■普通高等学校"十一五"规划教材配套辅导■

第2版

医药高等数学
学习指导

主编 秦侠 吴学森 陈涛

中国科学技术大学出版社

■ 普通高等学校“十一五”规划教材配套辅导 ■

第2版

医药高等数学
学习指导

主　编　秦　侠　吴学森　陈　涛

副主编　刘国旗　宋国强　孙　侠

编　者　（以姓氏笔画为序）

朱文婕　刘国旗　孙　侠

吴学森　宋国强　陈　涛

周　睿　赵　妍　秦　侠

魏　杰

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书是与普通高等学校规划教材《医药高等数学》(第2版)配套的教学参考书,全书内容共分八章:函数、极限与连续,一元函数微分学,一元函数积分学,多元函数微积分学,无穷级数,常微分方程,概率论基础,线性代数基础.每一章均设有以下栏目:目的与要求、重点与难点、典型例题、教材中习题参考答案、补充习题、补充习题参考答案、自测题、自测题参考答案.其中典型例题和补充习题在难度上有所提高,题型灵活,解法多样.

本书可作为高等医学院校各专业"高等数学"教学的参考书,本书使用对象主要是高等医学院校各专业本科生和七年制学生,同时也可供研究生学习使用.

图书在版编目(CIP)数据

医药高等数学学习指导/秦侠,吴学森,陈涛主编.—2版.—合肥:中国科学技术大学出版社,2013.7

ISBN 978-7-312-03231-8

Ⅰ.医… Ⅱ.①秦… ②吴… ③陈… Ⅲ.医用数学—高等数学—医学院校—教材 Ⅳ.①R311 ②O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第161285号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路96号,230026
http://press.ustc.edu.cn
印刷 合肥市宏基印刷有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 880 mm×1230 mm 1/32
印张 7.5
字数 224千
版次 2008年9月第1版 2013年7月第2版
印次 2013年7月第5次印刷
定价 18.00元

前　言

本书在普通高等学校“十一五”规划教材配套辅导《医药高等数学学习指导》的基础上修订而成.本书是与普通高等学校规划教材《医药高等数学》(第2版)配套的教学参考书,与《医药高等数学》(第2版)同步编写.本书在写作上保留了第1版的结构特点,每一章均包括以下栏目:目的与要求、重点与难点、典型例题、教材中习题参考答案、补充习题、补充习题参考答案、自测题、自测题参考答案.其中典型例题和补充习题在难度上有所提高,题型灵活,解法多样,可满足部分学生考研的需要.

本书的编写具有下列特点:

- 章节安排与教材《医药高等数学》(第2版)基本一致,简明实用,便于学生课堂学习和课后复习.
- 以评析方式对教材的重点难点做了进一步的总结,帮助学生把知识点理顺.
- 以适当的难度梯度选编典型例题和补充习题,满足学有余力的学生和考研学生课后学习、加强训练及提高能力的需要.
- 习题类型丰富,含选择题、填空题、计算题、证明题、应用题等,全方位训练学生,帮助学生提高解题能力.
- 每章有一套100分的自测题及解答,以便学生对各章知识的掌握程度进行自我测评.

本书可作为高等医学院校各专业“高等数学”教学的参考书,本书使用对象主要是高等医学院校各专业本科生和七年制

学生,同时也可供研究生学习使用.

本书编写分工如下:第1章由孙侠编写,第2章由朱文婕和魏杰编写,第3章由陈涛编写,第4章由刘国旗编写,第5章由宋国强编写,第6章由周睿和秦侠编写,第7章由吴学森编写,第8章由赵妍编写.

本书在编写过程中,得到安徽医科大学和中国科学技术大学出版社的大力支持,在此表示衷心的感谢.

虽为再版,但书中仍难免存在错漏之处,真诚地希望在医药学界从事高等数学教研的同仁给予批评和指正.

秦　侠

2013年5月

目　录

第1章　函数、极限与连续

【目的与要求】

1. 掌握

(1) 函数的定义、表达式及函数值;基本初等函数的概念、性质及图形;复合函数及其分解.

(2) 极限的四则运算法则;利用两个重要极限求函数的极限.

(3) 简单函数(包括分段函数)在一点的连续性,函数的间断点及类型.

2. 熟悉

(1) 函数的概念;函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性;反函数、初等函数、分段函数的概念;建立简单实际问题中的函数关系.

(2) 极限的概念和有关性质;无穷小量的概念和性质,无穷小的运算法则.

(3) 初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质.

3. 了解

(1) 极限的 $\varepsilon-N$ 和 $\varepsilon-\delta$ 定义.

(2) 夹逼定理和单调有界定理.

(3) 无穷大的概念及性质.

【重点与难点】

1.1　函　　数

1. 函数关系的两大要素

函数关系的两大要素为定义域和对应法则. 如果两个函数的定

义域和对应法则都相同,那它们是相同的函数,否则就是不同的.

2. 基本初等函数

基本初等函数即常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数.其中难点是三角函数和反三角函数的概念和性质.

3. 隐函数

如果因变量 y 可以用自变量 x 的明显表达式表示出来,这样的函数称为显函数.而有些函数的表达方式却不是这样,它的因变量与自变量的对应关系是由一个方程确定的,函数关系隐含在这个方程中,这样的函数称为隐函数.有些隐函数可以化成显函数,而有些隐函数显化很困难,甚至是不可能的.

4. 反函数

设 $y=f(x)$是定义在 D 上的一个函数,值域为 W.如果对每一个 $y\in W$ 都有唯一的且满足关系式 $y=f(x)$的 x 与之对应,则确定了一个定义在 W 上以 y 为自变量、x 为因变量的新函数,称为 $y=f(x)$的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$.而原来的函数 $y=f(x)$称为直接函数,或称它们互为反函数.

若函数 $y=f(x)$是定义在数集 D 上的单调函数,则一定存在反函数.

习惯上把 $x=f^{-1}(y)$改写为 $y=f^{-1}(x)(x\in W)$,这时称 $y=f^{-1}(x)$是 $y=f(x)$的反函数.$y=f(x)$的图形和 $y=f^{-1}(x)$的图形关于 $y=x$ 对称.

5. 复合函数分解

把一个复合函数分解成几个简单的函数很重要,分解出来的简单函数都是基本初等函数,或是由基本初等函数经过四则运算得到的函数.

6. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的复合所构成的且仅用一个解析式表示的函数称为初等函数.

7. 分段函数

对于在定义域内根据自变量 x 的不同取值范围,函数 $f(x)$有不同解析表达式的函数称为分段函数.

1.2 极 限

1. 数列的极限

给定数列$\{x_n\}$，A为常数，若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则称$A$为数列$\{x_n\}$的极限，也称$\{x_n\}$收敛于$A$. 否则称数列$\{x_n\}$发散.

2. 函数的极限

函数的极限根据自变量的变化过程分为两类：

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 和 \quad \lim_{x\to x_0}f(x)=A$$

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$的充要条件是$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的充要条件是$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

注意 ① 函数$f(x)$在自变量x的某个变化过程中是否存在极限，取决于在x的这个变化过程中$f(x)$是否有固定的变化趋势，跟x的这个变化过程以及函数$f(x)$有关，而与$f(x)$在点x_0是否有定义无关；② 同一个函数$f(x)$，若自变量x的变化过程不同，则存在不同的极限.

3. 无穷小与无穷大

(1) 无穷小的概念：无穷小是指在x的某种变化过程中以零为极限的函数. 任何一个非零常数都不是无穷小，但是常数0可以看作无穷小.

(2) 无穷小的性质：

① $\lim f(x)=A$的充分必要条件是$\lim[f(x)-A]=0$.

② 有限个无穷小的和、差、积仍是无穷小.

③ 有界变量(或常量)与无穷小的乘积仍是无穷小.

(3) 无穷小的比较：设$\alpha=\alpha(x)$和$\beta=\beta(x)$都是在自变量x的同一个变化过程下的无穷小，且$\beta\neq 0$，在此过程下，若：

① $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称$\alpha$是比$\beta$高阶的无穷小，或称$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小；

② $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=C(C\neq 0)$，则称$\alpha$和$\beta$是同阶无穷小.

特别地，当 $C=1$ 时，称 α 和 β 是等价无穷小，记为 $\alpha\sim\beta$.

(4) 无穷大的概念：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$），则称 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷大量，简称无穷大.

设在自变量 x 的同一个变化过程中，若函数 $f(x)$ 是无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小；若 $f(x)$ 是无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

4. 极限的四则运算法则

(1) $\lim[f(x)+g(x)]=\lim f(x)+\lim g(x)$；

(2) $\lim[f(x)-g(x)]=\lim f(x)-\lim g(x)$；

(3) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$；

(4) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}(\lim g(x)\neq 0)$.

5. 两个重要极限

(1) 第一重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

变换形式：设 $\alpha(x)$ 是某一过程中的无穷小，则 $\lim\limits_{\text{某过程}}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$.

(2) 第二重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

变换形式：设 $\alpha(x)$ 是某一过程中的无穷小，则 $\lim\limits_{\text{某过程}}[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}=\mathrm{e}$.

本节的重点是要掌握求函数极限的几种方法：① 利用极限四则运算法则求简单函数的极限；② 利用两个重要极限求极限；③ 利用夹逼定理和单调有界定理求数列极限（学习了 1.3 节函数的连续性以后）；④ 利用连续性求极限（学习了 2.3 节中值定理与导数的应用后）；⑤ 利用洛必塔法则求极限（学习了导数之后）. 注意在做题时，这些方法不是孤立的，经常一个题目同时用到几种方法. 对于分段函数在分段点处的极限问题，必须根据定义考虑其左、右极限.

1.3　函数的连续性

1. 函数连续的概念

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，则 $f(x)$ 在点 x_0 的连续性有如下三个等价定义：

(1) 如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续；

(2) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续；

(3) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

根据连续的定义可知，$f(x)$在点 x_0 处连续必须同时满足以下三个条件：

(1) 函数值 $f(x_0)$存在；

(2) 极限值 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

2. 间断点

(1) 间断点的判定：只要 $f(x)$不具备上面三个条件中的任何一个，点 x_0 就是 $f(x)$的间断点.

(2) 间断点的分类：常分为第一类间断点和第二类间断点. 设 x_0 是 $f(x)$的间断点，则

$$
\begin{cases}
\begin{array}{l}\text{第一类间断点：}\\ f(x_0^-)\text{ 和 }f(x_0^+)\text{ 都存在}\end{array} & \begin{cases}\text{可去间断点}\begin{cases}f(x_0^-)=f(x_0^+)\neq f(x_0),\\ \text{或者 }f(x_0^-)=f(x_0^+),\\ \text{但 }f(x_0)\text{ 不存在}\end{cases}\\ \text{跳跃间断点 }f(x_0^-)\neq f(x_0^+)\end{cases}\\
\begin{array}{l}\text{第二类间断点：}\\ f(x_0^-)\text{ 或 }f(x_0^+)\text{ 不存在}\end{array} & \begin{cases}\text{无穷间断点}\begin{cases}f(x_0^-)=\infty,\\ \text{或 }f(x_0^+)=\infty\end{cases}\\ \text{振荡间断点}\\ \text{其他间断点}\end{cases}
\end{cases}
$$

3. 初等函数的连续性

初等函数在其定义域内都是连续的.

4. 闭区间上连续函数的性质

(1) 最值定理：设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在该区间上必能取到最大值和最小值.

(2) 介值定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a) \neq f(b)$，c 是介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的常数，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=c$.

(3) 零点定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

注意 ① 三个定理条件相同，都是闭区间上的连续函数. ② 若定理条件满足，则结论必成立；若条件不满足，则结论可能成立，也可能不成立.

本节的重点是要掌握判断函数连续性的方法，关键是抓住连续性的定义，定义中三个条件缺一不可，缺少任何一个则间断. 对于初等函数，定义区间就是连续区间；对于分段函数，要重点考察分段点处的连续性.

【典型例题】

例 1 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x<0 \end{cases}$ 的奇偶性.

解 本题要求对函数和分段函数的概念有准确的理解.

$$f(-x)=\begin{cases} -x-1, & -x>0 \\ 0, & -x=0 \\ -x+1, & -x<0 \end{cases}$$

$$=-\begin{cases} x+1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x-1, & x>0 \end{cases}$$

$$=-f(x)$$

故函数是奇函数.

在教材 1.2.5 小节中介绍过等价无穷小代换，利用这些等价无穷小可以代换乘、除项中的因子，从而达到将复杂函数化简为较简单函数的目的.

(1) 等价无穷小代换法则：设在自变量 x 的同一个变化过程中，$\alpha(x)\sim\bar{\alpha}(x)$ 和 $\beta(x)\sim\bar{\beta}(x)$，且 $\lim\frac{\bar{\alpha}(x)}{\bar{\beta}(x)}$ 存在，则 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 存在，且 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\frac{\bar{\alpha}(x)}{\bar{\beta}(x)}$.

(2) 常见的等价无穷小有：当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x(\alpha\in\mathbf{R})$ 等.

灵活使用等价无穷小代换法则，可以简化极限的运算.

例 2　求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin 3x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{e^x-1}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{x}=3$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot\frac{1}{x}=\infty$(不存在).

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cdot(2x)^2}{x\cdot 3x}=\frac{2}{3}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin x}{x}=\frac{1}{2}$.

注意　等价无穷小代换只适用于乘除运算，不适用于加减运算，即

$$\lim\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\gamma(x)}\neq\lim\frac{\bar{\alpha}(x)-\bar{\beta}(x)}{\gamma(x)}$$

其中 $\gamma(x)\neq 0$.

例如 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x+1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x+1}=0$，这里将分母中的 $\sin x$ 代换成 x 是不对的，因为 $\sin x$ 和其他部分是加减运算，而不是乘除运算.

例 3　求函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的间断点，并判断其类型.

解　函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 和 $x=2$ 处没有定义，所以点 $x=1$ 和

$x=2$ 是函数的间断点.

又因为

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to1^-}\frac{x+1}{x-2}=-2=\lim_{x\to1^+}f(x)$$

但 $f(1)$无定义,故 $x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点;而

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\infty$$

故 $x=2$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点.

例 4 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n}$ 的连续性.

解 本题的关键是根据常用极限$\lim\limits_{n\to\infty}x^n$ 求出 $f(x)$的一般表达式. 因为

$$\lim_{n\to\infty}x^n=\begin{cases}0, & |x|<1\\ 1, & x=1\\ \text{不存在}, & x=-1\\ \infty, & |x|>1\end{cases}$$

故

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0.5, & x=1\\ \text{无定义}, & x=-1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

当 $|x|<1$ 时,$f(x)=1$,连续;

当 $|x|>1$ 时,$f(x)=0$,连续;

当 $x=-1$ 时,$f(x)$ 没有定义,$x=-1$ 是函数的间断点;

当 $x=1$ 时, 左极限

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}1=1$$

右极限

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}0=0$$

故函数在点 $x=1$ 处极限不存在,点 $x=1$ 是函数的间断点.

例 5　设函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续，且 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$，证明在$[0,1]$上至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\xi$.

证　注意零点定理的条件：$f(a)f(b)<0$. 设 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$在$[0,1]$上连续，且

$$F(0)=f(0)\geqslant 0,\quad F(1)=f(1)-1\leqslant 0$$

若 $F(0)=0$ 或者 $F(1)=0$，则 ξ 取 0 或 1；

若 $F(0)>0$ 且 $F(1)<0$，由零点定理，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$.

总之，在$[0,1]$上至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\xi$.

【习题参考答案】

1. (1) $(2,+\infty)$；　(2) $[-1,1]$；　(3) $\left[-\frac{1}{3},1\right]$；

(4) $[-1,0)\cup(0,1]$.

2. (1) $[-1,0)\cup(0,1]$；　(2) $(2k\pi,\pi+2k\pi)$.

3. (1) 不是，定义域不同；　(2) 不是，对应法则不同；　(3) 是.

4. (1) 偶函数；　(2) 奇函数；　(3) 奇函数；

(4) 不是偶函数，也不是奇函数.

5. $f[f(x)]=\begin{cases}x, & x<0\\ x^4, & x\geqslant 0\end{cases}$.

6. (1) $y=e^u, u=x+2$；　(2) $y=\ln u, u=\sin v, v=\sqrt{x}$；

(3) $y=u^2, u=\arcsin v, v=2x+1$；　(4) $y=\sqrt{u}, u=\tan v, v=x+1$.

7. (1) 2；　(2) 3；　(3) 不存在；　(4) 2；　(5) 0；　(6) $\frac{2^{20}}{3^{30}}$；

(7) -0.5；　(8) 0；　(9) $\frac{1}{4}$，令 $x=t^4$；　(10) -1.

8. (1) 无穷小；　(2) 无穷大；　(3) 无穷大；　(4) 无穷小.

9. $k=-3$.

10. (1) $\frac{2}{3}$；　(2) $\frac{2}{5}$；　(3) $\frac{1}{3}$；　(4) $\frac{4}{9}$；　(5) e^2；　(6) e^2；

(7) $e^{-\frac{1}{2}}$；　(8) e^2.