21世纪高等院校创新教材

GAODENG SHUXUE XITIJI

高等数学习题集

（下册）

苗加庆◎主编

中国人民大学出版社

21世纪高等院校创新教材

GAODENG SHUXUE XITIJI

高等数学习题集

（下册）

苗加庆◎主编

中国人民大学出版社

· 北京 ·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学习题集. 下册/苗加庆主编. —北京：中国人民大学出版社，2013.9
21 世纪高等院校创新教材
ISBN 978-7-300-18079-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①苗… Ⅲ.①高等数学-高等学校-习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 215484 号

21 世纪高等院校创新教材
高等数学习题集（下册）
苗加庆　主编
Gaodeng Shuxue Xitiji

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京民族印务有限责任公司		
规　　格	185 mm×260 mm　16 开本	**版　　次**	2013 年 9 月第 1 版
印　　张	12.25 插页 1	**印　　次**	2013 年 9 月第 1 次印刷
字　　数	282 000	**定　　价**	30.00 元

前　言

本书是根据三本院校学生学习高等数学的实际情况编写的一本学习指导书。高等数学是众多专业课程的基础，其工具性尽人皆知，编写此书的目的是希望学生能更好地掌握高等数学的知识，同时理解高等数学思想的精髓，为后续专业课打下良好的基础。

全书分为上下两册，共十二章，其中上册七章，下册五章。每章包括以下几个方面的内容：

1. 学习要求与内容提要：结合教学大纲及编者多年的教学经验，列出了本章的学习要求。学习要求按考试要求分为了解、理解、掌握和熟练掌握四个层次，以便学生了解各知识点的掌握程度；同时对本章的主要内容按照基本概念、重要结论、方法与技巧等方面进行归纳总结，便于学生查找复习。

2. 疑难解答：根据编者多年经验，对容易混淆、难以掌握的知识点进行解答，突出重点、难点，深化理解，拓宽知识面。

3. 典型例题分析：总结本节的典型例题，并给出详细的分析和解答，供教师教学和学生课后复习时参考。

4. 每节选编习题：是教材习题的一个补充，习题量可以满足学习高等数学所必需的练习要求。

5. 模拟试题：在本书最后编者提供了几套各个层次的模拟试题，以供学生期末复习使用。

该习题集在编写的时候已经考虑到了三本院校各个层次学生学习的需要，学生在使用本书的时候可以根据本专业的要求学习相应部分的内容，建议教师在教学的时候为学生明确指出。

本书由余世成、苗加庆统稿，参与编写的有：余世成、徐广顺、马志民、韩红伟、张玉琴、宋丽丽、田琳、杨卓东、李密、马致远、苗加庆、冯向东、熊良鹏、黄长春、赵艳丽、张建亮、张红霞、王志龙、秦雨萍、李明鉴、郭仲三、罗绍锡、杨世坤、詹小平、太文龙。

本书在编写过程中，获得了成都理工大学工程技术学院基础部杨志军部长的大力支持和帮助，也获得了教务处相关部门领导、老师的支持，在这里表示感谢。

由于编者水平有限，对书中的不妥之处，敬请广大读者批评指正。

编者

2013 年 6 月

目　录

第八章　空间解析几何和向量代数 …… 1
§8.1　向量及线性运算 …… 9
§8.2　数量积　向量积 …… 11
§8.3　曲面及其方程 …… 16
§8.4　空间曲线及其方程 …… 17
§8.5　平面及其方程 …… 20
§8.6　空间直线及其方程 …… 23
第九章　多元函数微分学及其应用 …… 31
§9.1　函数 …… 40
§9.2　偏导数 …… 43
§9.3　全微分 …… 46
§9.4　多元复合函数的求导法则 …… 48
§9.5　隐函数的求导公式 …… 52
§9.6　多元函数微分学的几何应用 …… 55
§9.7　方向导数与梯度 …… 58
§9.8　多元函数的极值及其求法 …… 60
第十章　重积分 …… 64
§10.1　二重积分的概念与性质 …… 68
§10.2　二重积分的计算法 …… 73
§10.3　三重积分 …… 79
§10.4　重积分的应用 …… 85
第十一章　曲线积分与曲面积分 …… 88
§11.1　对弧长的曲线积分 …… 97
§11.2　对坐标的曲线积分 …… 99
§11.3　格林公式及其应用 …… 102
§11.4　对面积的曲面积分 …… 106
§11.5　对坐标的曲面积分 …… 109
§11.6　高斯公式 …… 111
§11.7　斯托克斯公式 …… 116

第十二章 级数 …… 118
§12.1 常数项级数的概念和性质 …… 123
§12.2 常数项级数的审敛法 …… 127
§12.3 幂级数 …… 131
§12.4 函数展开成幂级数 …… 135
§12.5 傅里叶级数(包括一般周期) …… 138
模拟试题 …… 143
参考答案 …… 152

第八章

空间解析几何和向量代数

空间解析几何主要是用代数的方法研究几何问题，讨论各种空间图形几何关系的代数表示、计算和判别等问题，通过这一章的学习，培养空间想象力、娴熟的向量代数的计算能力和推理、演绎的逻辑思维能力，也为学习多元函数微分学提供直观的几何背景.

学习要求与内容提要

学习要求

教学目的：

1. 理解向量的概念，了解向量的模、向量的方向余弦的概念，掌握空间两点间的距离公式.

2. 掌握向量的运算（线性运算、数量积、向量积），掌握两向量垂直、平行的充要条件，了解两向量夹角的求法.

3. 理解单位向量、方向角与方向余弦、向量的坐标表达式，熟练掌握用坐标表达式进行向量运算的方法.

4. 理解曲面方程的概念，了解常用的二次曲面（球面、圆柱面、圆锥面、抛物面）的方程及其图形，掌握以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程.

5. 熟练掌握平面的点法式、一般式、截距式方程.

6. 熟练掌握空间直线的对称式（点向式）、参数式方程.

7. 熟练掌握两个向量的位置关系，两个平面的位置关系，两条直线的位置关系，直线与平面的位置关系；掌握点到直线的距离公式.

8. 了解空间曲线的参数方程和一般方程.

9. 了解空间曲线在各个坐标平面上的投影，并会求其方程.

重点：

1. 向量的线性运算，数量积、向量积的概念，向量运算及坐标运算.
2. 两个向量垂直和平行的条件.
3. 平面方程和直线方程.
4. 平面与平面、直线与直线、直线与平面之间的相互位置关系的判定条件.
5. 点到直线以及点到平面的距离.

6. 常用的二次曲面的方程及其图形.

难点：

1. 向量积的向量运算及坐标运算.
2. 平面方程和空间直线方程及其求法.
3. 二次曲面的图形.
4. 旋转曲面的方程.

内容提要

1. 空间直角坐标系的建立.

(1)空间直角坐标系.

在空间中取一点 O 和三条两两相互垂直的数轴 Ox，Oy，Oz，它们具有相同的长度单位，不在同一个平面上，其正向符合右手规则，由此构成空间直角坐标系. 三条数轴分别叫做横轴 x 轴，纵轴 y 轴，竖轴 z 轴，统称为空间直角坐标系的坐标轴；三条坐标轴两两确定一个平面，共有 xOy，yOz，zOx 三个平面，称为空间直角坐标系的三个坐标面；三个坐标面将空间分为八个部分，每个部分叫做卦限，O 点称为空间直角坐标系的原点(见图 8—1).

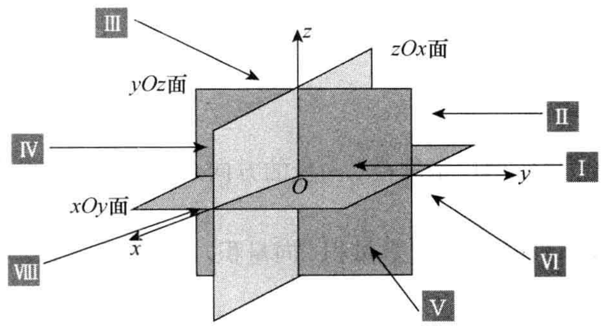

图 8—1

注:卦限Ⅶ位于Ⅲ的正下方。

(2)空间基本元素的表示.

①点的表示. 空间直角坐标系中任一点 P 可与一个有序实数组 (a, b, c) 建立一一对应关系，从而空间任一点 P 可表示为 (a, b, c) 或 (x, y, z)，称为 P 点的坐标表示. 特别地，原点 O 的坐标为 $(0, 0, 0)$.

② 面的表示. 设有方程 $F(x, y, z)=0$，曲面 Σ；若一方面曲面 Σ 上所有的点的坐标都满足方程 $F(x, y, z)=0$，另一方面不在曲面 Σ 上的点的坐标都不满足方程 $F(x, y, z)=0$，则称方程 $F(x, y, z)=0$ 为曲面 Σ 的方程，曲面 Σ 称为方程 $F(x, y, z)=0$ 的图形.

③ 线的表示. 空间曲线可以看作是空间曲面相交的结果，因此空间曲线的方程可以表示为 $\begin{cases} F(x, y, z)=0 \\ G(x, y, z)=0 \end{cases}$.

(3)空间两点间的距离公式.

设空间任两点 A，B 的坐标分别为 $A=(x_1, y_1, z_1)$，$B(x_2, y_2, z_2)$，则 A 与 B 之间的距离记为 $|AB|$，且有

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

特别地，空间任一点 $A(x, y, z)$ 到原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为 $|OA|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

2. 向量的基本概念.

(1)向量.

既有大小又有方向的量称为向量.

(2)向量的表示.

一般表示：$\vec{a}$ 或 $\vec{b}$；

几何表示：$\overrightarrow{AB}$，其中 A 为起点，B 为终点；

向量的坐标表示：$\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$，或者 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$.

(3)向量的模.

向量的大小称为向量的模，设向量 $\vec{a}$ 的模记为 $|\vec{a}|$. 若 $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$，则向量 $\vec{a}$ 的模 $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$；又设向量 $\overrightarrow{AB}$，A，B 的坐标分别为 $A(x_1, y_1, z_1)$，$B(x_2, y_2, z_2)$，则向量 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ 的模为

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

(4)单位向量.

模为 1 的向量称为单位向量. 通常以 $\overrightarrow{e_{\vec{a}}}$ 表示 $\vec{a}$ 方向上的单位向量，则

$$\overrightarrow{e_{\vec{a}}}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\left(\frac{a_x}{|\vec{a}|}, \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \frac{a_z}{|\vec{a}|}\right).$$

(5)零向量.

模为 0 的向量，方向不定.

(6)向量的方向.

向量 $\vec{a}$ 与坐标轴 x，y，z 轴正向的夹角 α，β，γ 可以确定向量的方向，称为向量的方向角（$0\leqslant\alpha, \beta, \gamma\leqslant\pi$），方向角的余弦称为向量的方向余弦，设有向量 $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$，则

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\qquad \cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

且　$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

特别地，单位向量的方向余弦为 $\vec{e}_a=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. 与向量 $\vec{a}$ 大小相等、方向相反的向量称为向量 $\vec{a}$ 的负向量，记为 $-\vec{a}$.

3. 向量的运算.

(1)向量的线性运算.

设有向量 $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$，$\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$，则

向量的加、减运算：$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z)$.

向量的数乘运算：$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$，　$\lambda\in R$.

加法与数乘有如下性质：

① $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$；　　② $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$；

③ $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$；　　④ $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$；

⑤ $\lambda(\mu\vec{a})=\mu(\lambda\vec{a})$；　　⑥ $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{b}+\lambda\vec{a}$；

⑦ $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$.

(2)向量的数量积.

设向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角为 $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，定义向量的数量积为

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta.$$

数量积运算又被称为“点积”或者“内积”，结果为数.

当向量 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$，$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ 时

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

向量的数量积性质：

① $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$；　　② $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$；

③ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$；　　④ $\vec{a}\perp\vec{b}\Longleftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

(3)向量的向量积.

设向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角为 $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，定义向量的向量积为 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$，则

大小：$|\vec{c}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta$（以向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 为邻边的平行四边形的面积）；

方向：$\vec{c}$ 的方向垂直于向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 所确定的平面，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 符合右手规则.

当向量 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$，$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ 时向量积的坐标表示为：

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

向量积的性质：

① $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$；　　② $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$；

③ $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$；　　④ $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}\Longleftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=0$.

(4)向量的混合积.

设已知三个向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 和 $\vec{c}$，如果先作两向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的向量积 $\vec{a}\times\vec{b}$，把所得的向量与第三个向量 $\vec{c}$ 再做数量积 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$，则得到的量称为三向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 的混合积，记作 $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$.

①混合积的坐标表示：设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$，则

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

②混合积的性质：$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=0\Longleftrightarrow\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共面.

4. 向量间的关系.

设向量 $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$，$\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$，$\vec{c}=(c_x, c_y, c_z)$ 为非零向量，则

(1)$\vec{a}=\vec{b}\Longleftrightarrow a_x=b_x, a_y=b_y, a_z=b_z$.

(2)$\vec{a}\parallel\vec{b}\Longleftrightarrow\vec{b}=\lambda\vec{a}\Longleftrightarrow\dfrac{b_x}{a_x}=\dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z}\Longleftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=0$，其中，若 a_x，a_y，a_z 中有一个为零，如 $a_x=0$，应理解为对应 $b_x=0$.

(3)$\vec{a}\perp\vec{b}\Longleftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Longleftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

(4)设向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$.

(5)$\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线$\Longleftrightarrow$存在不为零的数 λ，μ，使得 $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=0$.

5. 空间的曲面与曲线.

(1)几种常见的空间曲面及方程.

①柱面.

概念:直线 L 沿一定曲线 C 平行移动形成的轨迹叫做柱面，定曲线 C 叫做柱面的准线，动直线 L 叫做柱面的母线.

方程:准线 C 为在 xOy 面上的方程是 $f(x, y)=0$ 的曲线，母线平行于 z 轴的柱面方程为 $f(x, y)=0$. 类似的,$g(y,z)=0$，$h(x,z)=0$ 分别表示母线平行于 x 轴和 y 轴的柱面.

注意:在空间直角坐标系中，柱面 $f(x, y)=0$ 的准线 C 的方程为$\begin{cases}f(x, y)=0\\z=0\end{cases}$.

②旋转曲面.

概念:以一条平面曲线 C 绕其平面上的一条定直线 L 旋转一周所成的曲面叫做旋转曲面，定直线 L 称为旋转曲面的旋转轴，曲线 C 叫做旋转曲面的一条母线.

方程:母线方程为$\begin{cases}f(x, y)=0\\z=0\end{cases}$、旋转轴为 x 轴的旋转曲面的方程为 $f(x, \pm\sqrt{y^2+z^2})=0$；旋转轴为 y 轴的旋转曲面的方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+z^2}, y)=0$.

(2)空间曲线方程.

①一般方程：$\begin{cases}F(x, y, z)=0\\G(x, y, z)=0\end{cases}$.

注意:联立任意两个曲面方程，它们可能不表示任何空间曲线，例如，$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\x^2+y^2+z^2=2\end{cases}$，从代数上看这是一个矛盾方程组，不存在解；从几何上看，这是两个同心的球面，它们没有任何公共点.

② 参数方程：$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$，$t$ 是参数.

③ 空间曲线的投影柱面和投影曲线. 以空间曲线 C 为准线，母线平行于 z 轴的柱面称为曲线 C 交与 xOy 面的投影柱面，柱面与 xOy 面的交线称为曲线 C 在 xOy 面上的投影曲线.

方程：空间曲线 $C\begin{cases}F(x, y, z)=0\\G(x, y, z)=0\end{cases}$，消去 z 得曲线 C 关于 xOy 平面上的投影柱面方程 $H(x, y)=0$，而其投影曲线方程为 $\begin{cases}H(x, y)=0\\z=0\end{cases}$. 类似地可求在 yOz，zOx 平面上的投影柱面方程和投影曲线方程.

(3) 二次曲面的标准方程.

二次曲面的一般式方程为：

$$A_1x^2+A_2y^2+A_3z^2+2B_1yz+2B_2xz+2B_3xy+2C_1x+2C_2y+2C_3z+D=0.$$

方程可化为多种标准形式，常见的有以下几种：

球面　$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$，球心为 (x_0, y_0, z_0)，半径为 R 的球面方程. $x^2+y^2+z^2=R^2$，球心为 $(0, 0, 0)$，半径为 R 的球面方程.

椭球面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

二次锥面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0.$

单叶双曲面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

双叶双曲面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1.$

椭圆抛物面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z.$

双曲抛物面　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z.$

椭圆柱面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

双曲柱面　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

抛物柱面　$x^2=ay.$

6. 空间的平面与直线.

(1) 空间平面的方程.

①平面的点法式方程：已知平面上的点 (x_0, y_0, z_0) 和平面的法向量 $\vec{n}=(A, B, C)$，则

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

由于同时垂直于平面内两相交直线的直线即为平面的法线，所以一般用此法求平面的法向量，进而求平面的点法式方程.

②平面的一般式方程：$Ax+By+Cz+D=0$，其中法向量为 $\vec{n}=(A, B, C)$.

当 $D=0$ 时，方程 $Ax+By+Cz=0$ 表示一个通过原点的平面；

当 $A=0$ 时，方程为 $By+Cz+D=0$，法向量 $\vec{n}=(0, B, C)$ 垂直于 x 轴，方程表示一个平行于 x 轴的平面；

当 $A=B=0$ 时，方程 $Cz+D=0$ 表示一个平行于 xOy 面的平面；

当 $A=D=0$ 时，方程 $By+Cz=0$ 表示一个通过 x 轴的平面.

其他情况依此类推.

求平面的一般式方程时，可用待定系数法；也可先求其点法式方程，再化为一般式方程.

③ 平面的截距式方程：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，$a$，$b$，$c$ 分别称为平面在 x，y，z 轴上的截距.

④平面的三点式方程：一般情况下，过点 $M_k(x_k, y_k, z_k)$，$k=1, 2, 3$ 的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

(2)空间直线的方程.

① 空间直线方程的一般方程：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$，$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$；

② 空间直线方程的对称式（点向式）：$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$.

其中，$M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为直线 L 上的一点，$\vec{s}=(m, n, p)$（m，n，p 不能同时为零）为直线 L 的方向向量.

由立体几何知识知，直线通常可求其对称式方程；由于点、方向向量不是唯一的，所以直线的对称式方程也不唯一.

注：若 m，n，p 有一个为零，如 $m=0$，则直线方程 $\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ 应理解为平面 $\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ 和 $x-x_0=0$ 的交线；若 m，n，p 中有两个为零，如 $m=n=0$，则直线方程 $\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{p}$ 应理解为平面 $x-x_0=0$ 和 $y-y_0=0$ 的交线.

直线的对称式中只有两个独立的等式（若某分母为 0，则分子为 0），联立即得一般式方程；反之，由于直线与两相交平面的法线垂直，故可从直线的一般式求得直线的方向向量. 另外，令直线的一般式中某变量为 0，解出另两个变量的值即得直线上一点，故由直线的一般式方程可求得其对称式方程.

③空间直线方程的参数式：$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt \end{cases}$ t 为参数.

直线的参数方程是单参数的，当我们需要将直线方程与其他曲面方程联立求交点时，通常把直线方程化为参数式.

(3)空间点、直线、平面间的关系.

① 两平面的位置关系：设平面 π_1 和 π_2 的法向量依次为 $\vec{n}_1=(A_1, B_1, C_1)$ 和 $\vec{n}_2=(A_2, B_2, C_2)$，则

平行：$\pi_1 /\!/ \pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 /\!/ \vec{n}_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1=\lambda\vec{n}_2 \Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \Longleftrightarrow \vec{n}_1\times\vec{n}_2=0$；

垂直：$\pi_1 \perp \pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2=0 \Longleftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$；

夹角：设平面 π_1 和 π_2 的夹角记为 θ，通常限定 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，则 $\theta=(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2})$，

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

②两直线的位置关系：设直线 L_1 和 L_2 的方向向量依次为 $\vec{s}_1=(m_1, n_1, p_1)$ 和 $\vec{s}_2=(m_2, n_2, p_2)$，则

平行：$L_1 /\!/ L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1 /\!/ \vec{s}_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1=\lambda\vec{s}_2 \Longleftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \Longleftrightarrow \vec{s}_1\times\vec{s}_2=0$；

垂直：$L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2=0 \Longleftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$；

夹角：设 L_1 和 L_2 的夹角记为 φ，通常限定 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，$\phi=(\widehat{\vec{s}_1,\vec{s}_2})$，则

$$\cos\phi=\frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

③ 直线与平面的位置关系：设直线 L 的方向向量为 $\vec{s}=(m, n, p)$，平面 π 的方向向量为 $\vec{n}=(A, B, C)$，则

平行：$L /\!/ \pi \Longleftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \Longleftrightarrow \vec{s} \cdot \vec{n}=0 \Longleftrightarrow Am+Bn+Cp=0$；

垂直：$L \perp \pi \Longleftrightarrow \vec{s} /\!/ \vec{n} \Longleftrightarrow \vec{s}=\lambda\vec{n} \Longleftrightarrow \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p} \Longleftrightarrow \vec{s}\times\vec{n}=0$；

夹角：当直线与平面不垂直时，直线和它在平面上的投影的夹角 $\varphi\left(0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 称为直线与平面的夹角，且

$$\sin\phi=\frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}||\vec{s}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

④ 点到平面的距离公式：设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外一点，则 P_0 到平面的距离为：$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

⑤ 点到直线的距离公式：设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是直线 L 外一点，且直线的方向向量为 $\vec{s}=(m, n, p)$，则 P_0 到直线 L 的距离为：

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_0M_0}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}=\frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ m & n & p \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \end{vmatrix}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}, M_0(x_1, y_1, z_1)\text{为垂足}.$$

疑难解答

问题 1： 向量可以比较大小吗？

解 既有大小又有方向的量叫做向量，由定义可知两个向量本身不能比较大小，只能

比较两个向量模的大小.

问题 2: 记号 (x, y, z) 既可以表示一个点也可以表示一个向量，两者之间有什么区别吗?

解　记号 (x, y, z) 既可以表示点 M，又可以表示向量$\overrightarrow{OM}$，在几何中点和向量是两个不同的概念，当 (x, y, z) 表示向量时，可对它进行运算；当 (x, y, z) 表示点时，就不能进行运算. 所以在看到记号 (x, y, z) 时，必须从上下文去认清它究竟表示点还是向量.

问题 3: 数量与向量有什么区别?

解　数量加法为代数运算，而向量加法不是代数运算，要按照平行四边形或三角形法则进行运算；数量乘法只有一种，其结果是一个数，而两向量的乘法运算有两种：数量积（其结果是数）与向量积（其结果是向量）；数量乘法满足消去律、结合律，而两种向量乘法都没有消去律和结合律，并且向量积也不满足交换律.

问题 4: $x^2+y^2=1$ 在解析几何中表示什么图像?

解　在平面解析几何中，$x^2+y^2=1$ 表示以原点 $O(0, 0)$ 为圆心，以 1 为半径的圆周；在空间解析几何中 $x^2+y^2=1$ 表示以 xOy 平面上的圆周 $x^2+y^2=1$ 为准线，以平行于 z 轴的直线为母线的圆柱面.

§8.1　向量及线性运算

一、典型例题分析

例 1　求平行于向量 $\vec{r}=(3, 2, -1)$ 的单位向量.

解　求平行于向量 $(3, 2, -1)$ 的单位向量，就是把向量 $(3, 2, -1)$ 单位化. 所以

$$\vec{e}_{\vec{r}}=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=\frac{(3,2,-1)}{\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{14}}(3,2,-1).$$

例 2　点 A 位于第一卦限，向量$\overrightarrow{OA}$与 x 轴、y 轴的夹角依次为$\frac{\pi}{3}$和$\frac{\pi}{4}$，求与$\overrightarrow{OA}$方向相同的单位向量.

解　因为向量的方向余弦构成的向量刚好是单位向量，所以本题只需要求出向量$\overrightarrow{OA}$的方向余弦即可.

$\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{\pi}{4}$，由关系式$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，得

$$\cos^2\gamma=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

因为点 A 位于第一卦限，知 $\cos\gamma>0$，故 $\cos\gamma=\frac{1}{2}$.

于是　$\vec{e}_{\overrightarrow{OA}}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)=\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

例 3 已知 $A(4, 0, 5)$，$B(7, 1, z)$ 且 $|AB|=\sqrt{14}$，求 z 的值.

解 本题考察的是两点之间的距离. 由题意知

$$\sqrt{(7-4)^2+(1-0)^2+(z-5)^2}=\sqrt{14}.$$

等号两边同时平方，可得 $(z-5)^2=4$，则

$$z=7，或者\ z=3.$$

例 4 设 $\vec{m}=\vec{i}+\vec{j}$，$\vec{n}=-2\vec{j}+\vec{k}$，求以向量 $\vec{m}$，$\vec{n}$ 为邻边的平行四边形的对角线的长度.

解 对角线的长为 $|\vec{m}+\vec{n}|$，$|\vec{m}-\vec{n}|$.

因为 $\vec{m}+\vec{n}=(1,-1,1)$，　$\vec{m}-\vec{n}=(1,3,-1)$，

所以 $|\vec{m}+\vec{n}|=\sqrt{3}$，　$|\vec{m}-\vec{n}|=\sqrt{11}$.

该平行四边形的对角线的长度各为 $\sqrt{3}$，$\sqrt{11}$.

例 5 设 $\vec{m}=3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$，$\vec{n}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$，$\vec{p}=2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$，求向量 $\vec{a}=4\vec{m}-3\vec{n}+2\vec{p}$ 在 x 轴上的投影及在 z 轴上的分向量.

解 因为
$$\begin{aligned}\vec{a}&=4\vec{m}-3\vec{n}+2\vec{p}=4(3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k})-3(2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})+2(2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k})\\&=10\vec{i}+16\vec{j}+9\vec{k}.\end{aligned}$$

故在 x 轴上的投影为 $a_x=10$.

在 z 轴上的分向量 $a_y\vec{k}=9\vec{k}$.

二、习题

习题 1

1. 自点 $M(1, 2, 3)$ 分别作各坐标面和坐标轴的垂线，写出各垂足的坐标.
2. 求点 $M_1(2, -1, 3)$ 和点 $M_2(-3, 2, 5)$ 之间的距离.
3. 已知点 $A(1, 2, -4)$，$\overrightarrow{AB}=(-3, 2, 1)$，求点 B 的坐标.
4. 设 P 在 x 轴上，它到 $P_1(0, \sqrt{2}, 3)$ 的距离为到点 $P_2(0, 1, -1)$ 的距离的两倍，求点 P 的坐标.
5. 已知向量 $\vec{a}=(5, 7, 8)$，$\vec{b}=(3, -4, 6)$，$\vec{c}=(-6, -9, -5)$，求向量 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 的模和方向余弦.
6. 向量与 y 轴和 z 轴各成 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{2\pi}{3}$ 的角，求它与 x 轴所成的角.
7. 点 M 的向径与 x 轴成 $\frac{\pi}{4}$ 角，与 y 轴成 $\frac{\pi}{3}$ 角，它的模为 6，如果点 M 的坐标中 $z<0$，试求点 M 的坐标.
8. 求平行于向量 $\vec{a}=(6, 7, -6)$ 的单位向量.
9. 已知两点 $A(4, 0, 5)$ 和 $B(7, 1, 3)$，求与向量 $\overrightarrow{AB}$ 平行的向量的单位向量 $\vec{c}$.
10. 试解下列各题.

(1) 化简 $(x-y)\cdot(\vec{a}-\vec{b})-(x+y)\cdot(\vec{a}-\vec{b})$；

(2) 已知 $\vec{a}=\vec{e_1}+2\vec{e_2}-\vec{e_3}$，$\vec{b}=3\vec{e_1}-2\vec{e_2}+2\vec{e_3}$，求 $\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{b}$ 和 $3\vec{a}-2\vec{b}$.

11. 在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}+2\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=-4\vec{a}-\vec{b}$，$\overrightarrow{CD}=-5\vec{a}-3\vec{b}$，证明 $ABCD$ 为梯形.

12. 设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}+5\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=-2\vec{a}+8\vec{b}$，$\overrightarrow{CD}=3(\vec{a}-\vec{b})$，证明：$A$、$B$、$D$ 三点共线.

13. 设 $\vec{m}=(3,5,8)$，$\vec{n}=(2,-4,-7)$，$\vec{p}=(5,1,-4)$. 求向量 $\vec{a}=4\vec{m}+3\vec{n}-\vec{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

14. 向量 a，b，c 具有相同的模，且两两所成的角相等，若 a，b 的坐标分别为 $(1,1,0)$ 和 $(0,1,1)$，求向量 c 的坐标.

习题 2

1. 在 yOz 面上求与三点 $M_1(3,1,2)$，$M_2(4,-2,-2)$，$M_3(0,5,1)$ 等距离的点.

2. 求点 $M(1,2,3)$ 到各个坐标面和坐标轴的距离.

3. 已知向径$\overrightarrow{OM}$与各坐标轴成相等的锐角，如果其长度为 $2\sqrt{3}$，求$\overrightarrow{OM}$的坐标.

4. 设有向量 $\overrightarrow{p_1p_2}$，已知$\overrightarrow{p_1p_2}=2$，它与 x 轴和 y 轴的夹角分别为$\frac{\pi}{3}$和$\frac{\pi}{4}$，如果 p_1 的坐标为 $(1,0,3)$，求 p_2 的坐标.

5. 已知矢量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 的分量如下：

(1) $\vec{a}=\{0,-1,2\}$，$\vec{b}=\{0,2,-4\}$，$\vec{c}=\{1,2,-1\}$；

(2) $\vec{a}=\{1,2,3\}$，$\vec{b}=\{2,-1,0\}$，$\vec{c}=\{0,5,6\}$.

试判别它们是否共面. 能否将 $\vec{c}$ 表示成 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的线性组合？若能，写出表示式.

§8.2　数量积　向量积

一、典型例题分析

例 1　判断下列等式是否成立：

(1) $|\vec{a}|\vec{a}=\vec{a}^2$；　　(2) $\vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}^2\vec{b}$；　　(3) $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=\vec{a}^2\vec{b}^2$.

解　(1) 不成立. 因为等式左边是向量，而等式右边是数量.

(2) 虽然等式两边均为向量，但左边向量与 $\vec{a}$ 同向或反向，而右边向量与 $\vec{b}$ 同向，故只要 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不是共线的，等式就不可能成立.

(3) 虽然等式两边均为数，但 $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=[|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})]^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})$ 当且仅当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线时等式才成立.

注：判断有关向量运算的等式是否成立，关键是判断等式两边是否都是向量或者数量；若两边相异，则等式必不成立；若两边均为数量且相等，则等式成立，否则不成立；若两边均为向量且大小相等、方向相同，则等式成立，否则不成立.

例 2　向量 $\vec{c}$ 垂直于 $\vec{a}=(2,3,-1)$和 $\vec{b}=(1,-2,3)$且满足 $\vec{c}\cdot(2,-1,1)=-6$，求 $\vec{c}$.