2,\\ 1<4x\leqslant 4\end{cases}$ 的解集;$\dfrac{1}{4}<x\leqslant 1$.

当 $x>2$ 时,使 $g(x)=x-2$ 的值落在 $[-1,1]$ 和 $(1,4]$ 内的自变量 x 的取值范围分别为:不等式组 $\begin{cases}x>2,\\ -1\leqslant x-2\leqslant 1\end{cases}$ 的解集;$2<x\leqslant 3$ 及不等式组 $\begin{cases}x>2,\\ 1<x-2\leqslant 4\end{cases}$ 的解集;$3<x\leqslant 6$.

所以,$f[g(x)]=\begin{cases}2\cdot(4x), & -\dfrac{1}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{4};\\ (4x)^2, & \dfrac{1}{4}<x\leqslant 1;\\ 2\cdot(x-2), & 2<x\leqslant 3;\\ (x-2)^2, & 3<x\leqslant 6\end{cases}=\begin{cases}8x, & -\dfrac{1}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{4};\\ 16x^2, & \dfrac{1}{4}<x\leqslant 1;\\ 2x-4, & 2<x\leqslant 3;\\ (x-2)^2, & 3<x\leqslant 6.\end{cases}$

(2) 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时,使 $f(x)=2x$ 的值落在外函数 $g(x)$ 的定义域内的两段 $(-\infty,2]$ 及 $(2,+\infty)$ 内的自变量 x 的取值范围分别为:不等式组 $\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x\leqslant 2\end{cases}$ 的解集;$-1\leqslant x\leqslant 1$ 及不等式组 $\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x>2\end{cases}$ 的解集;空集 $\varnothing$.

当 $1<x\leqslant 4$ 时,使 $f(x)=x^2$ 的值落在外函数 $g(x)$ 的定义域内的两段 $(-\infty,2]$ 及 $(2,+\infty)$ 内的自变量 x 的取值范围分别为:不等式组 $\begin{cases}1<x\leqslant 4,\\ x^2\leqslant 2\end{cases}$ 的解集;$1<x\leqslant\sqrt{2}$ 及不等式组 $\begin{cases}1<x\leqslant 4,\\ x^2>2\end{cases}$ 的解集;$\sqrt{2}<x\leqslant 4$.

综上所述,可得 $g[f(x)]=\begin{cases}8x, & -1\leqslant x\leqslant 1;\\ 4x^2, & 1<x\leqslant\sqrt{2};\\ x^2-2, & \sqrt{2}<x\leqslant 4.\end{cases}$

三、练习题

习题 1(A)

1. 求函数 $y=\dfrac{\arcsin\dfrac{x-3}{4}}{x\lg|x-2|}$ 的定义域.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1;\\ x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases}x+2, & x<0;\\ x^2-1, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}0, x\leqslant 0,\\ x, x>0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0,\\ -x^2 & x>0,\end{cases}$ 则 $f(x)=$ ________.

4. 求函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & -1\leqslant x<0;\\ x^2-1, & 0<x<1\end{cases}$ 的反函数.

5. 设函数 $f(x)$, $x\in(-\infty,+\infty)$ 的图形关于 $x=a$, $x=b(a<b)$ 均对称. 求证 $f(x)$ 是周期函数,并求其周期.

习题 1(B)

1. 求函数 $f(x)=\sqrt{2-|x|}+\dfrac{1}{\lg\cos x}$ 的定义域.

2. 设 $f(x)$ 的定义域为$[0,1]$,试求 $f\left(x+\dfrac{1}{3}\right)+f\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$的定义域.

3. 设函数 $f(x)$ 满足方程 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=x\quad(|a|\neq|b|)$,求 $f(x)$.

4. 证明:定义在对称区间$(-l,l)$内任何函数 $f(x)$ 必可表示为一个偶函数和一个奇函数之和.

5. 设 $f(x)$ 为奇函数,且对任何 $x\in\mathbf{R}$,有 $f(x+2)=f(x)+f(2)$,已知 $f(1)=a$,

(1) 求 $f(2)$ 与 $f(5)$;

(2) 当 a 取何值时,$f(x)$ 以 2 为周期.

本章自测题

一、填空题

1. $y=\left(\ln\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}$ 的定义域________.

2. 设函数 $f(x)$ 的定义域是$[0,1]$,则 $f(\sqrt{1-x^2})$ 的定义域是________.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 2, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 则 $f(2x)$ 的定义域是________.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0;\\ 2-x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $f[f(-1)]=$________.

5. 设 $\varphi(x+1)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 2x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 则 $\varphi(x)=$________.

6. 若 $f(x+1)=x^2-3x+2$,则 $f(\sqrt{x})=$________.

7. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & \frac{1}{\mathrm{e}}<x<1;\\ x, & 1\leqslant x<\mathrm{e},\end{cases}$ $g(x)=\mathrm{e}^x$,则 $f[g(x)]=$________.

8. 若 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$,且 $y=1$ 时,$z=x$,则 $f(x)=$________.

9. 设 $f[g(x)]=\frac{1-x}{x}$,$f(x)=x$,则 $g(x)=$________.

二、单项选择题

1. 偶函数的定义域一定是(　　).

   (A) 包含原点　　(B) $(-\infty,+\infty)$

   (C) 关于原点对称　　(D) 以上三种说法都不一定对

2. $y=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$ 的图形对称于直线(　　).

   (A) $y=x$　　(B) $y=-x$　　(C) $x=0$　　(D) $y=0$

3. 下列函数中,(　　)是奇函数.

   (A) $\ln(x^2+1)$　　(B) $\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$

   (C) $x\sin x$　　(D) $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$

4. 若 $f(x)$ 为奇函数,$\varphi(x)$ 为偶函数,且 $f[\varphi(x)]$ 有意义,则 $f[\varphi(x)]$ 是(　　).

   (A) 偶函数　　(B) 奇函数

   (C) 非奇非偶函数　　(D) 可能是奇函数,也可能是偶函数

5. 设 $f(x)$ 为奇函数,且对任意实数 x,恒有 $f(x+2)-f(x)=0$,则必有 $f(1)=$(　　).

   (A) -1　　(B) 0　　(C) 1　　(D) 2

6. 函数 $y=\lg(x+1)$ 在区间(　　)内有界.

   (A) $(-1,0)$　　(B) $(0,+\infty)$

   (C) $(-1,M)$　　(D) $(0,M)$,$M>0$

7. 下列函数中,在指定区间上有界的是(　　).

(A) $y = x\sin x$, $(0, +\infty)$　　(B) $y = 1 + \ln x$, $(0,1)$

(C) $y = \dfrac{x^2}{1-x}$, $(-\infty, 0)$　　(D) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $(0, +\infty)$

8. 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加, $\varphi(x)$ 单调减少,则 $f[\varphi(x)]$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内(　　).

(A) 单调增加　　(B) 单调减少

(C) 不是单调函数　　(D) 增加性难以判定

9. 函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 的任何去心邻域内(　　).

(A) 有界　　(B) 无界　　(C) 单调增加　　(D) 单调减少