

张景中 / 主编

走进教育数学

Go to Educational Mathematics

微积分快餐

(第三版)

微积分站在高点，
最终统一到一个哲学公式，
其比值(或比例数)都相同：

$$\frac{\text{相对真理}}{\text{绝对真理}} = 0.9$$

它揭示了追求真理的数字化过程：

要经多道坎(如0.9, 0.99, 0.999, ...)，再将比例数提到1，
即相对真理不可能100%正确，只能正确到90%, 99%, 99.9%。

就像“一日之锤，日取其半，万世不竭”，
结果，微积分变成填空题：填写相对真理使公式成立。

林 群 / 著



科学出版社

“十一五”国家重点图书出版规划项目

走进教育数学
Go to Educational Mathematics

微积分快餐

(第三版)

林 群 / 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书构造了一张图,一个哲学公式.当你明白了什么是绝对真理与相对真理,为什么比值都相同:

$$\frac{\text{相对真理}}{\text{绝对真理}}=0.\dot{9},$$

微积分填空题就完成了,牛顿-莱布尼茨公式便瓜熟蒂落!

本书思想先行,结果已在意料之中;证明在后,但属于机械的推导,容易验证,就像瓮中捉鳖!

本书可供中学师生、大学文科和经济管理类师生,以及数学爱好者和研究者参考.



图书在版编目(CIP)数据

微积分快餐/林群著. —3版. —北京:科学出版社,2013.12

(走进教育数学/张庚中主编)

ISBN 978-7-03-039863-3

I. ①微… II. ①林… III. ①微积分—普及读物 IV. ①O172-4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 309863 号

丛书策划:李 敏

责任编辑:李 敏/责任校对:鲁 素

责任印制:赵德静/整体设计:黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年8月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2011年4月第 二 版 印张:9 3/4 插页:2

2013年12月第 三 版 字数:180 000

2013年12月第一次印刷

定价:30.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

《走进教育数学》丛书编委会

主 编 张景中

委 员 (按姓氏汉语拼音排序)

李尚志 林 群 沈文选 谈祥柏

王鹏远 张奠宙 张景中 朱华伟

总序

看到本丛书，多数人会问这样的问题：

“什么是教育数学？”

“教育数学和数学教育有何不同？”

简单说，改造数学使之更适宜于教学和学习，是教育数学为自己提出的任务。

把学数学比作吃核桃。核桃仁美味而富有营养，但要砸开才能吃到它。有些核桃，外壳与核仁紧密相依，成都人形象地叫它们“夹米子核桃”，如若砸不得法，砸开了还很难吃到。数学教育要研究的，就是如何砸核桃吃核桃。教育数学呢，则要研究改良核桃的品种，让核桃更美味、更营养、更容易砸开吃净。

“教育数学”的提法，最早出现在笔者1989年所写的《从数学教育到教育数学》中。其实，教育数学的活动早已有之，如欧几里得著《几何原本》、柯西写《分析教程》，

都是教育数学的经典之作。

数学教育有很多世界公认的难点，如初等数学里的几何和三角，高等数学里面的微积分，都比较难学。为了对付这些难点，很多数学老师、数学教育专家前赴后继，做了大量的研究，写了很多的著作，进行了广泛的教学实践。多年实践，几番改革，还是觉得太难，不得不“忍痛割爱”，少学或者不学。教育数学则从另一个角度看问题：这些难点的产生，是不是因为前人留下来的知识组织得不够好，不适于数学的教与学？能不能优化数学，改良数学，让数学知识变得更容易学习呢？

ii

知识的组织方式和学习的难易有密切的联系。英语中12个月的名字：January, February, ……。背单词要花点工夫吧！如果改良一下：一月就叫 Monthone，二月就叫 Monthtwo，等等，马上就能理解，就能记住，学起来就容易多了。生活的语言如此，科学的语言——数学何尝不是这样呢？

很多人认为，现在小学、中学到大学里所学的数学，从算术、几何、代数、三角到微积分，都是几百年前甚至几千年前创造出来的。这些数学的最基本的部分，普遍认为是经过千锤百炼，相当成熟了。对于这样的数学内容，除了选择取舍，除了教学法的加工之外，还有优化改革的余地吗？

但事情还可以换个角度看。这些进入了课堂的数学，是在不同的年代，不同的地方，由不同的人，为不同的目的而创造出来的，而且其中很多不是为了教学的目的而创造出来的。难道它们会自然而然地配合默契，适宜于教学和学

习吗?

看来,这主要不是一个理论问题,而是一个实践问题.

走进教育数学,看看教育数学在做什么,有助于回答这类问题.

随便翻翻这几本书,就能了解教育数学领域里近20年来做了哪些工作.从已有的结果看到,教育数学有事可做,而且能做更多的事情.

比如微积分教学的改革,这是在世界范围内被广为关注的事.丛书中有两本专讲微积分,主要还不是讲教学方法,而是讲改革微积分本身.

由牛顿和莱布尼茨创建的微积分,是第一代的微积分.这是说不清楚的微积分.创建者说不清楚,使用微积分解决问题的数学家也说不清楚.原理虽然说不清楚,应用仍然在蓬勃发展.微积分在说不清楚的情形下发展了130多年.

柯西和魏尔斯特拉斯等,建立了严谨的极限理论,巩固了微积分的基础,形成了第二代的微积分.数学家把微积分说清楚了.但是由于概念和推理烦琐迂回,对于绝大多数学习高等数学的人来说,是听不明白的微积分.微积分在多数学习者听不明白的情形下,又发展了170多年,直到今天.

第三代的微积分,是正在创建发展的新一代的微积分.人们希望微积分不但严谨,而且直观易懂,简易明快.让学习者用较少的时间和精力就能够明白其原理,不但知其然而且知其所以然.不但数学家说得清楚,而且非数学专业的多数学子也能听得明白.

第一代微积分和第二代微积分,在具体计算方法上基

本相同；不同的是对原理的说明，前者说不清楚，后者说清楚了。

第三代微积分和前两代微积分，在具体计算方法上也没有不同；不同的仍是对原理的说明。

几十年来，国内外都有人从事第三代微积分的研究以至教学实践。这方面的努力，已经有了显著的成效。在我国，林群院士近10年来在此方向做了大量的工作。本丛书中的《微积分快餐》，就是他在此领域的代表作。

古今中外，通俗地介绍微积分的读物极多，但能够兼顾严谨与浅显直观的几乎没有。《微积分快餐》做到了。一张图解微积分，引到了一个哲学公式，统一了微积分的三大成果：牛顿-莱布尼茨公式、泰勒公式以及欧拉-麦克劳林公式。全书思想先行，证明在后，将微积分讲得轻松活泼、简单明了，而且严谨自封，让读者在品尝快餐的过程中进入了高等数学的殿堂。

丛书中还有一本《直来直去的微积分》，是笔者学习微积分的心得。书中从“瞬时速度有时比平均速度大，有时比平均速度小”这个平凡的陈述出发，不用极限概念和实数理论，“微分不微，积分不积”，直截了当地建立了微积分基础理论。书中概念与《微积分快餐》中的逻辑等价而呈现形式不尽相同，殊途同归，显示出第三代微积分的丰富多彩。

回顾历史，牛顿和拉格朗日都曾撰写著作，致力于建立不用极限也不用无穷小的微积分，或证明微积分的方法，但没有成功。我国数学大师华罗庚所撰写的《高等数学引论》中，也曾刻意求新，不用中值定理或实数理论而寻求

直接证明“导数正则函数增”这个具有广泛应用的微积分基本命题，可惜也没有达到目的。

前辈泰斗是我们的先驱，教育数学的进展实现了先驱们简化微积分理论的愿望。

丛书中两本关于微积分的书，都专注于基本思想和基本概念变革。基本思想、基本概念，以及在此基础上建立的基本定理和公式，是这门数学的筋骨。数学不能只有筋骨，还要有血有肉。中国高等教育学会教育数学专业委员会理事长、全国名师李尚志教授的最新力作《数学的神韵》，是有血有肉、丰满生动的教育数学。书中的大量精彩实例可能是你我熟悉的老故事，而作者却能推陈出新，用新的视角和方法处理老问题，找出事物之间的联系，发现不同中的相同，揭示隐藏的规律。幽默的场景，诙谐的语言，使人在轻松阅读中领略神韵，识破玄机。看看这些标题，“简单见神韵”、“无招胜有招”、“茅台换矿泉”、“凌波微步微积分”，可见作者的功力非同一般！特别值得一提的是，书中对微积分的精辟见解，如用代数观点演绎无穷小等，适用于第一代、第二代和第三代微积分的教学与学习，望读者留意体味。

练武功的上乘境界是“无招胜有招”，但武功仍要从一招一式入门。解数学题也是如此。著名数学家和数学教育家项武义先生说，教数学要教给学生“大巧”，要教学生“运用之妙，存乎一心”，以不变应万变，不讲或少讲只能对付一个或几个题目的“小巧”。我想所谓“无招胜有招”的境界，就是“大巧”吧！但是，小巧固不足取，大巧也确实太难。对于大多数学子而言，还要重视有章可循的招式，由小

到大，以小御大，小题做大，小中见大。朱华伟教授和钱展望教授的《数学解题策略》，踏踏实实地从一招、一式、一题、一法着手，探秘发微，系统地阐述数学解题法门，是引领读者登堂入室之作。作者是数学奥林匹克领域的专家，数学奥林匹克讲究题目出新，不落老套。我看了这本书里的不少例题，看不出有哪些似曾相识，真不知道他是从哪里搜罗来的！

朱华伟教授还为本丛书写了一本《从数学竞赛到竞赛数学》。竞赛数学当然就是奥林匹克数学。华伟教授认为，竞赛数学是教育数学的一部分。这个看法是言之成理的。数学要解题，要发现问题、创造方法。年复一年进行的数学竞赛活动，不断地为数学问题的宝库注入新鲜血液，常常把学术形态的数学成果转化为可能用于教学的形态。早期的国际数学奥林匹克试题，有不少进入了数学教材，成为例题和习题。竞赛数学与教育数学的关系，于此可见一斑。

写到这里，忍不住要为数学竞赛说几句话。有一阵子，媒体上面出现不少讨伐数学竞赛的声音，有的教育专家甚至认为数学竞赛之害甚于黄、赌、毒。我看了有关报道后第一个想法是，中国现在值得反对的事情不少，论轻重缓急还远远轮不到反对数学竞赛吧。再仔细读这些反对数学竞赛的意见，可以看出来，他们反对的实际上是某些为牟利而又误人子弟的数学竞赛培训。就数学竞赛本身而言，是面向青少年中很小一部分数学爱好者而组织的活动。这些热心参与数学竞赛的数学爱好者（还有不少数学爱好者参与其他活动，例如，青少年创新发明活动、数学建模活动、近年来设立的丘成桐中学数学奖），估计不超过约两亿中小學生

的百分之五. 从一方面讲, 数学竞赛培训活动过热产生的消极影响, 和升学考试体制以及教育资源分配过分集中等多种因素有关, 这笔账不能算在数学竞赛头上; 从另一方面看, 大学招生和数学竞赛挂钩, 也正说明了数学竞赛活动的成功因而得到认可. 对于青少年的课外兴趣活动, 积极的对策不应当是限制堵塞, 而是开源分流. 发展多种课外活动, 让更多的青少年各得其所, 把各种活动都办得像数学竞赛这样成功并且被认可, 数学竞赛培训活动过热的问题自然就化解或缓解了.

回到前面的话题. 上面说到“大巧”和“小巧”, 自然想到还有“中巧”. 大巧法无定法, 小巧一题一法. 中巧呢, 则希望用一个方法解出一类题目. 也就是说, 把数学问题分门别类, 一类一类地寻求可以机械执行的方法, 即算法. 中国古代的《九章算术》, 就贯穿了分类解题寻求算法的思想. 中小学里学习四则算术、代数方程, 大学里学习求导数, 学的多是机械的算法. 但是, 自古以来几何命题的证明却千变万化, 法无定法. 为了找寻几何证题的一般规律, 从欧几里得、笛卡儿到希尔伯特, 前赴后继, 孜孜以求. 我国最高科技奖获得者、著名数学家吴文俊院士指出, 希尔伯特是第一个发现了几何证明机械化算法的人. 在《几何基础》这部名著中, 希尔伯特对于只涉及关联性质的这类几何命题, 给出了机械化的判定算法. 由于受时代的局限性, 希尔伯特这一学术成果并不为太多人所知. 直到1977年, 吴文俊先生提出了一个新的方法, 可以机械地判定初等几何中等式型命题的真假. 这一成果在国际上被称为“吴方法”, 它在几何定理机器证明领域中掀起了一个高潮, 使这

个自动推理中最不成功的部分变成了最成功的部分。

吴方法和后来提出的多种几何定理机器证明的算法，都不能给出人们易于检验和理解的证明，即所谓可读证明。国内外的专家一度认为，机器证明的本质在于“用量的复杂克服质的困难”，所以不可能机械地产生可读证明。

笔者基于1974年在新疆教初中时指导学生解决几何问题的心得，总结出用面积关系解题的规律。在这些规律的基础上，于1992年提出消点算法，和周咸青、高小山两位教授合作，创建了可构造等式型几何定理可读证明自动生成的理论和方法，并在计算机上实现。最近在网上看到，面积消点法也多次在国外的不同的系统中实现了。本丛书中的《几何新方法和新体系》，包括了面积消点法的通俗阐述，以及笔者提出的一个有关面积方法的公理系统，由冷拓同志协助笔者整理而成。教育数学研究的副产品解决了机器证明领域中的难题，对笔者而言实属侥幸。

基于对数学教育的兴趣，笔者从1974年以来，在30多年间持续地探讨面积解题的规律，想把几何变容易一些。后来发现，国内外的中学数学教材里，已经把几何证明删得差不多了。于是“迷途知返”，把三角作为研究的重点。数学教材无论如何改革，三角总是删不掉的吧。本丛书中的《一线串通的初等数学》，讲的是如何在小学数学知识的基础上建立三角，从三角的发展引出代数工具并探索几何，把三者串在一起思路。

在《一线串通的初等数学》中没有提到向量。其实，向量早已下放到中学，与传统的初等数学为伍了。在上海的数学教材里甚至在初中就开始讲向量。讲了向量，自然想试

试用向量解决几何问题，看看向量解题有没有优越性。可惜在教材里和刊物上出现的许多向量例题中，方法略嫌烦琐，反而不如传统的几何方法简捷优美。如何用向量法解几何题？能不能在大量的几何问题的解决过程中体现向量解题的优越性？这自然是教育数学应当关心的一个问题。为此，本丛书推出一本《绕来绕去的向量法》。书中用大量实例说明，如果掌握了向量解题的要领，在许多情形下，向量法比纯几何方法或者坐标法干得更漂亮。这要领，除了向量的基本性质，关键就是“回路法”。绕来绕去，就是回路之意。回路法是笔者的经验谈，没有考证前人是否已有过，更没有上升为算法。书稿主要由彭翥成同志执笔，绝大多数例子也是他采集加工的。

谈起中国的数学科普，谈祥柏的名字几乎无人不知。老先生年近八旬，从事数学科普创作超过半个世纪，出书 50 多种，文章逾千篇。对于数学的执著和一生的爱，洋溢于他为本丛书所写的《数学不了情》的字里行间。哪怕仅仅信手翻上几页，哪怕是对数学知之不多的中小學生，也会被一个个精彩算例所显示的数学之美和数学之奇深深吸引。书中涉及的数学知识似乎不多不深，所蕴涵的哲理却足以使读者掩卷遐想。例如，书中揭示出高等代数的对称、均衡与和谐，展现了古老学科的青春；书中提到海峡两岸的数学爱好者发现了千百年来从无数学者、名人的眼皮底下滑过去的“自然数高次方的不变特性”，这些生动活泼的素材，兼有冰冷的思考与火热的激情，无论读者偏文偏理，均会有所收益。

沈文选教授长期从事中学数学研究、初等数学研究、

奥林匹克数学研究和教育数学的研究。他的《走进教育数学》和本丛书同名，是一本从学术理论角度探索教育数学的著作。在书中他试图诠释“教育数学”的概念，探究“教育数学”的思想源头与内涵；提出“整合创新优化”、“返璞归真优化”等优化数学的方法和手段；并提供了丰富的案例。笔者原来杜撰出“教育数学”的概念，虽然有些实例，但却凌乱无序，不成系统。经过文选教授的旁征博引，诠释论证，居然有了粗具规模的体系框架，有点学科模样了。这确是意外的收获。

本丛书中的《情真意切话数学》，是张奠宙教授和丁传松、柴俊两位先生合作完成的一本别有风味的谈数学与数学教育的力作。作者跳出数学看数学，以全新的视角，阐述中学数学和微积分学中蕴涵的人文意境；将中国古诗词等文学艺术和数学思想加以连接，既有数学的科学内涵，又有丰富的人文素养，把数学与文艺沟通，帮助读者更好地理解和亲近数学。在这里，老子道德经中“道生一，一生二，二生三，三生万物”被看成自然数公理的本意；“前不见古人，后不见来者，念天地之悠悠，独怆然而涕下”，解读为“四维时空”的遐想；“春色满园关不住，一枝红杏出墙来”用来描述无界数列的本性；而“孤帆远影碧空尽，唯见长江天际流”则成为极限过程的传神写照。书中把数学之美分为美观、美好、美妙和完美4个层次，观点新颖精辟，论述丝丝入扣。在课堂上讲数学如能够如此情深意切，何愁学生不爱数学？

浏览着这风格不同并且内容迥异的11本书，教育数学领域的现状历历在目。这是一个开放求新的园地，一个蓬勃

发展的领域. 在这里耕耘劳作的人们, 想的是教育, 做的是数学, 为教育而研究数学, 通过丰富发展数学而推进教育. 在这里大家都做自己想做的事, 提出新定义新概念, 建立新方法新体系, 发掘新问题新技巧, 寻求新思路新趣味, 凡此种种, 无不是为教育而做数学.

为教育而做数学, 做出了些结果, 出了这套书, 这仅是开始. 真正重要的是进入教材, 进入课堂, 产生实效, 让千千万万学子受益, 进而推动社会发展, 造福人类. 这才是作者们和出版者的大期望. 切望海内外同道者和不同道者指正批评, 相与切磋, 共求真知, 为数学教育的进步贡献力量.



2009 年 7 月

前言

微积分关键做好填空题：填写相对真理，引出比例数 0.9.

为了对比，这一版首先回顾圆周长怎么算？古代人就知道，利用正多边形的周长来计算（图 0-1）.

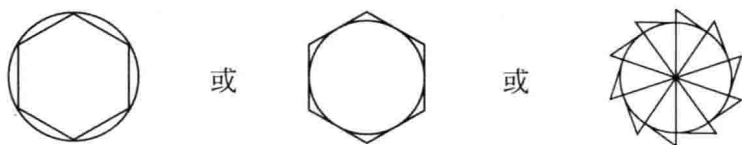


图 0-1 多边形

这里，用直的弦或切线（相对真理）取代曲的弧（绝对真理）。现在，用局部比值 $\frac{\text{弦}}{\text{弧}}$ 来衡量局部误差，不断重复，最后用弦和取代圆周长，用整体比值 $\frac{\text{弦和}}{\text{圆周长}}$ 来衡量整体误差，

看是否越来越接近于1（意即弦与弧，弦和与圆周，是否相吻合）？从实验数据中发现有相同的比例数

$$\frac{\text{相对真理}}{\text{绝对真理}} \text{ 或 } \frac{\text{弦}}{\text{弧}} = \frac{\text{弦和}}{\text{圆周长}} = 0.999\dots$$

（这里，局部比=整体比）。当分割加密，9就添多，重复进行，引到一个无限循环数0.9，有表0-1。

表0-1 弦和与圆周长比

正 n 边形	弦和	比值
6	6.0000000000	0.9549296586
7	6.0743723476	0.9667663853
8	6.1229349178	0.9744953584
12	6.2116570824	0.9886159295
14	6.2305861508	0.9916285843
16	6.2428903046	0.9935868512
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

类似的做法搬到下面。

但微积分（或牛顿-莱布尼茨公式）另找一张图：不是圆周求长，却是曲线求高（图0-2）。

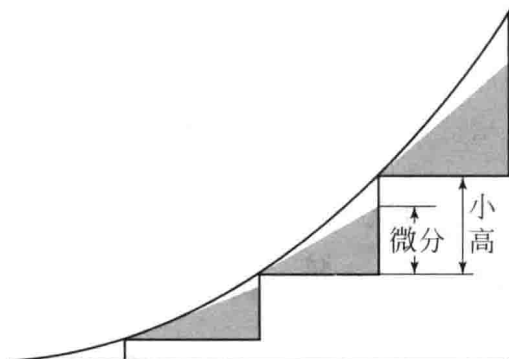


图0-2 图解微积分